

УДК 519.218.82+521.93

## Исследование структуры, моделирование и прогноз различных шкал земного динамического (TDT) и всемирного (UT1) времени.

### I. Долгопериодические изменения

В. Я. Чолий

Проведен анализ среднегодовых значений  $\Delta T = TDT - UT_1$ , на основании которого определены параметры трендов и основных гармонических составляющих ряда. Построены детерминированные, стохастические и смешанные модели, использованные для долгосрочного прогноза. Показано, что стохастические и особенно смешанные модели для этих целей наиболее пригодны.

*STRUCTURE, MODELLING AND FORECASTING OF DIFFERENCES BETWEEN TERRESTRIAL DYNAMICAL TIME (TDT) AND UNIVERSAL TIME (UT1). I. LONG-PERIOD TERMS, by Choliy V. Ya.— The analysis of TDT — UT1 annual differences was made. From this analysis the trends and harmonic components parameters were found. The deterministic, stochastic and mixed simulations have been constructed and the results were used for long-term forecasting. The mixed models are shown to produce the best forecasts.*

**Введение.** В системе астрономических постоянных МАС 1976 г. принята новая шкала земного динамического времени (TDT), которое, по определению, равно сумме международного атомного времени (TAI) и поправки 32.184<sup>с</sup>. В качестве единицы динамической шкалы времени приняты сутки, содержащие 86 400 с Международной системы единиц (СИ). Шкала TDT отличается от шкалы барицентрического динамического времени (TDB) только на величину периодических членов. До 1955 г., когда шкала TAI не строилась, можно считать, что шкалы эфемеридного времени ET и TDT совпадают.

Нами проанализированы разности шкал TDT и всемирного времени UT1, которые характеризуют особенности вращательного движения Земли и имеют широкий спектр. Обычно в спектре выделяют такие составляющие: 1) долгопериодические, охватывающие периоды свыше двух лет; 2) квазидвухлетние и сезонные; 3) месячные и полумесячные; 4) короткопериодические.

В настоящей работе проведен анализ среднегодовых значений TDT—UT1 для изучения долгопериодических составляющих спектра вращательного движения Земли в области частот от 0 до 0.5 цикл/год. Изучены также некоторые модели этого ряда для построения долгосрочного прогноза.

**Краткая характеристика исходного материала.** Анализируемый ряд представляет собой массив 125 среднегодовых значений  $\Delta T = TDT - UT_1$  за период с 1861 по 1985 г. Значения  $\Delta T$  заданы на начало каждого года. Основная часть этого массива (118 точек) взята из работы [5], в которой на основе анализа почти 50 000 наблюдений покрытий звезд Луной за период с 1861 по 1955 г. получены разности TDT—UT1. Следует отметить, что эта часть массива неоднородна по точности. Начиная с 1943 г., благодаря усилиям по сбору и объединению всех выполненных наблюдений покрытий звезд Луной, в значениях  $\Delta T$ , по-видимому, отсутствуют систематические ошибки.

Значения  $\Delta T$  в интервале с 1955.0 по 1978.0 вычислены с использованием шкалы атомного времени TAI [5], а за период с 1979.0 по 1985.0 получены нами на основе данных соответствующих Годовых отчетов Международного бюро времени (МБВ). Кроме того, значения

$\Delta T$  на 1986.0 и 1987.0 (последнее получено по данным Циркуляра Д МБВ) использованы нами для проверки качества прогноза. Эти две точки в анализируемый ряд не входят.

Из графического анализа значений  $\Delta T$ , их первых и вторых разностей можно сделать вывод о неоднородной по времени структуре различий рассматриваемых шкал времени. Эта неоднородность особенно сильно проявляется при сопоставлении части ряда до 1900.0 и после этой даты. Поэтому считаем целесообразным кроме анализа полного

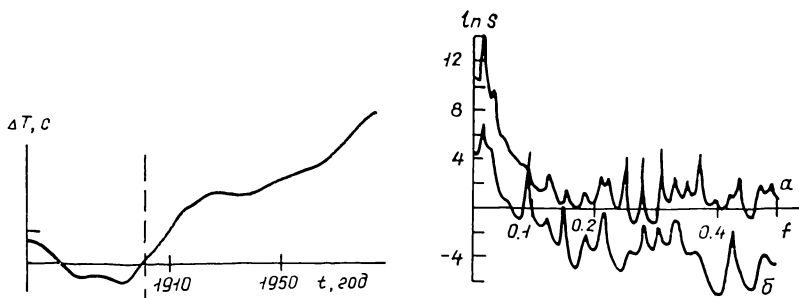


Рис. 1. Ряды  $\Delta T$ . Штриховой линией показана левая граница ряда II

Рис. 2. Спектры максимальной энтропии анализируемых рядов:  $a$  — I;  $b$  — II (для большей наглядности сдвинут вдоль оси ординат на два деления вниз)

ряда значений  $\Delta T$  (125 точек, далее обозначается как ряд I) выполнить анализ, по возможности, однородной части ряда  $\Delta T$  после 1900.0 (85 точек, ряд II). Ряды представлены на рис. 1.

**Метод исследования.** В качестве общей модели изменения  $\Delta T$  со временем примем следующее выражение:

$$\Delta T(t) = \Delta T_T(t) + \Delta T_G(t) + \Delta T_C(t), \quad (1)$$

где  $\Delta T_T(t)$  — полиномиальный тренд;  $\Delta T_G(t)$  — гармоническая составляющая;  $\Delta T_C(t)$  — не моделируемая детерминированными функциями составляющая, для описания которой в настоящей работе использованы стохастические модели.

Анализ ряда проводится в три этапа. На первом — находится полиномиальный тренд  $\Delta T_T(t)$ . При этом он представляется в виде

$$\Delta T_T = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \quad (2)$$

где  $t_0 = \sum_{i=1}^n t_i/n$  — средняя эпоха ряда;  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  — постоянные коэффициенты.

Коэффициент  $a_0$  характеризует несовпадение начал отсчета шкал времени в момент их согласования;  $a_1$  — обусловлен различием длительности секунды СИ и секунды всемирного времени;  $a_2$  — описывает вековое замедление вращения Земли и другие аналогичные эффекты.

На втором этапе анализируется ряд без полиномиального тренда, т. е. ряд  $\Delta T(t) - \Delta T_T(t)$ . Гармоническая составляющая при этом представляется в виде

$$\Delta T(t) - \Delta T_T(t) = \sum_{i=1}^m A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), \quad (3)$$

где  $f_i$ ,  $A_i$ ,  $\varphi_i$  — частота, амплитуда и фаза  $i$ -й гармоники периодической составляющей соответственно. Для определения  $f_i$ ,  $A_i$ ,  $\varphi_i$  использована итерационная процедура, в которой на каждом шаге вычисляется спектр максимальной энтропии, и в нем выделяется пик максимальной высоты. Находится частота  $f_i$ , соответствующая этому пику, и с помощью метода наименьших квадратов определяются амплитуда

и фаза гармоники  $A_i$  и  $\varphi_i$ . Далее эта гармоника исключается из общего ряда. Итерации проводятся до тех пор, пока

$$\sigma_{A_i} \leq 0.5A_i. \quad (4)$$

На третьем этапе используем стохастическую модель авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС), иначе называемую моделью Бокса — Дженкинса. Такая модель представляет собой мощный инструмент анализа временных рядов. Ее свойства позволяют опускать второй (иногда и первый) этап предложенного метода исследований. Модель АРПСС пригодна также для описания нестационарных временных рядов.

**Общая модель авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего.** Предположим, что изучается ряд  $z_t$ ,  $t=1, \dots, N$ , генерируемый стохастической системой, на вход которой через равные промежутки времени поступают некоррелированные импульсы  $a_t$ , представляющие собой белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_a^2$ . Вход и выход системы можно связать уравнением фильтрации

$$z_t = \sum_{i=0}^q \theta_i a_{t-i}. \quad (5)$$

Верхний предел суммирования  $q$  в (5) зависит от свойств системы и в предельном случае может быть бесконечно большим. Поскольку выражение (5) можно записать для разных моментов времени  $t$ , очевидно существует связь текущего и предыдущих выходов системы:

$$z_t = \sum_{j=1}^p \varphi_j z_{t-j}. \quad (6)$$

Значение  $p$  также определяется свойствами системы и в предельном случае может быть бесконечно большим. Связь типа (5) выражает операцию скользящего суммирования, а типа (6) — авторегрессионную зависимость. Выражения (5) и (6) взаимосвязаны, поэтому реальной является такая связь  $a_t$  и  $z_t$ , когда текущее значение  $z_t$  зависит как от предыдущих выходов  $z_{t-i}$ , так и от предыдущих и текущего входов  $a_t$ . Введя оператор сдвига назад  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}z_t = z_{t-1}; \quad \mathbf{B}^m z_t = z_{t-m}, \quad (7)$$

запишем общую модель авторегрессии — скользящего среднего (АРСС) порядка  $(p, q)$  в виде

$$\Phi(\mathbf{B}) z_t = \Theta(\mathbf{B}) a_t, \quad (8)$$

где  $\Phi(\mathbf{B})$  и  $\Theta(\mathbf{B})$  — полиномы, определяющие оператор авторегрессии порядка  $p$  и оператор скользящего среднего порядка  $q$  соответственно. Модель (8) содержит  $p+q+2$  неизвестных параметров, подлежащих определению по эмпирическим данным:  $p$  коэффициентов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ ;  $q$  коэффициентов  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ ; дисперсия белого шума на входе  $\sigma_a^2$  и среднее значение ряда  $\mu$ . Любой модели АРСС однозначно соответствует система разностных (дифференциальных) уравнений.

Модель (8) пригодна для описания стационарных рядов. Однако существует возможность учесть нестационарность исследуемого ряда, введя в (8) оператор взятия разностей  $\nabla$

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - \mathbf{B}) z_t. \quad (9)$$

В этом случае модель (8) записываем в следующем виде:

$$\Phi(\mathbf{B}) \nabla^d z_t = \Theta(\mathbf{B}) a_t \quad (10)$$

или, что эквивалентно, в таком виде:

$$\Phi(\mathbf{B})\omega_t = \Theta(\mathbf{B})a_t, \quad \omega_t = \nabla^d z_t, \quad (11)$$

где  $\omega_t$  — стационарный процесс, полученный  $d$ -кратным взятием разностей из  $z_t$  по формуле (9). Модель (11) — это модель авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС) порядка  $(p, d, q)$  или модель Бокса — Дженкинса. Очевидно, что ряд первых разностей не содержит линейного тренда и его поведение в этом смысле более стационарно.

Для оценивания параметров модели применяются различные методы, в том числе методы, основанные на принципе максимального правдоподобия, теореме Байеса [1], и алгоритмы типа Калмана [2]. Возможно оценивать параметры моделей (8) или (11) в реальном масштабе времени.

Модель авторегрессии (6) хорошо известна и применяется довольно часто. Однако число оцениваемых параметров модели (6) может быть очень большим. От этого недостатка свободны модели (8) и (11), в которых общее число параметров обычно невелико ( $p+d+q \sim 10-15$ ).

Прогноз  $z_t(l)$  в момент времени  $t$  на  $l$  шагов вперед есть условное математическое ожидание величины  $z_{t+l}$  при известных  $z_t, z_{t-1}, \dots$

$$z_t(l) = [z_{t+l}] = [z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots]. \quad (12)$$

Здесь квадратные скобки использованы для обозначения операции взятия математического ожидания.

Модели (8) и (11) имеют несколько представлений, каждое из которых можно использовать для прогноза. Приведем представление в виде следующего разностного уравнения:

$$\begin{aligned} [z_{t+l}] &= \varphi_1 [z_{t+l-1}] + \dots + \varphi_p [z_{t+l-p}] - \\ &- \theta_1 [a_{t+l-1}] - \dots - \theta_q [a_{t+l-q}] + [a_{t+l}]. \end{aligned} \quad (13)$$

При известной оценке  $s_a^2$  дисперсии белого шума  $\sigma_a^2$  и достаточно большом количестве наблюдений приближенные  $100(1-\epsilon)\%$ -ные доверительные интервалы  $z_{t+l}(+)$  и  $z_{t+l}(-)$  прогноза  $z_{t+l}$  есть

$$z_{t+l}(\pm) = z_t(l) \pm u_{\epsilon/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \varphi_j^2\right)^{1/2} s_a, \quad (14)$$

где  $u_{\epsilon/2}$  — квантиль уровня  $1-\epsilon/2$  стандартного нормального распределения.

**Результаты анализа, прогноза и их обсуждение.** На первом этапе анализа рядов получены коэффициенты полиномиального тренда, которые приведены в табл. 1. Проверка коэффициента  $a_2$  короткого ряда на значимость [3, с. 157—173] дает отрицательный результат для существенных уровней значимости.

Далее изучались гармонические составляющие рядов (второй этап). Логарифмы спектров рядов, полученных методом максимальной энтропии по алгоритму Марпла [4], показаны на рис. 2. Спектры наших рядов похожи на спектры красного шума с наложенными пиками разных частот. Основная часть энергии ряда сконцентрирована на низких частотах. Параметры гармоник составляющей  $\Delta T_T$  приведены в табл. 2. Отметим, что в спектре ряда II удается выделить только две гармоники. Остальные пики в спектре не удовлетворяют критерию (4), а резко выраженный пик на частоте около 0.1 цикл/год после исключения указанных в табл. 2 гармоник исчезает.

На третьем этапе мы провели стохастическое моделирование остатков после исключения тренда и гармоник. Выполнено также стохастическое моделирование исходных рядов (АРСС) и исходных рядов с уче-

том их нестационарного поведения (АРПСС при  $d=1$ ). Интерес представляли также АРСС-модели рядов, не содержащих полиномиального тренда.

Особенность всех построенных АРСС-моделей — все они имеют второй порядок авторегрессии и отличаются только порядком скользящего среднего. Для выбора оптимальной модели использован совокупный критерий согласия [1].

Таблица 1. Коэффициенты полиномиального тренда

Коэффициент	Ряд I	Ряд II
$a_0, c$	$18.177 \pm 0.077$	$27.809 \pm 0.015$
$a_1, c/\text{год}$	$0.466 \pm 0.015$	$0.516 \pm 0.015$
$a_2, c/\text{год}^2$	$0.002 \pm 0.000$	Не значим

Все построенные модели использовались для прогноза. Для проверки прогноза взяты значения  $\Delta T$  на 1986.0 и 1987.0, равные соответственно 54.868 и 55.482<sup>s</sup>. В табл. 3 представлены значения прогноза на 1986.0 и 1987.0, полученные по следующим моделям:

а) чистая АРСС-модель (уравнение (8)) ряда I. Прогноз находится с помощью уравнения (13);

б) АРСС-модель части  $\Delta T_{\Gamma}(t) + \Delta T_{\Sigma}(t)$  ряда I + полиномиальный тренд как детерминированная часть;

в) АРСС-модель части  $\Delta T_{\Sigma}(t)$  ряда I + полиномиальный тренд и гармоники как детерминированная часть;

г) АРСС-модель первых разностей ряда I, прогноз первых разностей, нахождение прогноза ряда по прогнозу первых разностей (модель (11) при  $d=1$ );

и) модель, содержащая только детерминированные члены  $\Delta T_{\Gamma}(t) + \Delta T_{\Sigma}(t)$ .

Приведенные в табл. 3 результаты по моделям д — з, к получены по ряду II аналогично моделям а — г, и.

В [6] на основе отличного от нашего подхода предложена детерминированная модель, содержащая только  $a_0$  и гармонические члены с априори заданными периодами, кратными периоду изменения долготы лунного узла. Такой подход представляется интересным, однако ввиду того что периоды некоторых гармоник в несколько раз превышают длину изучаемого ряда точность полученных коэффициентов представляется сомнительной. С другой стороны, ценность модели может заключаться в том, что периоды гармоник выбраны в соответствии с некоторыми физическими соображениями, а не по формальным математическим правилам. Для сравнения в табл. 3 (модель л) дан прогноз на

Таблица 2. Коэффициенты полигармонического представления

Но-мер	Частота, цикл/год	Период, год	Амплитуда, с	Фаза, рад
Ряд I				
1	0.0159	64.74	7.30	-0.22
2	0.0096	103.63	3.89	0.20
3	0.0208	48.00	2.13	-0.16
4	0.0324	30.87	1.46	-0.09
5	0.0353	28.34	0.73	0.47
6	0.0155	64.73	0.75	0.16
7	0.0424	23.56	0.59	-0.29
8	0.0054	185.18	0.86	0.40
9	0.0481	20.85	0.35	-0.70
Ряд II				
1	0.0177	56.37	4.20	-2.92
2	0.0311	32.11	1.92	2.33

Таблица 3. Результаты прогноза на 1986.0 и 1987.0 (в с)

Дата	Модель										
	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л
1986.0	54.83	54.73	54.70	55.00	54.99	54.97	55.17	55.03	54.50	56.19	54.88 <sup>g</sup>
1987.0	55.28	55.04	55.04	55.62	55.60	55.50	55.71	55.62	54.81	56.38	55.38

Таблица 4. Результаты прогноза (в с)

Дата	Модель		Дата	Модель	
	г	д		г	д
1986.0	55.00	54.99	1991.0	57.85	57.75
1987.0	55.62	55.60	1992.0	58.38	58.23
1988.0	56.21	56.18	1993.0	58.92	58.70
1989.0	56.77	56.73	1994.0	59.45	59.15
1990.0	57.31	57.25	1995.0	59.99	59.60

даты 1986.0 и 1987.0. Для этих точек модель неплохо описывает реальные данные, однако более долгосрочные прогнозы указывают на тенденцию к уменьшению  $\Delta T$  со временем, что сильно отличается от данных по остальным моделям.

Анализ построенных моделей позволяет заключить, что наиболее правильно отражают ход изменения  $\Delta T$  со временем АРПСС-модели, т. е. стохастические модели с учетом нестационарности ряда. Такую же точность прогноза дают смешанные модели, основанные на стохастическом моделировании остатков после подгонки несложной детерминированной модели. Формальная точность полученных АРПСС-прогнозов составляет 0.04—0.08<sup>s</sup> для прогноза на один год и 0.12—0.30<sup>s</sup> для прогноза на десять лет вперед.

В табл. 4 приведен (как наиболее точный) прогноз на 10 лет вперед величины  $\Delta T$ , полученный по моделям г и д.

Автор выражает благодарность Я. С. Яцкиву за советы и замечания.

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974.— Вып. 1.—406 с.
2. Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным.— М.: Наука, 1983.—384 с.
3. Худсон Д. Статистика для физиков.— М.: Мир, 1967.—296 с.
4. Marple L. A new autoregressive spectrum analysis algorithm // IEEE Trans.— 1980.— ASSP-28, N 4.— P. 441—453.
5. Morrison L. V. Redetermination of decade fluctuations in the rotation of the Earth in the period 1861—1978 // Geophys. J. Roy. Astron. Soc.— 1979.—58, N 2.— P. 349—360.
6. Pejcev S. An empirical formula for  $\Delta T$  with trigonometric numbers whose periods are divisible by the Moon knot period of circulation // Geodesy.— 1986.— N 12.— P. 66—69.

Киев, ун-т им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию  
22.02.88

#### ЗАМЕЧЕННАЯ ОПЕЧАТКА

В статье Я. С. Яцкива, В. Я. Чолия «Сравнение и объединение различных рядов определений параметров вращения Земли (ПВЗ). II. Координаты полюса по данным астрометрических, радиоинтерферометрических и доплеровских наблюдений» (Кинематика и физика небесных тел, 1988, 4, № 5) нужно сделать следующее исправление: в табл. 2 номеру ряда 3R соответствует код ряда ERP(GSFC)85R01, номеру ряда 4R — код ряда ERP(CFA)85R01.