УДК 539.3:622.83

©2008. **Н.С. Хапилова, В.В. Залётов, А.П. Шепеля**

ЭКСПРЕСС-МЕТОД ОЦЕНКИ ДЛИНЫ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

В работе на основе модели, учитывающей пластическое состояние среды в концевой области трещины, получено соотношение, связывающее длину трещины гидроразрыва с давлением жидкости в ее конце. Показано, что в частном случае, когда протяженность пластической зоны обращается в нуль, оно совпадает с известным условием С.А.Христиановича, которое используется при математическом моделировании процесса распространения трещины гидроразрыва в горном массиве. Предложен экспресс-метод оценки возможных длин трещины, основанный на геометрической интерпретации обобщенного условия. Исследовано влияние глубины, технологических параметров и деформационных свойств массива на изменение диапазона реальных значений длины трещины гидроразрыва, образованной из стенки газодобывающей скважины.

Для большинства горных пород критерий разрушения может быть записан в виде некоторого соотношения между компонентами тензора напряжений

$$T(\sigma_{ij}) = 0, \qquad i,j = x,y,z. \tag{1}$$

Как известно, свойство разрушаться хрупко или с заметной пластической деформацией не является абсолютным свойством материала. Эксперименты показывают, что при всестороннем сжатии такие хрупкие в обычных условиях материалы, как песчанник и мрамор, деформируются пластически и их разрушение происходит при большой пластической деформации. Отметим, что использование критерия (1) для исследования разрушения в пластической области некорректно, так как в этом случае существенную роль начинает играть величина пластической деформации, которая в соотношение (1) не входит.

Обычно считают, что при выполнении условия (1) хотя бы в одной точке происходит локальное разрушение в этой точке. Под локальным разрушением понимают либо разрыв некоторых структурных элементов, либо появление зародышевой трещины, которая распространяется далее как трещина Гриффитса [1, 2].

В модели трещины гидроразрыва, исследованной в работе [3], контур трещины в плоскости x, y нагружен симметричным относительно оси x давлением жидкости $p(x)$, закачиваемой в скважину и перемещающейся по трещине (рис. 1). Для решения плоской задачи теории упругости сформулируем граничные условия. На участке оси абсцисс $-l \le x \le l$ задано напряжение $\sigma_{yy}(x,0) = -p(x)$, вне этого отрезка вертикальные смещения равны нулю, касательные напряжения отсутствуют на всей оси. Переходя к комплексному потенциалу напряжений $\Phi(z)$ [4], запишем граничные условия для упругой полуплоскости в виде

$$Re\Phi(x) = \frac{1}{2}p(x), \qquad x \in [-l,l],$$

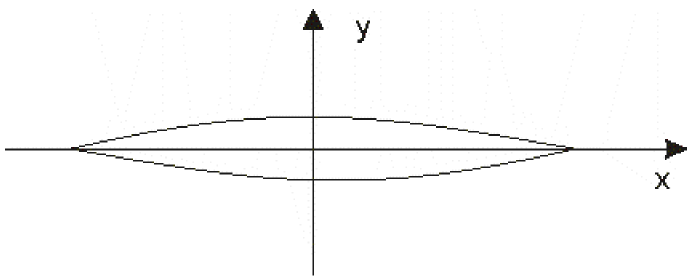

Рис. 1. Схема трещины

$$Im\Phi(x) = 0, \qquad \infty < x < -l, \qquad l < x < \infty. \tag{2}$$

Задача об определении аналитической функции комплексного переменного $z = x + iy$ при условии, что на отрезках $[a_k,b_k]$ границы $y = 0$ задана действительная часть функции, а на отрезках $[b_k,a_{k+1}]$ ее мнимая часть, решается с помощью формулы Келдыша–Седова [5], согласно которой в случае n разрезов с концами a_k, b_k имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)g(t)}{t-z}dt + \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1}}{\prod_1^n (z-b_k)^{\frac{1}{2}}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3}$$

где

$$g(z) = \prod_1^n \left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(x) = \begin{cases} Re\Phi(x), & x \in [a_k,b_k] \\ Im\Phi(x), & x \in [b_k,a_{k-1}) \end{cases} \tag{4}$$

В случае одной трещины $a_1 = -l$, $b_1 = l$, $f(x) = \frac{1}{2}p(x)$, $x \in [-l,l]$; $f(x) = 0$, $|x| > l$. Из формулы (3) находим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z+l}{z-l}} \int\limits_{-l}^{l} p(t)\sqrt{\frac{t-l}{t+l}}\frac{dt}{t-z} + \frac{\gamma_0}{\sqrt{z^2-l^2}}. \tag{5}$$

При $z \to \infty$ из (5) получим

$$\Phi(\infty) = -\frac{1}{2\pi i z} \int\limits_{-l}^{l} p(t)\sqrt{\frac{t-l}{t+l}}dt + \frac{\gamma_0}{z}. \tag{6}$$

Из условия $\Phi(\infty) = 0$ найдем постоянную γ_0

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-l}^{l} p(t)\sqrt{\frac{t-l}{t+l}}dt. \tag{7}$$

Запишем формулы Мусхелишвили, выражающие компоненты напряжений через комплексный потенциал

$$\sigma_x + \sigma_y = 4Re\Phi(z),$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -2(z - \bar{z})\Phi'(z). \tag{8}$$

Складывая равенства (8), найдем

$$\sigma_y = 2\lfloor Re\Phi(z) - yIm\Phi'(z)\rfloor. \tag{9}$$

На оси x из (9) получаем

$$\sigma_y|_{y=0} = 2Re\Phi(x). \tag{10}$$

Поведение напряжения σ_y в точке $x = l$ исследовано в работах по теории трещин [6, 7, 8]. В формуле (5) первое слагаемое при $z = l$ остается ограниченным, так как входящий в него интеграл является интегралом Коши [9] и его значение равно подынтегральной функции при $t = z$.

Исследуем второе слагаемое в формуле (5). Положим $z = l + \zeta$, где $\zeta \ll l$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - l^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2l\zeta}}.$$

Следовательно, сингулярная часть напряжения σ_y равна $\frac{2\gamma_0}{\sqrt{2l\zeta}}$. Учитывая (7), находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{l\pi}} \int\limits_{-l}^{l} p(t)\sqrt{\frac{l-t}{l+t}}dt. \tag{11}$$

В случае, когда $p(t)$ четная функция, формула (11) может быть преобразована к виду:

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \int\limits_{0}^{l} \frac{p(t)dt}{\sqrt{l^2 - t^2}}. \tag{12}$$

Условие плавного смыкания берегов трещины в ее концевой области впервые было сформулировано С.А.Христиановичем. Это условие в случае вертикальной трещины гидроразрыва в работе [3] представлено в очень простой форме

$$q_\infty = \frac{1}{2}(p_c + p_0), \tag{13}$$

где p_0 – давление жидкости в кончике трещины, p_c – давление на скважине, q_∞ – сжимающие усилия на бесконечности. Для вертикальной трещины ее берега сжимаются боковым давлением в массиве, то есть

$$q_\infty = \beta\gamma H, \tag{14}$$

где H – глубина, γ – удельный вес горных пород, β – коэффициент бокового распора. Таким образом, давление p_0 в модели трещины гидроразрыва [3] является функцией параметров p_c, γ, β, H. В соответствии с физическим смыслом задачи давление p_0 должно быть положительным и меньше p_c. Решив систему неравенств

$$p_0 = 2\beta\gamma H - p_c > 0,$$

$$p_0 < p_c,$$

получим

$$\beta\gamma H < p_c < 2\beta\gamma H.$$

Не удовлетворяющие этому ограничению значения давления на скважине p_c приведут к потере физического смысла исследуемой задачи, математическая постановка которой содержит условие (13). Формула (13) не учитывает прочностных свойств массива, а также длину трещины, которая в свою очередь, зависит от количества нагнетаемой жидкости и ее физических свойств. Поэтому ниже получим более точную и более обоснованную зависимость давления p_0 от входящих в задачу параметров.

Рассматриваем трещину гидроразрыва с пластической зоной в концевой области. В силу симметрии внешних усилий и усилий на контуре трещины ее берега симметричны относительно осей x, y. Правая концевая область трещины изображена на рис.2.

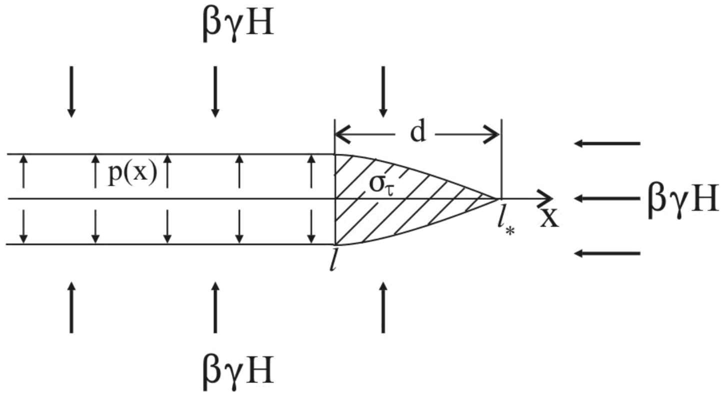

Рис. 2.

Пусть на участке $|x| < l$ контура трещины действует давление жидкости, поступающей из скважины (рис.2). При движении жидкости давление $P(x)$ уменьшается из-за трения на стенках трещины и фильтрации жидкости в породный массив от значения давления на скважине P_c до некоторой величины P_0 в сечении $x = l$. На участке $l < x < l_*$ породы находятся в пластическом состоянии, при этом нормальное напряжение σ_y, действующее на контур, постоянно и равно пределу текучести σ_τ. Используя формулу (12), найдем коэффициент интенсивности напряжений от усилий, действующих на контур трещины (давления жидкости и напряжений σ_τ в пластической зоне)

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l_*}{\pi}}\left[\int\limits_0^l P(t)\frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}} + \int\limits_l^{l_*}\sigma_\tau\frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}}\right]. \qquad (15)$$

В работе [3] показано, что при аппроксимации функции $P(x)$ параболой

$$P(x) = P_c - (P_c - P_0)\frac{x^2}{l^2} \qquad (16)$$

погрешность отличия численных значений истинного давления от приближенного невелика – менее 3%. Подставим давление, определяемое соотношением (16), в формулу (15)

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l_*}{\pi}}\left[P_c\int\limits_0^l \frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}} - \frac{P_c-P_0}{l^2}\int\limits_0^l \frac{t^2dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}} + \sigma_\tau\int\limits_l^{l_*}\frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}}\right]. \qquad (17)$$

Вычислим неопределенные интегралы

$$J = \int\frac{t^2dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}} = -\frac{1}{2}t\sqrt{l_*^2-t^2} + \frac{l_*^2}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}}, \qquad (18)$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{l_*^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{l_*} + const. \qquad (19)$$

С учетом (18), (19), найдем K_1 из формулы (17)

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l_*}{\pi}}\left[P_c\arcsin\frac{l}{l_*} - \frac{P_c-P_0}{l^2}\left(-\frac{l}{2}\sqrt{l_*^2-l^2} + \frac{l_*^2}{2}\arcsin\frac{l}{l_*}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma_\tau\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l}{l_*}\right)\right]. \qquad (20)$$

От сжимающих усилий на бесконечности КИН равен

$$K = \sigma_\infty\sqrt{\pi l_*} = -\beta\gamma H\sqrt{\pi l_*}. \qquad (21)$$

Приравнивая сумму K_1+K нулю, получим соотношение, связывающее неизвестные величины l, l_* и P_0:

$$P_c\arcsin\frac{l}{l_*} - \frac{P_c-P_0}{2}\left(\frac{l_*^2}{l^2}\arcsin\frac{l}{l_*} - \frac{\sqrt{l_*^2-l^2}}{l}\right) + \sigma_\tau\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l}{l_*}\right) =$$

$$= \beta\gamma H\frac{\pi}{2}. \qquad (22)$$

Обозначим

$$d = l_* - l. \tag{23}$$

С помощью (23) исключим l_* из уравнения (22)

$$P_c \arcsin\frac{l}{l+d} - \frac{P_c - P_0}{2}\left(\frac{(l+d)^2}{l^2}\arcsin\frac{l}{l+d} - \frac{\sqrt{(l+d)^2 - l^2}}{l}\right) +$$

$$+\sigma_\tau\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l}{l+d}\right) = \beta\gamma H\frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

При $d \to 0$ из соотношения (24) имеем

$$\frac{\pi}{2}P_c - \frac{\pi}{2}\frac{P_c - P_0}{2} = \frac{\pi}{2}\beta\gamma H,$$

откуда получаем условие С.А.Христиановича

$$P_c + P_0 = 2\beta\gamma H,$$

которое является частным случаем соотношения (24).

Для вычисления давления в концевой области трещины преобразуем формулу (24) к виду

$$P_0 = \frac{\beta\gamma H\pi - 2P_c \arcsin\frac{l}{l+d} - \sigma_\tau\left(\pi - 2\arcsin\frac{l}{l+d}\right)}{\frac{(l+d)^2}{l^2}\arcsin\frac{l}{l+d} - \frac{\sqrt{(l+d)^2 - l^2}}{l}} + P_c. \tag{25}$$

Запрограммированное на компьютере условие (25) позволяет осуществить **экспресс-прогноз** областей реальных значений длины трещины, создаваемой в массиве с заданными свойствами. Для этого необходимо построить пространственные кривые пересечения поверхности $P_0 = P_0(l,d)$, задаваемой соотношением (25), с плоскостями $P_0 = 0$ и $P_0 = P_c$ в трехмерной системе координат l, d, P_0.

На рис.3 изображена поверхность $P_0 = P_0(x,y)$; на оси абсцисс отложена длина трещины l, на оси ординат – протяженность пластической зоны d. График построен для случая, когда $H = 800$*м*, $\gamma H = 20$*МПа*, $\beta = 0.9$, $\sigma_\tau = 6$*МПа*.

Из расчетов следует, что на глубине 800м с ростом P_c от 20 МПа до 28 МПа давление P_0 уменьшается. На графиках реальными значениями P_0 будут те, которые расположены на поверхности $P_0 = P_0(x,y)$ ниже плоскостей $P_0 = P_c$, то есть слева от линий пересечения рассчитанных поверхностей с плоскостями $P_0 = P_c$. Уменьшение давления P_0 с ростом P_c приводит к тому, что на рис.3 все точки поверхности $P_0(x,y)$ лежат ниже плоскости $P_0 = 28$ *МПа*, и, кроме того, появляется область отрицательных значений P_0, которая должна быть отсечена плоскостью $P_0 = 0$.

На рис.4–6 приведены трёхмерные графики распределения давления $P_0 = P_0(l,d)$ при $H =$ *1200м* для давлений на скважине, равных *30 МПа*, *34 МПа*, *38 МПА*. На каждом из рисунков, кроме поверхности $P_0(x,y)$, построена плоскость $P_0 = P_c$ при

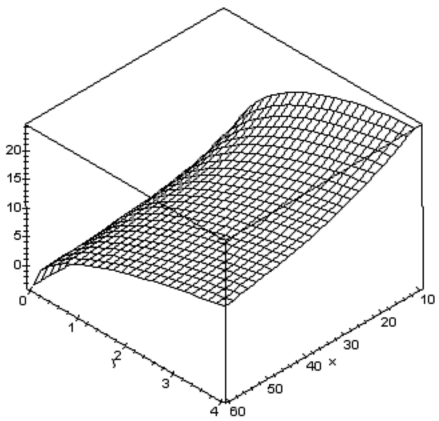

Рис. 3. Давление в концевой области трещины при $P_c = 24МПа$, $H = 800м$

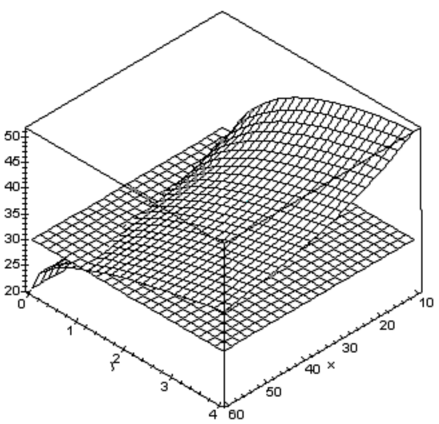

Рис. 4. Расчет области реальных значений длины трещины при $H = 1200м$, $P_c = 30МПа$

соответствующем значении давления на скважине. В изучаемых интервалах изменения l и d давление P_0 положительно, поэтому необходимости построения плоскости $P_0 = 0$ на этих рисунках нет. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $\gamma H = 30МПа$, $\beta = 0.9$, $\sigma_\tau = 6МПа$.

Как видно из рис.4–6, на больших глубинах сохраняется отмеченная выше закономерность, согласно которой с ростом давления на скважине значения P_0 уменьшаются, при этом кривая пересечения поверхности $P_0 = P_0(l,d)$ с плоскостью $P_0 = P_c$ перемещается вправо, а область реальных значений длины трещины на выбранном интервале изменения l от 10 м до 60 м – увеличивается.

Для исследования влияния глубины H сравним рисунки 4 и 3. Из рис.3 ($H = 800м$) видно, что вся поверхность лежит ниже плоскости $P_0 = P_c$, и только в небольшой области вблизи переднего левого угла поверхности, где d очень малы, наблю-

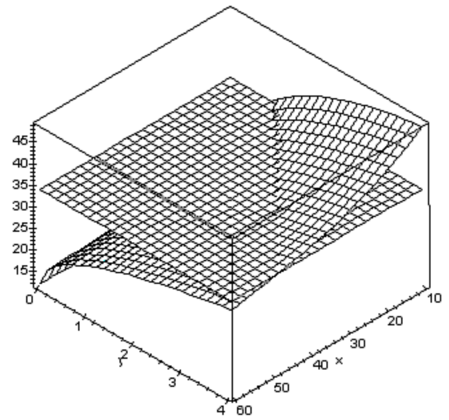

Рис. 5. Расчет области реальных значений длины трещины при $H = 1200м$, $P_c = 34МПа$

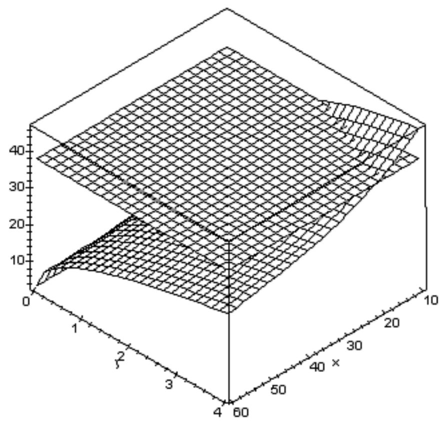

Рис. 6. Расчет области реальных значений длины трещины при $H = 1200м$, $P_c = 38МПа$

даются нереальные отрицательные значения P_0. При $H = 1200м$ (рис.4), хотя давление P_c увеличилось незначительно, картина полностью изменилась: практически вся поверхность лежит выше плоскости $P_0 = P_c$ за исключением небольшой области вблизи оси $y = 0$, проекция которой на плоскость x, y содержит реальные значения геометрических характеристик трещины.

Численные исследования показывают, что существенное влияние на длину трещины оказывают глубина H, коэффициент бокового распора β, а также свойства породы, характеризуемые пределом текучести σ_τ и протяженностью пластической зоны d. При известных значениях перечисленных характеристик оптимальный выбор P_c может быть осуществлен с помощью предложенного экспресс-метода, который базируется на геометрической интерпритации аналитической зависимости P_0 от длины трещины с помощью компьютерного построения трёхмерной поверхности давления $P_0 = P_0(l,d)$ в системе координат (l,d,P_0). Плоскости $P_0 = 0$, $P_0 = P_c$ отсекают на трёхмерной поверхности область, проекция которой на координатную плоскость l, d содержит реальные значения длины трещины при заданных свойствах массива.

Отметим, что границы изменения исследуемых значений l, d в экспресс-методе можно как увеличивать, так и уменьшать, исходя из реальной ситуации,связанной с технической возможностью реализации больших давлений на скважине, с выбором глубины H и планируемой длины создаваемой трещины.

1. *Griffith A.* The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A: V.221. – 1920. – P.163-198.
2. *Irwin G.* Fracture dynamics. In: "Fracturing of Metals", ASM, Cleveland. – 1948. – P.147-166.
3. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. – 1955. – №5. – С.3-41.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707с.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736с.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М: Наука, 1974.
7. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. – 1961. – №4. – С.3-56.
8. *Баренблатт Г.И.* Об условии конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости // ПММ. – 1960. – Т.XXIV, вып.2. – С.316-332.
9. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1966. – 387с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
khapilova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 30.09.08