

Итерационная процедура, которая обуславливается условием 2, позволяет определять параметр  $P^E$ . Однозначное соответствие между  $P^E$  и количеством итераций может быть установлено в том случае, если итерации подвергается весь процесс эволюционного преобразования. Естественным условием целесообразности реализации:  $UR = SAR(PR)$ , при  $P^E > 1$ , является наличие обратной связи между объектом управления и, в данном случае, системой  $SAR$ . Из этого вытекает, что интерпретация  $UR$ , как однократного действия по управлению, не корректна в случае достаточно сложных и многопараметрических объектов управления. Более того, случаи, когда имеет место:

$$PR \rightarrow SAR(PR) \rightarrow UR[P_i^D, (P_i^E > 1), P^T, x, t_i]$$

представляют собой исключения. Возникновение обратных связей в процессе реализации  $UR$ , как функции преобразований  $PR$ , формально можно представить в виде следующего соотношения:

$$UR = [SAR(PR) \rightarrow [UR_1 \rightarrow UR_2(P_1^D, P_1^U) \rightarrow \dots \rightarrow UR_k(P_{k-1}^D, P_{k-1}^U)]]$$

1. *Goldberg D.E.* Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. Warszawa: WNT, 2003.
2. *Arabas J.* Wyklady z algorytmow ewolucyjnych. Warszawa: WNT, 2001.
3. *Michalewicz Z.* Algorytmy genetyczne+struktury danych=programy ewolucyjne. Warszawa: WNT, 2003.
4. *Michalewicz Z., Fogel D.B.* Jak to rozwiaczac czyli nowoczesna heurystyka. Warszawa: WNT, 2006.

*Поступила 9.02.2009р.*

УДК 532.1-3:621.315.58:517.968

А. В. Жильцов, канд. техн. наук, ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины

### **ТРЕХМЕРНАЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В МАШИНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК**

**Постановка задачи.** Рассмотрим движение жидкой стали в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок (рис.1). Принимая коэффициент вязкости постоянным, уравнения описывающие движение несжимаемой жидкости в поле внешних сил имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \text{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкого проводника;  $\vec{V}$  — скорость;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $\nu = \eta/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости;  $\vec{f}$  — объемная плотность сил.

**Решение задачи в переменных вихрь — векторный потенциал.**

Введем в рассмотрение функцию вихря  $\vec{\zeta}$  и векторный потенциал  $\vec{\psi}$ , определяемые равенствами

$$\vec{\zeta} = \text{rot} \vec{V}, \tag{3}$$

$$\vec{V} = \text{rot} \vec{\psi}, \text{ div} \vec{\psi} = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (1) исключим давление, применив к обеим частям операцию  $\text{rot}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{V} = \text{rot} [\vec{V}, \text{rot} \vec{V}] + \nu \Delta \text{rot} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \vec{f}, \tag{5}$$

которое, с учетом (3), может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{V}, \vec{\zeta}] + \nu \Delta \vec{\zeta} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \vec{f}. \tag{6}$$

Получим уравнение, которому должна удовлетворять векторный потенциал  $\vec{\psi}$ . Оно получается применением к обеим частям (4) операции  $\text{rot}$ :

$$\text{rot} \vec{V} = \text{rot} \text{rot} \vec{\psi}. \tag{7}$$

Учитывая соотношение (3), приходим к уравнению

$$\vec{\zeta} = \text{grad} \text{div} \vec{\psi} - \Delta \vec{\psi}. \tag{8}$$

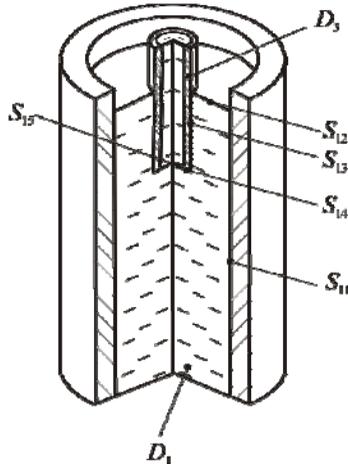


Рис.1. Сечение кристаллизатора машины непрерывного литья заготовок:

$D_1$  — проводник в жидкой фазе,  $D_3$  — погружной стакан

Откуда, с учетом того, что  $\text{div}\vec{\psi}=0$ , окончательно получаем

$$\Delta\vec{\psi}=-\vec{\zeta}. \quad (9)$$

Дополняем систему уравнений (6) и (9) граничными и начальными условиями (рис.1). На твердых поверхностях  $S_{11}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{14}$  граничными условиями являются условия прилипания  $[\vec{n}_Q, \vec{V}]=0$ ,  $(\vec{n}_Q, \vec{V})=0$ , и условия для функции вихря (в цилиндрической системе координат)

- 1) на границе  $r=const$ :  $\zeta_{0r}=0$ ,  $\zeta_{0\alpha}=-\frac{\partial V_z}{\partial r}$ ,  $\zeta_{0z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\alpha)=\frac{\partial V_\alpha}{\partial r}$ ,
- 2) на границе  $z=const$ :  $\zeta_{0r}=-\frac{\partial V_\alpha}{\partial z}$ ,  $\zeta_{0\alpha}=\frac{\partial V_r}{\partial z}$ ,  $\zeta_{0z}=0$ .

На свободной поверхности  $S_{12}$  ( $z=const$ ) граничными условиями являются

- 1) для скорости:  $\frac{\partial V_r}{\partial z}=\frac{\partial V_\alpha}{\partial z}=V_z=0$ ,
- 2) для функции вихря  $\zeta_{0r}=\zeta_{0\alpha}=\zeta_{0z}=0$ .

На входной границе  $S_{15}$  ( $z=const$ ) граничными условиями являются

- 1) для скорости  $\vec{V}=\vec{V}_0$ , где  $\vec{V}_0$  — заданное значение скорости на нижней части погружного стакана,
- 2) для функции вихря  $\zeta_{0r}=\zeta_{0\alpha}=\zeta_{0z}=0$ .

**Интегральное уравнение для векторного потенциала.** Для вывода интегрального уравнения воспользуемся первым граничным условием, записанным в виде:

$$[\vec{n}_Q, \text{rot}\vec{\psi}]=0 \text{ на } S_{11}, S_{13}, S_{14}. \quad (10)$$

Зададим для функции вихря начальное условие в виде (для векторного потенциала начальное условие можно получить с его учетом)

$$\vec{\zeta}(Q,0)=\vec{\zeta}^{(0)}(Q). \quad (11)$$

Ищем решение уравнения (9) в виде:

$$\vec{\psi}(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{D_1}\frac{\vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}}dV_M+\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\frac{\vec{\sigma}(M,t)}{r_{QM}}dV_M, \quad (12)$$

которое автоматически ему удовлетворяет. Для определения простого векторного слоя с плотностью  $\vec{\sigma}(M,t)$ , удовлетворим (12) краевому условию (10). Для этого используем свойство

$$\begin{aligned} [\bar{n}_Q, \text{rot}_Q \bar{\Psi}(Q, t)] = & -\frac{\bar{\sigma}(Q, t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dV_M + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате, приходим к первому интегральному уравнению для определения простого векторного слоя с плотностью  $\bar{\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(Q, t) - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dV_M, \\ Q \in S_{11} \cup S_{13} \cup S_{14}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поле скоростей в жидком проводнике может быть определено на основании соотношений (4) и (12):

$$\begin{aligned} \vec{V}(Q, t) = \text{rot}_Q \bar{\Psi}(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \bar{\zeta}(M, t) \text{rot}_Q \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \bar{\sigma}(M, t) \text{rot}_Q \frac{1}{r_{QM}} dS_M = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)]}{r_{QM}^3} dS_M, \end{aligned}$$

т.е.

$$\vec{V}(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)]}{r_{QM}^3} dS_M. \quad (15)$$

Дополняем уравнение (14) уравнением

$$\frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)]}{r_{QM}^3} dS_M = \vec{V}_0(Q), \quad Q \in S_{15},$$

и уравнением

$$\frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{(\bar{e}_z, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)])}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{(\bar{e}_z, [\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M, t)])}{r_{QM}^3} dS_M = 0, \quad Q \in S_{12}.$$

**Интегро-дифференциальное уравнение для функции вихря.** Сведем уравнение (6) к интегро-дифференциальному уравнению. Сформулируем для него краевую задачу

$$\Delta \bar{\zeta} = -\bar{\Lambda}, \quad (16)$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 \text{ на } S_1, \quad (17)$$

где

$$\bar{\Lambda} = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} - \text{rot}[\bar{V}, \bar{\zeta}] - \frac{1}{\rho} \text{rot} \bar{f} \right), \quad (18)$$

$\bar{\zeta}_0$  — значение функции вихря на границе жидкого проводника.

Ищем решение уравнения (16) в виде:

$$\bar{\zeta}(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\bar{\Lambda}(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\bar{\xi}(M, t)}{r_{QM}} dS_M, \quad (19)$$

которое удовлетворяет уравнению (16) автоматически. Для определения плотности простого векторного слоя  $\bar{\xi}(M, t)$  удовлетворим (19) граничному условию (17):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\bar{\Lambda}(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\bar{\xi}(M, t)}{r_{QM}} dS_M = \bar{\zeta}_0(Q, t).$$

Учитывая равенство (18), перепишем последнее уравнение в виде:

$$\begin{aligned} - \int_{D_1} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \int_{D_1} \frac{\text{rot}[\bar{V}, \bar{\zeta}]}{r_{QM}} dV_M + v \iint_{S_1} \frac{\bar{\xi}(M, t)}{r_{QM}} dS_M = \\ = - \frac{1}{\rho} \int_{D_1} \frac{\text{rot} \bar{f}}{r_{QM}} dV_M + 4\pi v \bar{\zeta}_0(Q, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Выполним преобразования с целью избавления от операции ротора под знаком второго интеграла в левой части и первого интеграла в правой части уравнения (20). Используя тождество из векторного анализа

$$\text{rot} \bar{a} = \text{rot}(\varphi \bar{a}) - [\text{grad} \varphi, \bar{a}]$$

записываем

$$\int_{D_1} \frac{\text{rot} \bar{f}}{r_{QM}} dV_M = \int_{D_1} \text{rot} \left( \frac{\bar{f}}{r_{QM}} \right) dV_M - \int_{D_1} \left[ \text{grad} \frac{1}{r_{QM}}, \bar{f} \right] dV_M.$$

Используя теорему Грина

$$\int_V \text{rot} \bar{a} dV = \iint_S [\bar{n}, \bar{a}] dS,$$

приходим к эквивалентному равенству

$$\int_{D_1} \text{rot}_M \left( \frac{\bar{f}(M)}{r_{QM}} \right) dV_M = \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, \bar{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M.$$

Далее, учитывая, что

$$\text{grad}_M \frac{1}{r_{QM}} = - \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3},$$

получаем,

$$\int_{D_1} \left[ \text{grad} \frac{1}{r_{QM}}, \vec{f} \right] dV_M = - \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{f}]}{r_{QM}^3} dV_M .$$

Таким образом,

$$\int_{D_1} \text{rot} \frac{\vec{f}}{r_{QM}} dV_M = \iint_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, \vec{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M + \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{f}]}{r_{QM}^3} dV_M .$$

Аналогично,

$$\int_{D_1} \frac{\text{rot} [\vec{V}, \vec{\zeta}]}{r_{QM}} dV_M = \iint_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, [\vec{V}, \vec{\zeta}]]}{r_{QM}} dS_M + \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, [\vec{V}, \vec{\zeta}]]}{r_{QM}^3} dV_M .$$

В результате записываем уравнение (20) в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{D_1} \frac{\partial \vec{\zeta}(M, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, [\vec{V}(M, t), \vec{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dV_M + \\ & + \iint_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, [\vec{V}(M, t), \vec{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}} dS_M + \nu \iint_{S_1} \frac{\vec{\zeta}(M, t)}{r_{QM}} dS_M = \\ & = - \frac{1}{\rho} \iint_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, \vec{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M - \frac{1}{\rho} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{f}(M)]}{r_{QM}^3} dV_M + 4\pi\nu\vec{\zeta}_0(Q, t), \quad Q \in D_1 . \quad (21) \end{aligned}$$

Преимуществом уравнения (21) в сравнении с уравнением (20) является то, что в нем отсутствуют пространственные производные от искомых величин.

Выпишем полную систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих гидродинамический процесс:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(Q, t) - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dV_M , \\ Q \in S_{11} \cup S_{13} \cup S_{14}; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \iint_{S_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M, t)]}{r_{QM}^3} dS_M = 4\pi\vec{V}_0(Q), \quad Q \in S_{15}; \quad (23)$$

$$\int_{D_1} \frac{(\vec{e}_z, [\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M, t)])}{r_{QM}^3} dV_M + \iint_{S_1} \frac{(\vec{e}_z, [\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M, t)])}{r_{QM}^3} dS_M = 0, \quad Q \in S_{12}; \quad (24)$$

$$\vec{V}(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}^3} dS_M; \quad (25)$$

$$\vec{\psi}(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\vec{\sigma}(M,t)}{r_{QM}} dV_M; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \frac{\vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dS_M - \int_{D_1} \frac{\partial \vec{\zeta}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, [\vec{V}(M,t), \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dV_M + \\ & + \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, [\vec{V}(M,t), \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}} dS_M = - \frac{1}{\rho} \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, \vec{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M - \\ & - \frac{1}{\rho} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{f}(M)]}{r_{QM}^3} dV_M + 4\pi v \vec{\zeta}_0(Q,t), \quad Q \in S_1; \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \frac{\vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dS_M - 4\pi v \vec{\zeta}(Q,t) - \int_{D_1} \frac{\partial \vec{\zeta}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \\ & + \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, [\vec{V}(M,t), \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dV_M + \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, [\vec{V}(M,t), \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}} dS_M = \\ & = - \frac{1}{\rho} \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, \vec{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M - \frac{1}{\rho} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{f}(M)]}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_1. \quad (28) \end{aligned}$$

**Решение задачи в переменных скорость — вихрь.** Вместо решения трех уравнений Пуассона для векторного потенциала  $\vec{\psi}$  можно решать три уравнения Пуассона для составляющих скорости [3]. Эти уравнения легко вывести из уравнения неразрывности (2) с учетом определения вихря  $\vec{\zeta} = \text{rot } \vec{V}$ . Уравнения можно записать в векторной форме

$$\Delta \vec{V} = -\text{rot } \vec{\zeta}. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) будем искать в виде

$$\vec{V}(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\text{rot } \vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\vec{\sigma}(M,t)}{r_{QM}} dS_M, \quad (30)$$

где  $r_{QM}$  — расстояние от точки  $Q$  до точки  $M$ ;  $\vec{\sigma}(Q,t)$  — мгновенная поверхностная плотность простого слоя векторных источников на границе  $S_1$ .

Выполнив несложные преобразования, перепишем (30) в виде:

$$\vec{V}(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_M, \vec{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\vec{\sigma}(M,t)}{r_{QM}} dS_M, \quad (31)$$

где  $\vec{r}_{QM}$  — радиус-вектор, направленный из точки  $Q$  в точку  $M$ ,  $\vec{n}_M$  — внешняя к границе  $S_1$  нормаль, восстановленная в точке  $M$ .

Удовлетворяя решение (31) граничному условию  $[\vec{n}_Q, \vec{V}(Q,t)] = 0$  на твердой поверхности и граничному условию  $[\vec{n}_Q, \vec{V}(Q,t)] = [\vec{n}_Q, \vec{V}_0(Q)]$  на входной границе, приходим к системе интегральных уравнений первого рода (рис. 1):

$$\int_{S_1} \frac{[\vec{n}_Q, \vec{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}} dS_M = - \int_{D_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dV_M - \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{n}_M, \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}} dS_M, \quad (32)$$

$$Q \in S_{11} \cup S_{13} \cup S_{14},$$

$$\int_{S_1} \frac{[\vec{n}_Q, \vec{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}} dS_M = - \int_{D_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{r}_{QM}, \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dV_M - \int_{S_1} \frac{[\vec{n}_Q, [\vec{n}_M, \vec{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}} dS_M + 4\pi [\vec{n}_Q, \vec{V}_0(Q)], \quad Q \in S_{15}. \quad (33)$$

Удовлетворим решение (31) граничному условию  $[\vec{n}_Q, \vec{\zeta}(Q,t)] = 0$  на свободной поверхности. Для этого сначала находим

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}(Q,t) &= \text{rot}_Q \vec{V}(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \text{rot}_Q \int_{D_1} \frac{\text{rot}_M \vec{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \text{rot}_Q \int_{S_1} \frac{\vec{\sigma}(M,t)}{r_{QM}} dS_M = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \text{rot}_M \vec{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} dV_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}^3} dS_M. \end{aligned}$$

При стремлении точки  $Q$  к границе раздела сред,  $\text{rot}_Q \vec{V}(Q,t)$  претерпевает скачек

$$\begin{aligned} \text{rot}_Q \vec{V}(Q,t) &= -\frac{[\vec{\sigma}(Q,t), \vec{n}_Q]}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{\sigma}(M,t)]}{r_{QM}^3} dS_M + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{[\vec{r}_{QM}, \text{rot}_M \vec{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} dV_M. \end{aligned}$$

В результате, приходим к следующему интегральному уравнению

$$\bar{\sigma}(Q,t) - \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, \bar{\sigma}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dS_M = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, rot_M \bar{\zeta}(M,t)]]}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in S_{12}. \quad (34)$$

Итак, система уравнения (32), (33), (34) позволяет определить скорость в жидком проводнике по известному значению функции вихря.

В правую часть уравнения (34) входит  $rot_M \bar{\zeta}(M,t)$ , поэтому преобразуем ее:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}, rot_M \bar{\zeta}(M,t) \right] &= grad_M \left( \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M,t))}{r_{QM}^3} \right) - \underbrace{\left[ \bar{\zeta}(M,t), rot_M \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} \right]}_{=0} - \\ &- (\bar{\zeta}(M,t), grad_M) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} - \left( \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}, grad_M \right) \bar{\zeta}(M,t). \end{aligned} \quad (35)$$

Далее записываем,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}, grad_M \right) \bar{\zeta}(M,t) &= -rot_M \left( \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} \right) + \\ &+ \underbrace{\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} div_M \bar{\zeta}(M,t)}_{=0} - \underbrace{\bar{\zeta}(M,t) div_M \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}}_{=0} + (\bar{\zeta}(M,t), grad_M) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (36) в (35), получаем,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}, rot_M \bar{\zeta}(M,t) \right] &= grad_M \left( \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M,t))}{r_{QM}^3} \right) + rot_M \left( \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} \right) - \\ &- 2(\bar{\zeta}(M,t), grad_M) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}. \end{aligned}$$

Учитываем, что

$$(\bar{\zeta}(M,t), grad_M) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} = - \frac{3(\bar{\zeta}(M,t), \bar{r}_{QM}) \bar{r}_{QM} - \bar{\zeta}(M,t) r_{QM}^2}{r_{QM}^5}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, rot_M \bar{\zeta}(M,t)]}{r_{QM}^3} dV_M =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \text{grad}_M \left( \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t))}{r_{QM}^3} \right) dV_M + \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \text{rot}_M \left( \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} \right) dV_M + \\
&\quad + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{3(\bar{\zeta}(M, t), \bar{r}_{QM}) \bar{r}_{QM} - \bar{\zeta}(M, t) r_{QM}^2}{r_{QM}^5} dV_M .
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} \text{grad}_M \left( \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t))}{r_{QM}^3} \right) dV_M &= \oint_{S_1} \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)) \bar{n}_M}{r_{QM}^3} dS_M , \\
\int_{D_1} \text{rot}_M \left( \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} \right) dV_M &= \oint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M ,
\end{aligned}$$

записываем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \text{rot}_M \bar{\zeta}(M, t)]}{r_{QM}^3} dV_M = \\
&\frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)) \bar{n}_M}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{D_1} \frac{3(\bar{\zeta}(M, t), \bar{r}_{QM}) \bar{r}_{QM} - \bar{\zeta}(M, t) r_{QM}^2}{r_{QM}^5} dV_M .
\end{aligned}$$

Далее, можно учесть, что

$$[\bar{n}_M, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]] = \bar{r}_{QM} (\bar{n}_M, \bar{\zeta}(M, t)) - \bar{\zeta}(M, t) (\bar{n}_M, \bar{r}_{QM}) = -\bar{\zeta}(M, t) (\bar{n}_M, \bar{r}_{QM}) ,$$

так как, согласно граничным условиям  $(\bar{n}_M, \bar{\zeta}(M, t)) = 0$ ,  $M \in S_1$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)) \bar{n}_M}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, [\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M = \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{\bar{n}_M (\bar{r}_{QM}, \bar{\zeta}(M, t)) - \bar{\zeta}(M, t) (\bar{r}_{QM}, \bar{n}_M)}{r_{QM}^3} dS_M = \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, [\bar{n}_M, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, [\bar{n}_M, \bar{\zeta}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dS_M .
\end{aligned}$$

Итак, в результате приходим к следующему уравнению

$$\bar{\sigma}(Q,t) - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, [\bar{\sigma}(Q,t)]]]}{r_{QM}^3} dS_M = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_Q, [\bar{r}_{QM}, [\bar{n}_M, \bar{\zeta}(M,t)]]]}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{\pi} \left[ \bar{n}_Q, \int_{D_1} \frac{3(\bar{\zeta}(M,t), \bar{r}_{QM}) \bar{r}_{QM} - \bar{\zeta}(M,t) r_{QM}^2}{r_{QM}^5} dV_M \right], \quad Q \in S_{12}. \quad (37)$$

Система интегро-дифференциальных уравнения, к решению которой сводится краевая задача для уравнения движения (6), имеет вид (27), (28), а именно:

$$\begin{aligned} & \nu \iint_{S_1} \frac{\bar{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dS_M - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \frac{\bar{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dV_M + \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, [\bar{V}(M,t), \bar{\zeta}(M,t)]]]}{r_{QM}^3} dV_M = \\ & = -\frac{1}{\rho} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, \bar{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M - \frac{1}{\rho} \int_{V_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{f}(M)]}{r_{QM}^3} dV_M + 4\pi\nu\bar{\zeta}_0(Q,t), \quad Q \in S_1; \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nu \iint_{S_1} \frac{\bar{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dS_M - 4\pi\nu\bar{\zeta}(Q,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \frac{\bar{\zeta}(M,t)}{r_{QM}} dV_M + \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, [\bar{V}(M,t), \bar{\zeta}(M,t)]]]}{r_{QM}^3} dV_M = \\ & = -\frac{1}{\rho} \iint_{S_1} \frac{[\bar{n}_M, \bar{f}(M)]}{r_{QM}} dS_M - \frac{1}{\rho} \int_{D_1} \frac{[\bar{r}_{QM}, \bar{f}(M)]}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_1. \quad (39) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\zeta}_0(Q,t)$  — значение функции вихря на границе  $S_1$ .

**Вывод.** Полученные в работе системы интегро-дифференциальных уравнений, отличительной особенностью которых является отсутствию пространственных производных от искомым функций, могут быть использованы для расчета поля скоростей при моделировании МГД процессов в электротехнических устройствах с жидкими проводниками.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие: В 10 томах: Т. VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: 1953. – 680 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости: В 2-х томах: Т.2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с.

Поступила 15.01.2009г.