УДК 517.5

©2008. **В.М. Шраменко**

ІНДЕКС КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА 2-ГО ПОРЯДКУ ІЗ СИЛЬНИМ ЗРОСТАННЯМ КОЕФІЦІЄНТІВ

В роботі доводиться теорема про індекс критичної точки недиференційовного еліптичного оператора 2-го порядку із сильним зростанням коефіцієнтів. Подібний результат раніше був отриманий в роботі А.Г.Картсатоса та І.В.Скрипника [2], але головна відмінність полягає в тому, що в нашому випадку лінеаризуючий оператор є необмеженим та щільно визначеним. Основний результат даної роботи є наслідком абстрактної теореми про індекс критичної точки недиференційовного оператора класу $(S_+)_{0,L}$, доведеної автором [1].

1. Формулювання основного результату.

Розглядається оператор $A : W_0^{1,m}(\Omega) \to [W_0^{1,m}(\Omega)]^*,\ m \in (1,2)$, визначений

$$\langle Au, \phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \{\rho^2(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_i(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})\}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx + \int_\Omega a_0(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})\phi dx, \qquad \phi \in W_0^{1,m}(\Omega), u \in D(A). \tag{1}$$

$$D(A) = \Big\{u \in W_0^{1,m}(\Omega) : \rho^2(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{m'}(\Omega)\Big\},\ m' = \frac{m}{m-1},\ i = 1,...,n. \tag{2}$$

Вважається, що $\Omega \in R^n$, $n > 2$ – обмежена відкрита множина з межею $\partial\Omega$ класу C^2. Нехай мають місце наступні умови на коефіцієнти:

a_1) дійснозначні функції $a_i(x,\xi),\ i = 0,1,...,n$, визначені для $x \in \overline{\Omega},\ \xi \in R^{n+1}$ та неперервно диференційовні; до того ж, $a_i(x,0) = 0$ для $x \in \overline{\Omega},\ i = 0,1,...,n$;

a_2) існують такі додатні сталі ν_1,ν_2, що для усіх $x \in \overline{\Omega},\ \xi \in R^{n+1},\ \eta \in R^n$ виконуються нерівності

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,\xi)\eta_\alpha\eta_\beta \ge \nu_1(1+|\xi|)^{m-2}|\eta|^2 \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} |a_{\alpha\beta}(x,\xi)|(1+|\xi|) + \sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{i=1}^{n} |a_{\alpha i}(x,\xi)| \le \nu_2(1+|\xi|)^{m-1}, \tag{4}$$

де

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta}a_\alpha(x,\xi),\ a_{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial x_i}a_\alpha(x,\xi),\ |\alpha|,|\beta| \le 1,\ i = 1,...,n. \tag{5}$$

ρ_1) дійсна функція $\rho(u)$ визначена та неперервно диференційовна на R;

ρ_2) існує таке додатне число μ , що для довільного $u \in R$ маємо

$$0 \le \rho(u) \le \mu\Big\{\Big|\int_0^u \rho(s)ds\Big| + 1\Big\}^r, \tag{6}$$

де r така константа, що $0 \le r < \frac{n}{n-2}$.
ρ_3) для деякої константи $C > 0$: $\rho'(s) \le C\rho(s),\ s \in R$.

Визначимо оператор $A' : W_0^{1,m}(\Omega) \supset D(A') \to [W_0^{1,m}(\Omega)]^*$

$$\langle A'u, \phi\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} \int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^\beta u D^\alpha \phi dx,\ a_{\alpha\beta}^{(0)}(x) = a_{\alpha\beta}(x,0) \tag{7}$$

$$D(A') = \{u \in W_0^{1,m} : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{m'}(\Omega)\},\ m' = \frac{m}{m-1},\ i = 1, ..., n. \tag{8}$$

Тут $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера при $|\alpha| = |\beta| = 1$ та дорівнює нулю в інших випадках. Введемо також оператор $\Gamma : W_0^{1,m}(\Omega) \supset D(\Gamma) \to [W_0^{1,m}(\Omega)]^*$

$$\langle \Gamma u, \phi\rangle = \gamma \int_\Omega u\phi dx \tag{9}$$

$$D(\Gamma) = \{u \in W_0^{1,m}(\Omega) : u \in L_{\frac{nm}{n(m-1)+m}}(\Omega)\}. \tag{10}$$

Для достатньо великого γ оператор $T_\Gamma = (A' + \Gamma)^{-1}\Gamma : D(\Gamma) \to W_0^{1,m}(\Omega)$ є визначеним. Розглянемо оператор $T : W_0^{1,m} \to W_0^{1,m}(\Omega)$, який діє за формулою $Tv = u$, де $v \in W_0^{1,m}(\Omega)$ та u є розв'язком у $W_0^{1,m}(\Omega)$ наступного рівняння

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^\beta u\} + \gamma u = \gamma v. \tag{11}$$

Такий оператор T є всюди визначеним та цілком неперервним. Ці властивості випливають з леми 5.1 роботи [3].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* a_1), a_2), ρ_1), ρ_2), ρ_3), $a_{\alpha\beta}^{(0)}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ *для* $|\alpha| = |\beta| = 1$ *та рівняння*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \{[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^\beta u\} = 0 \tag{12}$$

має лише нульовий розв'язок у $W_0^{1,2}(\Omega)$. *Тоді індекс критичної точки оператора* A *обчислюється за формулою* $Ind(A, 0) = (-1)^\nu$, *де* ν *сума кратностей характеристичних чисел задачі*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \{[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^\beta u\} + \lambda\gamma u = 0 \tag{13}$$

$$u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{14}$$

з інтервалу $(0, 1)$.

Зауваження 1. Число $\lambda_0 \in R^1$ є характеристичним числом задачі (13), (14), якщо існує розв'язок $u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ цієї задачі для $\lambda = \lambda_0$ такий, що $u_0(x) \neq 0$. Зрозуміло, що λ_0 є характеристичним числом задачі (13), (14) тоді й тільки тоді, коли $1 - \lambda_0$ є характеристичним числом оператора T, визначеного у (11). Тому будемо розуміти кратність характеристичного числа λ_0 задачі (13), (14) як кратність характеристичного числа $1 - \lambda_0$ оператора T.

Для доведення цієї теореми достатньо перевірити усі умови теореми про індекс критичної точки абстрактного оператора [1]. Нагадаємо ці умови.

X – дійсний сепарабельний рефлексивний банахів простір, для якого існує обмежений демінеперервний оператор $J : \overline{B_r(0)} \to X^*$, що задовольняє умову (S_+) для деякого $r > 0$, та $Ju \to 0$ при $u \to 0$. Також існує обмежений лінійний оператор $K : X \to X^*$ такий, що $\langle Kx, x\rangle > 0$ для $x \neq 0$.

Припустимо, що існує підпростір L простору X такий, що

$$L \subset D(A), \overline{L} = X. \tag{15}$$

Позначимо $F(L)$ множину усіх скінченновимірних підпросторів L. Оберемо послідовність підпросторів $\{F_j\}$, $j \in N$, таку що, для кожного $j \in N$,

$$F_j \in F(L),\ F_j \subset F_{j+1},\ \dim F_j = j,\ \overline{L\{F_j\}} = X, \tag{16}$$

де $L\{F_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$.

Введемо класи операторів, які будуть розглядатись у цьому розділі.

Будемо вважати, що оператор $A : X \supset D(A) \to X^*$ задовольняє умови:

A_1) існує підпростір L простору X, який задовольняє (15), що оператор A задовольняє умові $(S_+)_{0,L}$;

A_2) для довільного $F \in F(L), v \in L$ відображення $a(F, v) : F \to R$, визначене як $(a(F, v))(u) = \langle Au, v\rangle$ є неперервним.

За таких умов можна ввести ступінь відображення $deg(A, D, 0)$. Також має місце умова:

$$\langle Au, u - v\rangle \geq C_1(v),\ \forall u, v \in L,\ \|u\| \leq r_0. \tag{17}$$

Де $C_1(v) \geq 0$ залежить лише від v, а $r_0 > 0$ деяке досить мале число.

Нехай лінійний оператор $A' : X \supset D(A') \to X^*$, задовольняє умовам:

A') Рівняння $A'u = 0$ має лише нульовий розв'язок. Існує лінійний, взагалі необмежений, оператор $\Gamma : X \supset D(\Gamma) \to X^*$ такий, що $D(A') \subset D(\Gamma)$ та

$$\langle (A' + \Gamma)u, u\rangle > 0,\ u \in D(A'), u \neq 0 \tag{18}$$

$$\langle (A' + \Gamma)^* v, v\rangle > 0,\ v \in D((A')^*), v \neq 0 \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\langle A'u, u - w\rangle \geq -C(w), \langle (A' + \Gamma)u, u - w\rangle \geq -C(w),\\ u \in D(A') \cap B_\rho,\ w \in L,\end{gathered} \tag{20}$$

де $C(w)$ додатна константа, яка залежить лише від w, а ρ деяке достатньо мале число.

Будемо розглядати оператор $T_\Gamma = (A' + \Gamma)^{-1}\Gamma : X \supset D(\Gamma) \to X$, який є визначеним, до того ж існує лінійний цілком неперервний оператор $T : X \to X$, з яким він співпадає при $u \in D(\Gamma)$. Оператор $A' + q\Gamma$ задовольняє умову $(S_+)_L$ для довільного $q \in [0, 1]$.

Проблема лінеаризації оператора A розв'язується наступним чином.
ω) для оператора $\omega : D(A') \cap D(A) \to X^*$, визначеного $\omega(u) = Au - A'u$, маємо

$$\frac{\omega(u)}{\|u\|} \to 0, u \to 0, u \in Z_\varepsilon \tag{21}$$

для деякого $\varepsilon > 0$, де

$$Z_\varepsilon = \cup_{t\in[0,1]}\{u \in D(A') \cap D(A) : tAu + (1-t)A'u = 0, 0 < \|u\| \le \varepsilon\}. \tag{22}$$

Також необхідною є умова:
C) слабке замикання множини

$$\sigma_\varepsilon = \{v = \frac{u}{\|u\|} : u \in Z_\varepsilon\} \tag{23}$$

не містить нуля для достатньо малого $\varepsilon > 0$.

Введемо деякі підпростори просторів X, X^*, пов'язані з операторами $A' + \Gamma$, T, визначеними в умові A'). По-перше, визначимо два інваріантних підпростори цілком неперервного оператора $T : X \to X$. Позначимо через F пряму суму усіх інваріантних підпросторів оператора T, які відповідають характеристичним числам цього оператора з інтервалу (0,1). Нехай R буде замиканням прямої суми усіх інваріантних підпросторів оператора T, які не увійшли до F. Тоді F та R є інваріантними підпросторами оператора T та має місце пряма сума $X = F + R$.

Зрозуміло, що F є скінченновимірним підпростором X та $\dim F = \nu$, де ν – сума кратностей характеристичних чисел оператора T з інтервалу (0,1).

Введемо оператор проектування $\Pi : X \to F$

$$\Pi(f + r) = f, \quad \text{для} \quad f \in F, r \in R. \tag{24}$$

Теорема 2. *([1]) Нехай оператор $A : X \supset D(A) \to X^*$ задовольняє відповідні умови. Будемо вважати, що існує лінійний (можливо необмежений) оператор A' : $X \supset D(A') \to X^*$, який задовольняє умови A'), ω). Оператор $A + sA'$ задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$ для усіх $s > 0$. Нехай до того ж виконуються наступні умови:*

1) оператор $\Pi(A' + \Gamma)^{-1} : X^* \supset (A' + \Gamma)D(A') \to X$ обмежений, де оператори Π, Γ визначені у (24) та A').

2) виконується умова C).

Тоді нуль є ізольованою критичною точкою оператора A та його індекс дорівнює $(-1)^\nu$, де ν сума кратностей характеристичних чисел оператора T, які належать інтервалу (0,1).

2. Доведення теореми 1. Всі потрібні властивості простору X, при $X = W_0^{1,m}(\Omega)$ мають місце (див. [3]). Покажемо, що всі умови теореми 2 для операторів $A,\ A'$, визначених у (1) та (7), виконуються.

Лема 1 . *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді оператор $A+sA'$ задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$ для довільного $s \geq 0$.*

Доведення. Розглянемо послідовність $\{u_j\} \subset L,\ j = 1, 2, \dots$, яка задовольняє умову

$$u_j \rightharpoonup u_0,\ \limsup_{j\to\infty}\langle Au_j + sA'u_j, u_j\rangle \leq 0,\ \lim_{j\to\infty}\langle Au_j + sA'u_j, v\rangle = 0 \tag{25}$$

для деякого $u_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$ та довільного $v \in L$.

З першої нерівності випливає

$$\begin{gathered}\limsup_{j\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big[\rho^2(u_j)\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 + a_i(x, u_j, \frac{\partial u_j}{\partial x})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big]dx + \\ + \int_{\Omega} a_0(x, u_j, \frac{\partial u_j}{\partial x})u_j dx + s\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1}\int_{\Omega}[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)]D^{\beta}u_j D^{\alpha}u_j dx\Big) \leq 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Беручи до уваги умову a_2), отримаємо

$$\begin{gathered}\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}\rho^2(u_j)\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 dx + s\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 dx + \\ + \limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^m dx \leq C(\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}|u_j|^m dx + s\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}|u_j|^2 dx).\end{gathered} \tag{27}$$

Застосовуючи інтерполяційну нерівність:

$$\int\limits_{\Omega}|u_j|^2 dx \leq \delta^2\int\limits_{\Omega}|\nabla u_j|^2 dx + C_\delta\|u_j\|^2_{L_m(\Omega)} \tag{28}$$

та, обираючи належним чином δ, прийдемо до нерівності

$$\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}\rho^2(u_j)\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 dx + s\limsup_{j\to\infty}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 dx \leq K_1 \tag{29}$$

з деяким K_1, яке залежить лише від $\nu_1, \nu_2, m, n, \Omega, \|u_0\|_{W_0^{1,m}}$.

Таким чином, послідовність $\{u_j\}$ є обмеженою у $W_0^{1,2}(\Omega)$. Тоді існує $\overline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ така, що $u_j \rightharpoonup \overline{u}$ у $W_0^{1,2}(\Omega)$. За єдиністю слабкої границі маємо $\overline{u} = u_0$, тобто $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Введемо послідовність

$$\widetilde{u_j}(x) = \widetilde{\rho}(u_j(x)), \tag{30}$$

де

$$\widetilde{\rho}(u) = \int_0^u \rho(s)ds. \tag{31}$$

З (29) випливає обмеженість послідовності $\{\widetilde{u}_j\}$ в $W_0^{1,2}(\Omega)$. В силу рефлексивності простору, можна стверджувати, що $\widetilde{u}_j$ слабко збігається в $W_0^{1,2}(\Omega)$ та сильно в $L_p(\Omega)$, $p < \frac{2n}{n-2}$ до деякої функції $\widetilde{u}_0$. З цього отримаємо, що $\widetilde{u}_j$ збігається за мірою до $\widetilde{u}_0$ та $\widetilde{\rho}(u_0)$. Тому

$$\widetilde{u}_0(x) = \widetilde{\rho}(u_0(x)). \tag{32}$$

Беручи до уваги (29), можемо вважати, що

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega \rho^2(u_j)\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big|^2 dx = R, \tag{33}$$

де R деяке число. З (32), (33) та $\widetilde{u}_j \to \widetilde{u}_0$ в $W_0^{1,2}(\Omega)$ маємо

$$\int_\Omega \rho^2(u_0)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|^2 dx \le R. \tag{34}$$

Послідовність $\rho(u_j)$ обмежена в $L_{\overline{q}}(\Omega)$, $\overline{q} = \frac{2n}{n-2}\cdot\frac{1}{r} > 2$. Це випливає з (6) та обмеженості послідовності $\widetilde{u}_j$ в $L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. До того ж $\rho(u_j)$ збігається за мірою до $\rho(u_0)$. Тому маємо сильну збіжність $\rho(u_j)$ до $\rho(u_0)$ в $L_2(\Omega)$.

Враховуючи це, а також слабку збіжність послідовності $\{u_j\}$ до u_0 в $W_0^{1,2}(\Omega)$, перейдемо до границі у рівності (25) для фиксованої $v \in F_k$. При цьому можна вважати, що

$$a_i(x, u_j(x), \frac{\partial u_j(x)}{\partial x}) \rightharpoonup h_i(x) \in L_{m'}(\Omega) \tag{35}$$

для деяких функцій $h_i(x)$.

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big\{\rho^2(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + h_i(x)\Big\}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega h_0(x)v dx + \\ +s\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)]D^\beta u_0 D^\alpha v dx = 0.\end{gathered} \tag{36}$$

Наступна оцінка випливає з нерівності Гельдера

$$\int_\Omega \Big(\rho^2(u_0)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|\Big)^{q'} dx \le \Big\{\int_\Omega \rho^2(u_0)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|^2 dx\Big\}^{\frac{\overline{q}}{2+\overline{q}}} \cdot \Big\{\int_\Omega [\rho(u_0)]^{\overline{q}} dx\Big\}^{\frac{2}{2+\overline{q}}}, \tag{37}$$

де $\overline{q} = \frac{2n}{n-2}\cdot\frac{1}{r}$, а $q' = \frac{2\overline{q}}{2+\overline{q}}$.

Таким чином, функціонал $l \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^*$ з $q = \frac{q'}{q'-1}$, визначений як

$$\begin{gathered}l(\phi) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \rho^2(u_0)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}dx + \\ +s\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)]D^\beta u_0 D^\alpha \phi(x) dx,\end{gathered} \tag{38}$$

є неперервним.

З (36) отримаємо оцінку

$$|l(\phi)| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |h_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}| dx + \int_{\Omega} |h_0(x)\phi| dx, \tag{39}$$

яка виконується для будь-якої функції $\phi(x) \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Ми оцінимо праву частину, застосовуючи нерівність Гельдера та теорему вкладення

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |h_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}| dx + \int_{\Omega} |h_0(x)\phi| dx \le K_2, \tag{40}$$

де K_2 константа незалежна від ϕ, за умови, що

$$\phi \in W_0^{1,q}(\Omega),\ \|\phi\|_{W_0^{1,m}(\Omega)} = 1. \tag{41}$$

Таким чином, для довільної функції $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ маємо з (40) оцінку

$$|l(\phi)| \le K_2 \|\phi\|_{W_0^{1,m}(\Omega)}. \tag{42}$$

А це означає, що такий функціонал може бути продовженим до лінійного неперервного функціонала над простором $W_0^{1,m}(\Omega)$.

Позначимо продовження функціоналу l з (38) через $\widetilde{l} \in [W_0^{1,m}(\Omega)]^*$.

Нагадаємо, що оператор Лапласа $\Delta : W_0^{1,m'}(\Omega) \to [W_0^{1,m}(\Omega)]^*$ є гомеоморфізмом, значить, існує така функція $u' \in W_0^{1,m'}(\Omega)$, що

$$\widetilde{l}(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u'}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \tag{43}$$

для $\phi \in W_0^{1,m'}(\Omega)$.

Таким чином, для довільного $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \rho^2(u_0) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx + \\ &+ s \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} \int_{\Omega} [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^{\beta} u_0 D^{\alpha} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u'}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \tag{44}$$

Позначимо

$$u'' = \int_0^{u_0} \rho^2(s) ds. \tag{45}$$

Також існує деяке $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = s \sum_{|\alpha|,|\beta| \le 1} \int_{\Omega} [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)] D^{\beta} u_0 D^{\alpha} \phi(x) dx. \tag{46}$$

Перепишемо рівняння в наступному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial(u'' + w - u')}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{47}$$

З властивості оператора Лапласа випливає, що

$$u'' = u' - w \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{48}$$

Звідки маємо

$$\rho^2(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \in L_2(\Omega). \tag{49}$$

Для подальшого підвищення сумовності застосуємо ітераційну схему, яка схожа на метод Мозера. Враховуючи (49), можна вважати, що (44) має місце для довільного $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Підставимо в (44) пробну функцію

$$\phi(x) = \int_0^{u_0(x)} \rho^k(s) ds, \ k \geq 2. \tag{50}$$

Після стандартних розрахунків прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho^{k+2}(u_0) \Big| \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|^2 dx + \int_\Omega \rho^k(u_0) \Big| \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|^2 dx \leq \\ \leq c \sum_{|\alpha|+|\beta|<2} \int_\Omega \rho^k(u_0) \Big| D^\beta u_0 D^\alpha u_0 \Big| dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho^k(u_0) \frac{\partial u'}{\partial x_i} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \tag{51}$$

Застосовуючи інтерполяційну нерівність (28) та нерівність Коші з належним ε, отримаємо

$$\int_\Omega \rho^{k+2}(u_0) \Big| \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|^2 dx \leq c \int_\Omega \rho^k(u_0) dx. \tag{52}$$

З теореми вкладення випливає

$$\int_\Omega \rho^k(u_0) dx \leq c \cdot k^{\frac{2n}{n-2}} \Big(\int_\Omega \rho^{\frac{k(n-2)}{n}-2} (\rho')^2 \Big| \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|^2 dx + \int_\Omega \rho^{\frac{k(n-2)}{n}} dx \Big)^{\frac{n}{n-2}}. \tag{53}$$

Враховуючи нерівність (52) та ρ_3), отримаємо

$$\int_\Omega \rho^k(u_0) dx \leq c \cdot k^{\frac{2n}{n-2}} \Big(\int_\Omega \rho^{\frac{k(n-2)}{n}-2}(u_0) dx + \int_\Omega \rho^{\frac{k(n-2)}{n}}(u_0) dx \Big)^{\frac{n}{n-2}}. \tag{54}$$

Перепишемо останню нерівність у вигляді

$$J_k \leq c \cdot k^{\frac{2n}{n-2}} \big\{ J_{\overline{k}} \big\}^{\frac{n}{n-2}}, \tag{55}$$

де $J_k = \int_\Omega \rho^k(u_0)dx$, а $\overline{k} = \frac{k(n-2)}{n}$.
Покладемо у (55) $k = k_i$, де

$$k_i = \frac{2}{\theta^i}, \quad \theta = \frac{n-2}{n}, \ \overline{k} = k_{i-1}. \tag{56}$$

Застосовуючи послідовно нерівність (55), ми отримаємо

$$\{J_{k_i}\}^{\theta^i} \le c^{\sum\limits_{j=1}^{i}\theta^j} \cdot (k_i)^{\frac{2n}{n-2}\theta^i} \cdot (k_{i-1})^{\frac{2n}{n-2}\theta^{i-1}} \dots (k_1)^{\frac{2n}{n-2}} J_{k_0}. \tag{57}$$

Та з (56) маємо

$$\{J_{k_i}\}^{\theta^i} \le c^{\sum\limits_{j=1}^{i}\theta^j} \cdot \theta^{-\sum\limits_{j=0}^{i-1} j\cdot\theta^j\cdot\frac{2n}{n-2}} \cdot J_{k_0}. \tag{58}$$

Переходячи до границі при $i \to \infty$, та, враховуючи, що $\rho(u_0) \in L_2(\Omega)$, ми в результаті отримаємо оцінку

$$ess\sup \rho(u_0) \le C. \tag{59}$$

Далі, повторюючи міркування з леми 5.1 роботи [3], прийдемо до того, що

$$u_0 \in W_0^{1,m'}(\Omega),\ \rho^2(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \in L_{m'}(\Omega), \tag{60}$$

тобто $u_0 \in D(A + sA')$.

Зараз доведемо сильну збіжність послідовності u_j до u_0 у просторі $W_0^{1,m}(\Omega)$. Нехай $u_j^{(0)} \in L\{F_j\}$ послідовність, яка сильно збігається до u_0 в $W_0^{1,m}(\Omega)$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega [a_i(x,u_j,\frac{\partial u_j}{\partial x}) - a_i(x,u_j,\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x})]\frac{\partial(u_j - u_j^{(0)})}{\partial x_i}dx = \\ = \langle Au_j + sA'u_j, u_j\rangle - \int_\Omega \rho^2(u_j)|\frac{\partial u_j}{\partial x}|^2dx - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,u_j,\frac{\partial u_j}{\partial x})\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}dx- \\ -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,u_j,\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x})\frac{\partial(u_j - u_0^{(0)})}{\partial x_i}dx - \int_\Omega a_0(x,u_j,\frac{\partial u_j}{\partial x})u_jdx- \\ -s\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)]D^\beta u_j D^\alpha u_j dx.\end{gathered} \tag{61}$$

Зауважимо, що має місце нерівність

$$\begin{gathered}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)]D^\beta u_0 D^\alpha u_0 dx \le \\ \le \limsup_{j\to\infty}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)]D^\beta u_j D^\alpha u_j dx,\end{gathered} \tag{62}$$

бо інакше виконується

$$\limsup_{j\to\infty}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1}\int_\Omega[\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(0)}(x)]D^\beta u_j D^\alpha(u_j - u_0)dx < 0, \tag{63}$$

звідки стандартними міркуваннями отримаємо

$$\limsup_{j\to\infty} \|u_j - u_0\|_{W_0^{1,2}} < 0. \tag{64}$$

Таким чином, ми прийшли до протиріччя.

Переходячи до границі по $j \to \infty$, та беручи до уваги (25), (33), (34), (35) та (62), отримаємо

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [a_i(x, u_j, \frac{\partial u_j}{\partial x}) - a_i(x, u_j, \frac{\partial u_0}{\partial x})] \frac{\partial (u_j - u_0)}{\partial x_i} dx \le \\ \le - \int_\Omega \rho^2(u_0) |\frac{\partial u_0}{\partial x}|^2 dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega h_i(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx - \\ - \int_\Omega h_0(x) u_0 dx - s \sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} \int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)] D^\beta u_0 D^\alpha u_0 dx.\end{aligned} \tag{65}$$

Завдяки (60) рівність (36) має місце для довільних $v \in W_0^{1,m}(\Omega)$, тому ми приходимо до

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left\{\rho^2(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + h_i(x)\right\} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx + \int_\Omega h_0(x) u_0 dx + \\ + s \sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} \int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)] D^\beta u_0 D^\alpha u_0 dx = 0.\end{aligned} \tag{66}$$

Нарешті, маємо

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [a_i(x, u_j, \frac{\partial u_j}{\partial x}) - a_i(x, u_j, \frac{\partial u_0}{\partial x})] \frac{\partial (u_j - u_0)}{\partial x_i} dx \le 0. \tag{67}$$

Звідси, виходячи з доведення теореми 2.1 з [4], можливо показати, що:
1) послідовність $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ збігається до $\frac{\partial u_0}{\partial x_i}$ за мірою;
2)

$$\lim_{mesE\to 0} \sum_{i-1}^{n} \int_E |\frac{\partial u_j}{\partial x_i}|^p dx = 0, E \subset \Omega$$

рівномірно відносно j.

З 1) та 2) випливає сильна збіжність послідовності u_j до u_0. Залишилось лише довести, що $Au_0 = 0$.

З (25) та сильної збіжності $\{u_j\}$ до u_0 в $W_0^{1,m}(\Omega)$, переходячи до границі, маємо, що

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left\{\rho^2(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + a_i(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x})\right\} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}) v dx + \\ + s \sum_{|\alpha|,|\beta|\le 1} \int_\Omega [\rho^2(0)\delta_{\alpha\beta} + a^{(0)}_{\alpha\beta}(x)] D^\beta u_0 D^\alpha v dx = 0.\end{aligned} \tag{68}$$

Оскільки ця рівність виконується для будь-яких $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}_0(\Omega)$, то звідси випливає, що $Au_0 = 0$. Теорему доведено.

Перевірка інших умов теореми 2 з невеликими відмінностями повторює роботу [3]. Одним з ключових моментів, як і раніше, є допоміжний результат про регулярність розв'язків.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $a_1), a_2), \rho_1) - \rho_3)$ *та* $u_0 \in W^{1,m}_0(\Omega) \cap D(A') \cap D(A)$ *є розв'язком рівняння*

$$tAu + (1-t)A'u = 0 \tag{69}$$

із деяким $t \in [0,1]$, *де оператори* A, A' *визначені у (1) та (7).*
Тоді $u_0 \in W^{2,2}(\Omega) \cap C^{1,\delta}(\overline{\Omega})$ *для деякого* $\delta \in (0,1)$ *та має місце оцінка*

$$\|u_0\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u_0\|_{C^{1,\delta}(\overline{\Omega})} \leq M \tag{70}$$

із сталою M, *яка залежить лише від* $\nu_1, \nu_2, m, n, \Omega$ *и* $\|u_0\|_{W^{1,m}_0(\Omega)}$.

Зауважимо лише те, що доданок

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho^2(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx$$

при підстановці пробної функції стає додатним та його можна відкинути. А після встановлення оцінки $\max |u(x)| \leq C$, взагалі, подальшого впливу не має.

1. *Шраменко В.М.* Індекс критичної точки недиференційовного еліптичного оператора із сильним зростанням коефіцієнтів. Абстрактна теорема. – Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – вып.16. – 223-231с.
2. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V.* The index of a critical point for nonlinear elliptic operators with strong coefficient growth, J. Math. Soc. Japan **52** (2000). – P.109-137.
3. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V., Shramenko V.N.* The index of an isolated critical point for a class of non-differentiable elliptic operators in reflexive Banach spaces // J. Differential Equations. – 2005. – V.214. – P.189-231.
4. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач // М. – 1990.

Національний технічний ун-т України, Київ
`vshramenko@ukr.net`

Получено 10.06.08