

УДК 528.22

## Аппроксимация высот геоида. II

М. С. Петровская, К. В. Пищухина

Представление высоты геоида в форме потенциала простого слоя позволяет упростить формулы для определения влияния дальней зоны. Метод целесообразно применять при больших радиусах ближней зоны.

*GEOID HEIGHTS APPROXIMATION. II, by Petrovskaya M. S., Pishchukhina K. V.—* Representing the geoid height as a surface layer potential one can simplify formulae for the remote zone influence. The application of the method is advisable in cases of large inner zone radii.

**1. Введение.** В [2] высота геоида представлена в виде потенциала простого слоя, что позволило существенно упростить формулы для определения влияния ближней и дальней зон. Однако при выводе этих формул принималось предположение о малости ближней зоны. В настоящей работе также будет использовано (в качестве исходного) выражение для потенциала простого слоя, но без каких бы то ни было ограничивающих предположений относительно размера ближней зоны. При этом формула для ближней зоны будет несколько более сложная, чем в [2] или [1]. Как показывает характер убывания коэффициентов усечения, погрешность формул, приведенных ниже, возможно, будет меньше, чем погрешность формул [1], при одном и том же числе учитываемых гармоник геопотенциала. Впрочем, лишь фактическое сравнение с наблюдениями (например, с данными альтиметрии) позволит установить достоинства и недостатки всех вариантов формул при разных размерах ближней зоны и разным числе учитываемых гармоник геопотенциала. Такое сравнение выходит за рамки настоящей работы и представляет собой следующий этап исследований.

**2. Второй метод и его модификация.** Как и в [2], представим высоту геоида в форме потенциала простого слоя

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \mu S_0(\psi) d\sigma, \quad (1)$$

где

$$\mu = \Delta g + \frac{3}{8\pi} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

или приближенно

$$\mu = \Delta g + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{n_0} \Delta g_n / (n-1). \quad (2)$$

Все обозначения взяты из [1], в частности функции  $S(\psi)$  и  $S_0(\psi)$  представлены там формулами (8) и (14).

Разлагая  $\mu$  в ряд Лапласа  $\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n$ , из (2) получаем

$$\mu_n = \frac{2n+1}{2(n-1)} \Delta g_n. \quad (3)$$

Сделаем в (1) те же преобразования, которые выполнялись по отношению к первому члену в формуле (15) из [1]. Этот член также представлял собой потенциал простого слоя, но с другой обобщенной плотностью  $\Delta g$ . Принимая во внимание (2) и (3), получаем приближенную формулу

$$N = N_0^* + \delta_0^* N, \quad (4)$$

где

$$N_0^* = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \left[ \Delta g + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{n_0} \Delta g_n / (n-1) \right] \cos \frac{\psi}{2} d\psi dA; \quad (5)$$

$$\delta_0^* N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n_0} q_n^*(\psi_0) \Delta g_n; \quad (6)$$

$$q_n^*(\psi_0) = \frac{2n+1}{2(n-1)} a_n. \quad (7)$$

Для определения величин  $a_n(\psi_0)$  имеем три варианта формул из [1] (две аналитические формулы и одно рекуррентное соотношение). Запишем их для удобства дальнейшего изложения:

$$a_n(\psi_0) = \frac{4}{2n+1} - 4t \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k (2k+1)} t^{2k}, \quad t = \sin \frac{\psi_0}{2}; \quad (8)$$

$$a_n(\psi_0) = \frac{4}{2n+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (-n)_k}{(1)_k \left(\frac{1}{2} - n\right)_k} \times$$

$$\times \left[ \frac{\sin\left(n - 2k + \frac{1}{2}\right) \psi_0}{n - 2k + \frac{1}{2}} + \frac{\sin\left(n - 2k - \frac{1}{2}\right) \psi_0}{n - 2k - \frac{1}{2}} \right]; \quad (9)$$

$$a_n = 2 \frac{2n-1}{2n+1} a_{n-1} - \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-2} - 8t^2 \sqrt{1-t^2} \frac{2n-1}{n(n-1)(2n+1)} P_{n-1}^1; \quad (10)$$

$$a_0 = 4(1-t), \quad a_1 = \frac{4}{3}(1-3t+2t^3); \quad (11)$$

$$P_n^1(y_0) = \frac{2n-1}{n-1} \cos \psi_0 P_{n-1}^1(y_0) - \frac{n}{n-1} P_{n-2}^1(y_0), \quad n = 2, 3, \dots; \quad (12)$$

$$P_1^1(y_0) = -\sin \psi_0, \quad P_2^1(y_0) = -\frac{3}{2} \sin 2\psi_0, \quad y_0 = \cos \psi_0. \quad (13)$$

Из аналитических формул (8) и (9) первая — проще, а вторая — более удобна для вычислений при больших  $\psi_0$  ( $\psi_0 \geq 20^\circ$ ) и  $n$  ( $n \geq 50$ ).

Для ускорения сходимости ряда, представляющего компонент высоты геоида, который характеризует влияние дальней зоны, можно выполнить те же преобразования, которые сделаны в [1, раздел 3]. В итоге получим приближенную формулу

$$N = \bar{N}_0^* + \bar{\delta}_0^* N; \quad (14)$$

$$\bar{N}_0^* = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \left( \Delta g + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{n_0} \frac{\Delta g_n}{n-1} \right) \cos \frac{\psi}{2} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi_0}{2}} \right) d\psi dA; \quad (15)$$

$$\bar{\delta}_0^* N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n_0} \bar{q}_n^*(\psi_0) \Delta g_n. \quad (16)$$

Коэффициенты  $\bar{q}_n^*(\psi_0)$  можно определить рекуррентно из соотношения

$$\bar{q}_n^*(\psi_0) = q_n^*(\psi_0) + \frac{2n+1}{n(n^2-1)} \cos \frac{\psi_0}{2} P_n^1(\cos \psi_0),$$

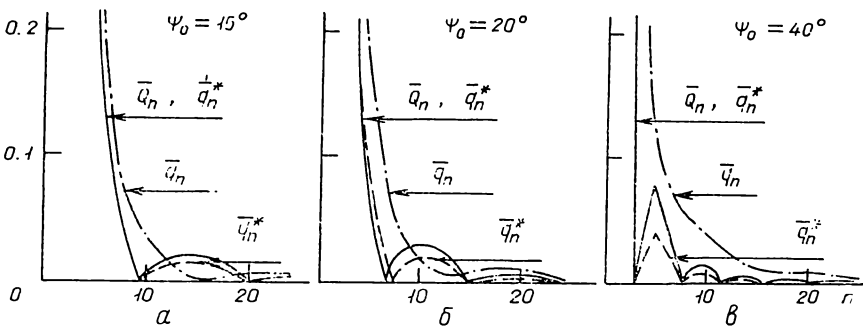
используя его совместно с (7) и (10) — (13). Аналитические формулы для  $\bar{q}_n^*(\psi_0)$  имеют вид

$$\bar{q}_n^*(\psi_0) = \frac{2}{n-1} - \frac{2n+1}{n-1} t \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k (2k+1)(k+1)} t^{2k}; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_n^*(\psi_0) = q_n^*(\psi_0) + \frac{2n+1}{2(n-1)} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n} t^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (-n)_k}{(1)_k \left(\frac{1}{2} - n\right)_k} \times \\ \times \left[ \frac{\sin^2(n-2k+1) \frac{\psi_0}{2}}{n-2k+1} - \frac{\sin^2(n-2k-1) \frac{\psi_0}{2}}{n-2k-1} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $q_n^*(\psi_0)$  определяются по формулам (7) и (9). При  $k = (n \pm 1)/2$  выражение в квадратных скобках в (18) следует заменить на  $2t^2(1-t^2)$ . Формула (17) более простая, чем (18). Последнюю целесообразно применять при больших  $\psi_0$  и  $n$ .

**3. Численные результаты.** По формулам, выведенным в [1] и настоящей статье, проведены численные эксперименты по сравнению ко-



Коэффициенты усечения (абсолютные значения)

эффициентов усечения традиционных ( $Q_n$ ,  $\bar{Q}_n$ ) и новых ( $q_n$ ,  $\bar{q}_n$  из [1] и  $q_n^*$ ,  $\bar{q}_n^*$  из настоящей статьи). Оказалось, что  $Q_n$ ,  $q_n$  и  $q_n^*$  (коэффициенты типа Молоденского) при малых  $\psi_0$  близки между собой. Аналогичным свойством обладают и коэффициенты (типа Остача)  $\bar{Q}_n$ ,  $\bar{q}_n$ ,  $\bar{q}_n^*$ . Каждую группу коэффициентов можно представить одной кривой (см. [1, рис. 2]). Видно, что меньшими по модулю будут коэффициенты первой группы. Из них целесообразно отдать предпочтение  $q_n$  [1] вви-

ду того, что в соответствующем методе аппроксимации высот геоида формулы имеют наиболее простой вид.

При  $3^\circ \leq \psi_0 \leq 15^\circ$  из первой группы коэффициентов  $(Q_n, q_n, q_n^*)$  и второй  $(\bar{Q}_n, \bar{q}_n, \bar{q}_n^*)$  преимущество в смысле быстроты убывания — на стороне второй. При этом наиболее простые формулы соответствуют  $\bar{q}_n$  [1].

На рисунке *a* представлена эволюция коэффициентов  $\bar{Q}_n, q_n$  и  $\bar{q}_n^*$  с увеличением  $n$  при  $\psi_0 = 15^\circ$ . При дальнейшем увеличении  $\psi_0$  оптимальными (в смысле быстроты убывания с ростом  $n$ ) становятся коэффициенты  $\bar{q}_n^*$ , выведенные в настоящей статье, что видно на рисунке *b, в* ( $\psi_0 = 20^\circ, 40^\circ$ ).

Резюмируя результаты, полученные в [1] и в настоящей статье, приходим к следующему выводу. При  $\psi_0 \leq 15^\circ$  целесообразно для аппроксимации высот геоида использовать методикку, представленную в [1]: коэффициенты  $q_n$  при  $\psi_0 < 3^\circ$ ,  $\bar{q}_n$  при  $3^\circ \leq \psi_0 \leq 15^\circ$ . При  $\psi_0 > 15^\circ$  следует отдать предпочтение аппроксимации с помощью коэффициентов  $\bar{q}_n^*$ .

1. Петровская М. С., Пищухина К. В. Аппроксимация высот геоида. I // Кинематика и физика небес. тел.— 1989.—5, № 1 — С. 26—32.
2. Petrovskaya M. S. Formulas simplification and accuracy improvement in the approximation of the geoid heights // Proc. Int. Symp. «Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets», Prague, Sept. 15—20, 1986 / Ed. by P. Holota.— 1987.— Part 1.— P. 305—322.

Ин-т теорет. астрономии АН СССР,  
Ленинград

Поступила в редакцию 20.11.87,  
после доработки 10.02.88

## РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 524.354—423

### ЧАСТИЦЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ В МАГНИТОСФЕРЕ КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ ЗВЕЗДЫ / Кривдик В. Г.

(Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-88-149Р)

С учетом плазменных эффектов исследуются процессы ускорения заряженных частиц и их нетепловое излучение в магнитосфере коллапсирующей звезды. Показано, что частицы ускоряются в данной магнитосфере до релятивистских энергий за счет вихревого электрического поля, и рассчитаны дрейфовая скорость, скорость изменения энергии и спектр частиц. Вычислены параметры Стокса для нетеплового излучения, возникающего при взаимодействии частиц с магнитным полем. Сделаны оценки величины потока и степени его поляризации для конкретных моделей коллапсирующей звезды. Исследована роль плазменных эффектов при распространении излучения в магнитосфере. Выполнена оценка критической частоты излучения, выходящего из магнитосферы на разных стадиях коллапса.

В работе сделан вывод о том, что излучение от коллапсирующей звезды может быть зарегистрировано современными наблюдательными средствами и может служить индикатором той фазы эволюции звезды, когда происходит ее сжатие. Приведены основные характеристики данного излучения — величина потока, степень поляризации, длительность импульса и наблюдаемый диапазон частот.