УДК 519.7

©2008. **А.С. Сенченко, Н.Н. Рубан**

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В работе предлагается задание детерминированных инициальных графов с помощью определяющей пары, которая является аналогом системы определяющих соотношений для автомата. Найдена минимальная определяющая пара и предложена процедура перехода от произвольной определяющей пары к соответствующей ей минимальной.

Введение. Известно, что многие объекты дискретной математики и алгебры можно представить определяющими соотношениями. Так в 1882 году В.Фон Дик предложил задавать группы посредством порождающих элементов и определяющих соотношений [1]. Впоследствии было предложено аналогичное задание полугрупп.

В связи с таким заданием вышеперечисленных объектов возникли знаменитые проблемы Туэ-Дэна [2], самой сложной из которых является проблема изоморфизма: две полугруппы/группы заданы системой определяющих соотношений (СОС); необходимо найти алгоритм, позволяющий по СОС определить, изоморфны ли полугруппы/группы друг другу или нет.

В 1947 году была доказана неразрешимость проблем Туэ-Дэна: А.А.Марковым и Эм.Постом для полугрупп [3], а чуть позднее в 1955 году П.С.Новиков и У.Бун доказали неразрешимость для групп.

В 1961 Ю.И.Соркин в работе [4] сформулировал и предложил позитивное конструктивное решение проблем Туэ-Дэна для детерминированных всюдуопределенных автоматов. Тем самым была показана принципиальная возможность использования СОС для решения задач теории автоматов. В дальнейшем идеи Соркина обобщаются и используются для исследования проблем теории экспериментов с конечными автоматами и лабиринтами.

В частности, в работе [5] предложен частный случай решения проблемы изоморфизма всюдуопределенных автоматов без непосредственного построения автоматов по их системе определяющих соотношений, а в работе [6] аналогичным образом решена проблема для частичных автоматов.

В связи с определенной схожестью структуры графов и автоматов возникает идея распространить результаты А.С.Сенченко на графы. Наиболее схожи по структуре с автоматами, на наш взгляд, являются графы с детерминированной раскраской (детерминированные графы), впервые рассмотренные С.В.Сапуновым в [7].

1. Основные определения.

Определение. Под автоматом понимается конечный детерминированный инициальный, инициально-связный частичный автомат без выхода [8]. Будем считать, что $A = (A, X, \delta, a_0)$ – автомат, у которого A – конечное множество состояний, a_0 – начальное состояние, $\delta : A \times X \to A$ – функция переходов. Множество всех слов конечной длины в алфавите X обозначается X^*. Пусть $p = x_1 \dots x_k$ – произвольное слово в алфавите X. Слово $x_k \dots x_1$ будем обозначать через p^{-1}. Длина слова p обозначается $d(p)$ и $d(p) = k$. Пустое слово множества X^* обозначим через λ.

Одним из известных способов задания автоматов является его представление определяющими соотношениями, то есть такими парами слов (p, q), что $a_0 p$ и $a_0 q$ определяют одно и то же состояние. Множество таких определяющих соотношений, однозначно задающих автомат, называется его системой определяющих соотношений. Для частичных автоматов в работе [6] была введена модификация СОС, названная определяющей системой, которая состоит из двух компонент $\{\rho, M\}$. Первая ее компонента ρ, состоящая из таких пар слов (p, q), что $a_0 p$, $a_0 q$ определены и $a_0 p = a_0 q$ является аналогом СОС и однозначно задает базу [4] автомата. Вторая компонента M состоит из таких слов px $(x \in X)$, что $a_0 p$ определено, а $a_0 px$ не определено. Она однозначно выделяет автомат от других подобных ему по свободному расширению [4]. В работах [9], [5], [6] были решены задачи, связанные с представлением автоматов определяющими соотношениями: найдена минимальная СОС для автомата; найдено преобразование (редукция) СОС, позволяющее определить соответствует ли данная СОС данному автомату; соответствуют ли две данные СОС одному и тому же автомату. Для распространения этих результатов на схожие по структуре объекты с автоматами – детерминированные графы необходимо ввести на них аналог СОС.

Пусть $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ – конечный, простой неориентированный граф с отметками вершин, у которого G – множество вершин, E – множество ребер, C – множество отметок вершин, $\psi : G \to C$ – функция отметок, g_0 – инициальная вершина. Окрестностью вершины $O(g)$ называется вершина g вместе с множеством всех вершин, смежных с ней: $O(g) = \{g\} \cup E\{g\}$. Граф $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ называется детерминированным [7], если у любых двух различных вершин из любой окрестности отметки различны, то есть $\forall g \in G, \quad u, v \in O(g)$ из $u \neq v$ следует $\psi(u) \neq \psi(v)$. Путем в детерминированном графе $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ будем называть произвольную последовательность отметок вершин $p = \psi(g_1) \dots \psi(g_k)$, где $(g_i, g_{i+1}) \in E$, для всех $1 \leq i < k$. Если в окрестности вершин v нет вершины с отметкой c, то будем говорить, что путь по c из v не определен, в противном случае путь определен. В работе рассматриваются только связные графы.

Пусть $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ детерминированный граф. Удалим из G все висячие вершин, отличные от инициальной g_0. Будем повторять данную операцию до тех пор, пока это возможно. Получившийся граф назовем базой графа G. Опишем вершины, входящие в базу графа. База может состоять из одной инициальной вершины, если граф является деревом. Если же граф не дерево, то в базу входят только те вершины, через которые проходит некоторый простой цикл и вершины, через которые проходит простой путь от начальной вершины к некоторому простому циклу.

2. Определяющие слова для детерминированных графов. Пусть $\{S, L\}$ пара конечных множеств слов таких, что для любого слова p из множества S выполняется равенство $g_0 p = g_0$, а для любого слова $qc \in M$, где $c \in C$ путь $g_0 q$ определен, а путь $g_0 qc$ не определен. Рассмотрим процедуру построения графа по паре множеств $\{S, L\}$:

1) Строим циклы по словам множества S и в любом случае получаем граф с раскрашенными вершинами, причем детерминированность раскраски не обязательно выполняется.

2) Осуществляется детерминизация полученного графа путем отождествления вершин с одинаковой раскраской из каждой окрестности. Ввиду конечности множества S данная операция выполняется конечное число раз и результат однозначен.

3) К полученному графу, используя элементы множества L, добавляем необходимые "тупиковые" ветки, если таковые есть. При необходимости осуществляем повторную детерминизацию.

Пару $\{S, L\}$ назовем определяющей для детерминированного графа G, если она однозначно его задает. Определяющая пара является аналогом определяющей системы для частичных автоматов, рассмотренных в [6]. Проиллюстрируем ход выполнения вышеуказанной процедуры на следующем примере.

Пример 1.

Пусть $S = \{abcdba;\ abdcbcba\}$ и $L = \{ac;\ ad;\ abdcad;\ abcdab;\ abcab;\ abcdacb;\ abdacd\}$, тогда в ходе выполнения процедуры последовательно получаем графы, полученные на рисунке 1.

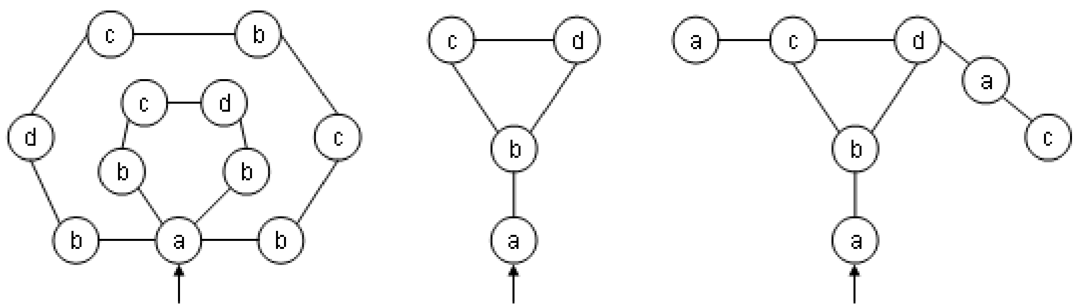

Рис. 1. Пример детерминизации графа

Детерминизацию можно осуществлять один раз, то есть шаг 2 выполнять после шага 3, но, на наш взгляд, лучше ее проводить после анализа каждого слова множеств S и L.

Не всякая пара множеств $\{S, L\}$ задает граф, потому что вершина соответствующая некоторому слову множества L, может быть не висячей. Приведем пример таких множеств S и L, которые не являются определяющими ни для какого графа.

Пример 2.

Пусть $S = \{abcdba;\ abdcbcba\}$ и $L = \{ac;\ ad;\ abdcad;\ abcdab;\ abcab;\ abcdacb;\ abdacd;\ abdaba\}$, тогда шаги 1 и 2 приведут к аналогичному результату, первые семь слов множества L строят граф такой же, как и в предыдущем примере, а вершина, соответствующая последнему слову (она выделена на рисунке 2) – не содержит в своей окрестности вершины с меткой b, поскольку в L содержится слово $abcdab$, а

$abcda$ является путем к выделенной вершине.

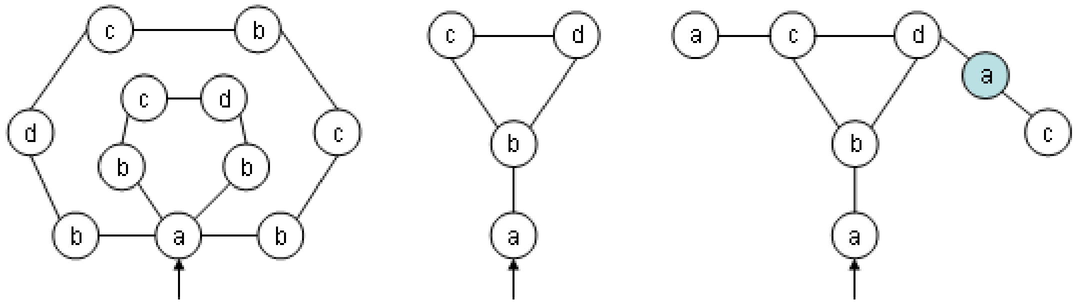

Рис. 2. Этапы построения графа по паре $\{S, L\}$

В дальнейшем предполагается формализировать условия для множеств S и L, для которых пара $\{S, L\}$ является определяющими словами для некоторого детерминированного графа.

3. Построение по графу его определяющей пары. Покажем, что каждый детерминированный граф имеет хотя бы одну определяющую пару.

Пусть $C = \{c_1, ..., c_m\}$ и $c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_m$ – произвольно зафиксированный линейный порядок P на C. Введем линейный порядок $\le$ на множестве C^* всех слов в алфавите C таким образом:

1) $c_i \le c_i$; 2) если $d(p) < d(q)$, то $p \le q$; 3) $c'_1 \ldots c'_s = p \le q = c''_1 \ldots c''_s$, если $c'_k \le c''_k$ для некоторого $k \le s$, в то время как $c'_1 = c''_1, \ldots, c'_{k-1} = c''_{k-1}$.

Другими словами слово меньшей длины предшествует слову большей длины, а слова одинаковой длины сравниваются в соответствии с лексикографическим порядком (по алфавиту). Очевидно, что порядок $\le$ на C^* однозначно определяется некоторым порядком P на C.

Каждую вершину графа G именуем кратчайшим по введенному порядку $\le$ словом, соответствующим ей, то есть строим кратчайший по порядку $\le$ базис достижимости. Полученное множество имен вершин обозначим через V_G. Заметим, что в силу минимальности имен вершин любой начальный отрезок любого слова из V_G тоже принадлежит базису достижимости V_G.

Для всех слов $p = p_1c'c \in V_G$ и всех отметок c_1, отличных от c и c', если путь $p_1c'cc_1$ определен и соответствует вершине с именем $q = q_1c_1$ и $p_1c'cc_1 \ne q_1c_1$, то циклическое слово $p_1c'cc_1q_1^{-1}$ помещаем в множество Σ_1. Если же соответствующий путь $p_1c'cc_1$ не определен, то слово $p_1c'cc_1$ помещаем в множество Λ_G. Затем в множестве Σ_1 из всех пар обратных слов p и p^{-1} оставляем одно кратчайшее по порядку $\le$, а другое исключаем. Получившееся множество обозначим через Σ_G. Заметим, что если слово p принадлежит Σ_G, то для любого его начального отрезка p_1 вершина, соответствующая слову p_1 содержится в базе графа G.

Теорема 1. *Пара $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ является определяющей для графа G.*

Доказательство. По паре $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ построим детерминированный граф G'. Покажем, что графы G и G' изоморфны.

Пусть вершина g с именем p принадлежит базе графа G. Тогда по построению Σ_G в нем существует такое слово q, для которого p или p^{-1} является начальным отрезком. Поэтому g принадлежит базе графа G' и имя вершины g есть слово p.

Пусть вершина g принадлежит базе графа G'. Тогда либо через эту вершину проходит некоторый простой цикл, либо через нее проходит путь к некоторому простому циклу. Рассмотрим первый случай: пусть V'_G – базис достижимости графа G' и $p \in V'_G$ – имя вершины g в этом базисе. Тогда существует такое слово q, что $g_0p = g_0pq$. Поскольку $pq \notin V'_G$, то существует такой начальный отрезок wc слова pq, что $w \in V'_G$, а $wc \notin V'_G$. Пусть r – такое слово из базиса V'_G, что $g_0r = g_0wc$. Тогда по построению Σ_G меньшее из слов $wc(r)^{-1}$ и $r(wc)^{-1}$ по порядку $\leq$ принадлежит Σ_G, следовательно, g принадлежит базе графа G и имя вершины g есть слово p.

Рассмотрим второй случай. Пусть p – имя вершины g в базисе V'_G. Тогда существуют такие слова q и z, что $pz \in V'_G$ и $g_0pz = g_0pzq$. Поскольку $pzq \notin V'_G$, то существует такой начальный отрезок wc слова pzq, что $w \in V'_G$, а $wc \notin V'_G$. Пусть r – такое слово из базиса V'_G, что $g_0r = g_0wc$. Тогда, так же как и в первом случае, по построению Σ_G меньшее из слов $wc(r)^{-1}$ и $r(wc)^{-1}$ по порядку $\leq$ принадлежит Σ_G, следовательно, g принадлежит базе графа G и имя вершины g есть слово p. Таким образом доказано, что базы графов G и G' совпадают.

Пусть теперь вершина g графа G не принадлежит его базе и пусть $p \in V_G$ – имя вершины g. Тогда из конечности графа G следует, что существует такое слово q, что $pq \in \Lambda_G$, поэтому вершина g с именем p принадлежит графу G' и не находится в его базе. Обратно, пусть вершина g графа G' не принадлежит его базе и $p \in V'_G$ – имя вершины g. Тогда по построению графа G' существует такое слово q, что $pq \in \Lambda_G$, следовательно, вершина g с именем p принадлежит графу G и не находится в его базе. Таким образом показано, что графы G и G' изоморфны. $\square$

Определяющую пару $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ назовем канонической для G. Из минимальности длин слов из базиса достижимости V_G и минимальности циклических слов базиса достижимости Σ_G вытекает

Следствие 1. *Каноническая определяющая пара $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ является минимальной по длине слов определяющей парой для графа G.*

Пример 3.

Для заданного на рисунке 3 графа канонической определяющей парой являются $\Sigma_G = \{abcdba\}$ и $\Lambda_G = \{ac; ad; abcab; abcad; abdab; abdacb; abdacd\}$.

4. Редукция определяющей пары. В работах [6], [9] для частичных автоматов была решена задача характеризации определяющей системы для автомата. Задача заключается в следующем: по заданной конечной системе $\{\rho, M\}$ и заданному автомату A определить, является ли система $\{\rho, M\}$ определяющей для A. Эта задача решена без построения автомата по $\{\rho, M\}$ с дальнейшим его сравнением с исходным автоматом, а с помощью преобразования (редукции) системы $\{\rho, M\}$ и дальнейшим сравнением результата редукции с канонической определяющей системой автомата A.

Рассмотрим решение этой задачи для детерминированных графов. Для этого нам

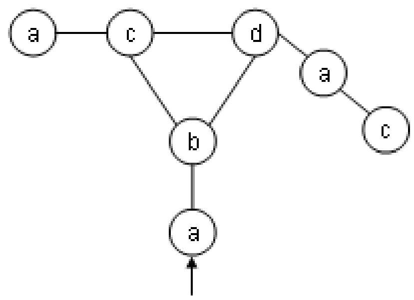

Рис. 3. Детерминированный граф, для которого построена каноническая определяющая пара

необходимо модифицировать операции редукции к детерминированным графам.

Пусть $\{S, L\}$ – определяющая пара для некоторого детерминированного графа G и пусть $p = p_1xp_2$ – некоторое слово из множества S. Введем понятие разрыва слова p: если $p_1x \leq p_2^{-1}x$ по введенному выше порядку $\leq$, то разрывом слова p будет пара слов $(p_1x, p_2^{-1}x)$; в противном случае разрывом p будет пара $(p_2^{-1}x, p_1x)$.

На множестве слов из обоих компонент пары $\{S, L\}$ введем такие операции:

1) Пусть $p_1x_ix_jx_ip_2$ – некоторое слово любого из множеств S и L. Это слово заменим словом $p_1x_jp_2$.

2) Пусть $p \in S$ и $p^{-1} \leq p$, тогда слово p заменяем словом p^{-1}.

3) Пусть (p_1x, p_2x) – некоторый разрыв слова $p \in S$, тогда в множестве S слово p_2xq заменим словом p_1xq, слово qxp_2^{-1} заменим словом qxp_1^{-1}, а в множестве L слово p_2xq заменим на p_1xq.

4) Удалим из S и L повторяющиеся слова, оставляя по одному экземпляру.

Операции выполняются в циклическом порядке до тех пор, пока это возможно. Результат редукции обозначим через $< S, L >$. Поскольку все операции не увеличивают количество и длину слов, и множества конечны, то процедура редукции завершается после выполнения конечного числа шагов.

Эти операции являются модификацией операций редукции определяющей системы ρ, M для частичных автоматов [6]:

1$'$) Из ρ удаляются пары вида (p, p).

2$'$) В ρ каждая пара слов (p, q) заменяется парой (q, p) в случае, когда $q \leq p$.

3$'$) Пусть (p_1, p_2) – некоторая пара из ρ. Тогда в ρ каждая пара вида (p_2t, w) заменяется на пару (p_1t, w), а каждая пара вида (w, p_2t) заменяется парой (w, p_1t). В множестве M каждое слово p_2t заменяется словом p_1t.

4$'$) Из ρ и M удаляются повторяющиеся элементы (пары и слова соответственно), оставляя по одному экземпляру.

Несложно увидеть, что операции редукции для частичных автоматов (2$'$), (3$'$), (4$'$) полностью соответствуют аналогичным операциям редукции детерминированных графов, а выполнение операции (1$'$) равносильно многократному выполнению операции (1) конечное число раз.

Теорема 2. *Пара* $\{S, L\}$ *является определяющей для детерминированного графа* G *тогда и только тогда, когда* $< S, L >= \{\Sigma_G, \Lambda_G\}$.

Доказательство. Пусть $< S, L >= \{\Sigma_G, \Lambda_G\}$, т.е. пара $< S, L >$ была преобразована в $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ посредством применения конечного числа операция редукций пары. Поэтому, исходя из того, что $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ определяющая пара для G, то и $< S, L >$ также определяющая для G, так как применение любой из операций редукции к паре не изменяет детерминированного графа, для которого пара является определяющей. Таким образом, необходимость утверждения доказана.

Покажем достаточность утверждения. Пусть S, L – определяющая пара для детерминированного графа G. Покажем, что $< S, L >= \{\Sigma_G, \Lambda_G\}$. Каждому детерминированному графу $G = (G, E, C, \psi, g_0)$ однозначно соответствует некоторый частичный автомат $A(G) = (G, C, \delta_A, g_0)$, у которого функция переходов δ_A однозначно строится по множествам G, E и ψ таким образом: для всех ребер $(g_1, g_2) \in E$, у которых $\psi(g_1) = c_1$ и $\psi(g_2) = c_2$, $\delta_A(g_1, c_2) = g_2$ и $\delta_A(g_2, c_1) = g_1$. Если $\psi(g') = c'$, то $\delta_A(g', c') = g'$. Если же в окрестности вершины g нет ни одной вершины с меткой c, то переход $\delta_A(g, c)$ не определен.

Полученный таким образом частичный автомат своей структурой будет очень схожим на исходный детерминированный граф: у автомата те же состояния, что и вершины графа, а каждому ребру графа соответствует в автомате два перехода. Кроме того, в автомате добавлены петли в каждом состоянии. Нам необходимо описать все эти переходы, используя тот факт, что пара $\{S, L\}$ является определяющей для графа G. Для этого выполним такие преобразования пары $\{S, L\}$ в два множества ρ и M, причем ρ – множество пар слов в алфавите C, а M – множество слов в алфавите C. Каждое слово p множества S имеет вид $p = p'qp'$, причем $p', q \neq \lambda$. При этом длина слова q либо 1, либо больше одного, причем во втором случае первая и последняя буквы слова q различны.

Пусть $d(q) = 1$ и $p = c_1c_2 \dots c_kqc_k \dots c_2c_1$, тогда в ρ поместим пары $(c_1, c_1c_2c_1)$, $(c_1c_2, c_1c_2c_3c_2)$, ..., $(c_1c_2 \dots c_k, c_1c_2 \dots c_kqc_k)$. Кроме того, в ρ поместим пары, описывающие петли автомата $A(G)$: (c_1, c_1c_1), $(c_1c_2, c_1c_2c_2)$, ..., $(c_1c_2 \dots c_kq, c_1c_2 \dots c_kqq)$.

Пусть длина слова q есть четное число (т.е. $d(q) = 2w$, $p = c_1c_2 \dots c_kc'_1c'_2 \dots c'_{2w-1}c'_{2w}c_k \dots c_2c_1$). Тогда, как и в предыдущем случае, в ρ поместим пары $(c_1, c_1c_2c_1)$, $(c_1c_2, c_1c_2c_3c_2)$, ..., $(c_1c_2 \dots c_{k-1}, c_1c_2 \dots c_{k-1}c_kc_{k-1})$; пары $(c_1c_2 \dots c_k, c_1c_2 \dots c_kc'_1c_k)$, $(c_1c_2 \dots c_kc'_1, c_1c_2 \dots c_kc'_1c'_2c'_1)$, ..., $(c_1 \dots c_kc'_1 \dots c'_{w-1}, c_1 \dots c_kc'_1 \dots c'_{w-1}c'_wc'_{w-1})$; пары $(c_1 \dots c_k, c_1 \dots c_kc'_{2w}c_k)$, $(c_1 \dots c_kc'_{2w}, c_1 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1}c'_{2w})$, ..., $(c_1 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+2}, c_1 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+2}c'_{w+1}c'_{w+2})$ и, кроме того, две такие "особые" пары $(c_1 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+2}c'_{w+1}, c_1 \dots c_kc'_1c'_2 \dots c'_wc'_{w+1})$ и $(c_1 \dots c_kc'_1c'_2 \dots c'_{w-1}c'_w, c_1 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+1}c'_w)$. После этого, как и в первом случае, в ρ добавляем пары, описывающие петли автомата $A(G)$: (c_1, c_1c_1), $(c_1c_2, c_1c_2c_2)$, ..., $(c_1c_2 \dots c_k, c_1c_2 \dots c_kc_k)$, $(c_1c_2 \dots c_kc'_1, c_1c_2 \dots c_kc'_1c'_1)$, ... ,$(c_1c_2 \dots c_kc'_1 \dots c'_{w-1}c'_w, c_1c_2 \dots c_kc'_1 \dots c'_{w-1}c'_wc'_w)$, $(c_1c_2 \dots c_kc'_{2w}, c_1c_2 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w})$, ..., $(c_1c_2 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+1}, c_1c_2 \dots c_kc'_{2w}c'_{2w-1} \dots c'_{w+1}c'_{w+1})$. Если же длина слова q число нечётное (т.е. $d(q) = 2w+1$, $p = c_1c_2 \dots c_kc'_1c'_2 \dots c'_{2w}c'_{2w+1}c_k \dots c_2c_1$), то вместо двух "особых" пар пишем одну такую пару $(c_1 \dots c_kc'_1c'_2 \dots c'_wc'_{w+1},$

$c_1 \dots c_k c'_{2w+1} c'_{2w} \dots c'_{w+2} c'_{w+1}$), а остальные пары записываем так же, как и в предыдущем случае.

Каждое слово $p = c_1 \dots c_{k-1} c_k z$ множества L помещаем в множество M и, кроме того, как и в первом случае, в ρ добавляем пары $(c_1, c_1c_2c_1)$, $(c_1c_2, c_1c_2c_3c_2)$, $\dots$, $(c_1c_2 \dots c_{k-1}, c_1c_2 \dots c_{k-1}c_kc_{k-1})$ и пары, описывающие петли автомата $A(G)$: (c_1, c_1c_1), $(c_1c_2, c_1c_2c_2)$, $\dots$, $(c_1c_2 \dots c_k, c_1c_2 \dots c_kc_k)$.

После этого из всех слов множества M и всех слов во всех парах множества ρ удалим начальный символ c_1.

Объясним выполненные преобразования. Каждому слову множества S описываем некоторый маршрут в графе G. Каждому ребру из этого маршрута соответствует два перехода $\delta_A(G)$. Все эти переходы мы описываем парами $(c_1 \dots c_i$, $c_1 \dots c_i c_{i+1} c_i)$. Кроме того, если в графе G существует хоть один простой цикл, он должен быть описан некоторыми словами множества S (вершины этого цикла имеют отметки со штрихами, а концевая вершина имеет отметку c_k). Тогда для описания этого цикла в $A(G)$ необходимо "соединить" ветви цикла в вершине, противоположной концевой (их одна или две, в зависимости от четности длины цикла). Это происходит процессом добавления названных нами "особых" пар. Каждая неопределенность функции переходов $A(G)$ однозначно соответствует некоторому слову из множества L. Таким образом, мы полностью описываем поведение функции переходов $A(G)$ и значит ρ, M – однозначно задает автомат $A(G)$, то есть является его определяющей системой [6].

Рассмотрев правила построения канонической определяющей пары $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$ для графа G и канонической определяющей системы $\{\kappa_{A(G)}, K_{A(G)}\}$ для автомата $A(G)$, несложно убедиться, что в результате выполнения показанного выше преобразования к $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$, получим систему $\{\chi, H\}$, отличающуюся от $\{\kappa_{A(G)}, K_{A(G)}\}$ возможными повторами одинаковых пар (в χ) или слов (в H).

В [6] показано, что результат редукции $<\rho, M> = \{\kappa_{A(G)}, K_{A(G)}\}$, поэтому $<S, L> = \{\Sigma_G, \Lambda_G\}$. $\square$

Проиллюстрируем результат выполнения процедуры редукции детерминированного графа на следующем примере.

Пример 4. Выполним редукцию пары $\{S, L\}$ из примера 1.

$$
\begin{array}{ll}
S: & abcdba \\
 & abcdba \xrightarrow{(1)} abdcba \xrightarrow{(2)} abcdba \xrightarrow{(4)} \quad \text{удаляем} \\
L: & ac \\
 & ad \\
 & abdcad \overset{(3;\, abdc \to abc)}{\longrightarrow} abcad \\
 & abcdab \overset{(3;\, abcd \to abd)}{\longrightarrow} abdab \\
 & abcab \\
 & abcdacb \overset{(3;\, abcd \to abd)}{\longrightarrow} abdab \\
 & abdacd
\end{array}
$$

Получили, что результат редукции пары $\{S, L\}$ совпадает с канонической определяющей парой $\{\Sigma_G, \Lambda_G\}$.

На рисунке 4 изображен автомат $A(G)$, построенный по паре $\{S, L\}$. Выполним преобразование пары $\{S, L\}$ в множества ρ и M, как в доказательстве теоремы 2.

ρ : $\{(\lambda, ba), (b, bcb), (b, bdb), (bd, bcd), (bc, bdc), (\lambda, a), (b, bb), (bc, bcc), (bd, bdd),$ $(bd, bdcd), (bc, bcbc), (bcb, bdcb), (bdc, bcbc), (bdc, bdcc), (bcb, bcbb), (bdc, bdcac),$ $(bdca, bdcaa), (bc, bcdc), (bcd, bcdad), (bcd, bcdd), (bcda, bcdaa), (bca, bcaa),$ $(bcdac, bcdacc), (bcda, bcdaca), (bda, bdaa), (bdac, bdacc), (bda, bdaca)\}$

M : $\{c, d, bdcad, bcdab, bcab, bcdacb, bdacd\}$

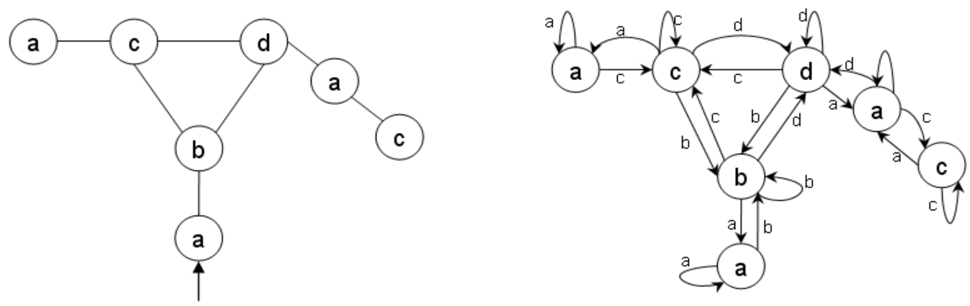

Рис. 4. Иллюстрация к доказательству теоремы 2

Проведя редукцию системы ρ, M получаем такие результаты:

$<\rho>$: $\{(\lambda, ba), (b, bcb), (b, bdb), (bd, bcd), (bc, bdc), (\lambda, a), (b, bb), (bc, bcc), (bd, bdd),$ $(bc, dcac), (bd, bdad), (bca, bcaa), (bda, bdaa), (bdac, bdacc), (bda, bdaca)\}$

$<M>$: $\{c, d, bcad, bdab, bcab, bdacb, bdacd\}$,

что совпадает с канонической определяющей системой автомата $A(G)$.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе предложено представление детерминированных графов определяющей парой, которая является аналогом системы определяющих соотношений. Найдены процедура построения графа по его определяющей паре, процедура построения минимальной (канонической) определяющей пары для графа и процедура преобразования произвольной определяющей пары графа к канонической. Полученные результаты являются распространением соответствующих задач теории автоматов на графы и могут быть использованы при проведении диагностических и контрольных экспериментов с детерминированными графами.

1. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп. – М.: Мир, 1985. – 255с.
2. *Адян С.И., Дурнев В.Г.* Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи математических наук. – 2000. – т.55, вып.2. – С.3-94.
3. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 440с.
4. *Соркин Ю.И.* Теория определяющих соотношений для автоматов // Проблемы кибернетики. – 1961. – вып.9. – С.45-69.
5. *Грунский И.С., Сенченко А.С.* Каноническая система определяющих соотношений для автоматов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – вып.7. – С.58-63.
6. *Сенченко А.С.* Свойства определяющих систем для частичных автоматов // Труды ИПММ

НАН Украины. – 2003. – вып.8. – С.111-119.
7. *Сапунов С.В.* Эквивалентность отмеченных графов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – вып.7. – С.162-167.
8. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука, 1997. – 368с.
9. *Сенченко А.С.* Представление автоматов определяющими соотношениями их поведения: Дис. …канд. физ.–мат. наук / К. Институт кибернетики им. В.М.Глушкова, 2005.

Славянский государственный педагогический ун-т
rubannn@gmail.com, senchenko@pisem.net

Получено 01.11.08