ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2008. Том 17

УДК 517.547.7

©2008. **Е.В. Нейман**

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РУШЕ В ОБОБЩЕННОМ КЛАССЕ СМИРНОВА

В работе вводится в рассмотрение обобщенный класс Смирнова. Для матриц-функций из этого класса даны определения нулевой и полюсной кратности, так что аналог теоремы Руше остается в силе. Доказательство основывается на обобщенной теореме Руше для матриц-функций класса Смирнова, полученной М.Г.Крейном и Г.Лангером в 1981г.

Введение. Пусть F и G голоморфные в замкнутом единичном круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ функции, такие что $|F(\lambda)| > |G(\lambda)|$, для всех $\lambda \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 1\}$. Известная теорема Руше [11] утверждает, что функции F и $F+G$ имеют одинаковое число нулей в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$.

Некоторые обобщения теоремы Руше на голоморфные матричнозначные функции получены в [3] и [5]. Пусть $H_p^{n\times n}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ – это классы Харди матриц-функций порядка $n \times n$ (см. [10]). Напомним, что $n \times n$ матриц-функция ψ из класса $H_\infty^{n\times n}$ (см. [2], т. е. ограниченная в $\mathbb{D}$) называется *внешней*, если $\psi H_2^{n\times n}(\mathbb{D})$ плотно в $H_2^{n\times n}(\mathbb{D})$, $n \times n$ матриц-функция $\varphi(\lambda)$ называется *внутренней*, если

$$\varphi(\zeta)^*\varphi(\zeta) = I_n \ (\zeta \in \mathbb{T}).$$

Как известно ([8]), всякая матриц-функция F из класса $H_\infty^{n\times n}(\mathbb{D})$ допускает факторизацию

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)$ – внутренняя, а $\psi(\lambda)$ – внешняя матриц-функция. Матриц-функцию F, голоморфную в $\mathbb{D}$, относят к *классу Смирнова* $\mathcal{D}^{n\times n}$, если она представима в виде

$$F(\lambda) = y(\lambda)^{-1}F_0(\lambda),$$

где $F_0 \in H_\infty^{n\times n}$, а y – это скалярная внешняя функция.

Крейном и Лангером в [5] получено следующее обобщение теоремы Руше:

Теорема 1. (Крейн-Лангер) *Пусть* $F, G \in \mathcal{D}^{n\times n}$, $\det(F(\lambda) + G(\lambda)) \not\equiv 0$ *(в* $\mathbb{D}$*) и* $||G(\lambda) \cdot F(\lambda)^{-1}|| \leq 1$ *(п.в. на* $\mathbb{T}$*). Если* F *имеет внутренний фактор степени* κ_F $(< \infty)$*, то* $F + G$ *имеет внутренний фактор степени* $\kappa_{F+G} \leq \kappa_F$*. Если к тому же* $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$*, то* $\kappa_{F+G} = \kappa_F$*.*

Другое обобщение теоремы Руше на матриц-функции, мероморфные в $\mathbb{D}$ и имеющие конечную суммарную полюсную кратность в $\mathbb{D}$, получено в [3]. В этой же работе введены понятия нулевой и полюсной кратности для мероморфных матриц-функций (см. также [6], [7]). Это определение становится уже не тривиальным, если нули матриц-функции F совпадают с ее полюсами. Например, матриц-функция $F(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\lambda & 1 \end{pmatrix}$ имеет и ноль, и полюс в точке 0, так как $F(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

В настоящей работе вводится в рассмотрение обобщенный класс Смирнова $\mathcal{D}_\kappa^{n\times n}$ и для матриц-функций этого класса вводятся понятия нулевой и полюсной кратности. В работе получено обобщение результата Крейна-Лангера на класс $\mathcal{D}_\kappa^{n\times n}$, содержащий в себе как матриц-функции класса Смирнова, так и конечномероморфные функции, фигурирующие в теореме Гохберга-Сигала [3, Теорема 2.2].

1. Основные понятия и результаты. Как известно [2], нули α_j $(j \le N \le \infty)$ скалярной функции $F \in H_\infty$, занумерованные с учетом кратности, удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=1}^{N}\bigl(1-|\alpha_j|\bigr) < \infty$, а сама функция F допускает факторизацию

$$F(\lambda) = b(L)F_0(\lambda), \quad b(L) = \prod_{1}^{N} b_{\alpha_j}(\lambda),$$

где $b_{\alpha_j}(\lambda) = \frac{\alpha_j}{\overline{\alpha_j}}\frac{\lambda-\alpha_j}{1-\lambda\overline{\alpha_j}}$ – множители Бляшке, а $F_0(\lambda)$, принадлежащая H_∞, не имеет нулей внутри области $\mathbb{D}$. Число N называют порядком произведения Бляшке $b(\lambda)$.

В матричном случае аналог этого утверждения получен В.П.Потаповым [8]. Произведением Бляшке-Потапова называется матриц-функция вида

$$b(\lambda) = \prod_{j=1}^{N} b_j(\lambda), \tag{1}$$

где $b_j(\lambda)$ имеют вид

$$b_j(\lambda) = I - P_j + \frac{\lambda-\alpha_j}{1-\overline{\alpha_j}\lambda}P_j,$$

где $\alpha_j \in \mathbb{D}$, P_j – ортопроекторы в $\mathbb{C}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Множитель Бляшке-Потапова $b_j(\lambda)$ называется простым, если P_j ортопроектор в $\mathbb{C}^n$ ранга 1. Представление (1) для функции $b(\lambda)$ является не единственным, но при условии, что все факторы b_j простые, оказывается, что их количество одно и то же [9].

Определение. Количество простых множителей Бляшке-Потапова в разложении (1) называется степенью произведения Бляшке-Потапова.

Теорема 2. ([9]) *Всякая матриц-функция $F \in H_\infty^{n\times n}(\mathbb{D})$ допускает представление*

$$F(\lambda) = b_0(\lambda)F_0(\lambda) = F_1(\lambda)b_1(\lambda),$$

где $b_0,\ b_1$ – произведения Бляшке-Потапова; $F_0,\ F_1 \in H_\infty^{n\times n}$ и не имеют нулей в $\mathbb{D}$. При этом степени произведений Бляшке-Потапова b_0 и b_1 совпадают.

Определение. Нулевой кратностью $\mathcal{M}_\zeta$ для $F \in H_\infty^{n\times n}$ мы будем называть степень произведения Бляшке-Потапова b_0, вообще говоря, равную степени произведения Бляшке-Потапова b_1 [5]

$$\mathcal{M}_\zeta(F) = \deg b_0 \ (= \deg b_1).$$

Определение. Говорят, что матриц-функция F, мероморфная в $\mathbb{D}$, принадлежит классу $H^{n\times n}_{\kappa,\infty}$, если она представима в виде

$$F(\lambda) = b_l(\lambda)^{-1}F_l(\lambda), \tag{2}$$

где $b_l,\ F_l \in H^{n\times n}_{\infty}$, и b_l – произведение Бляшке-Потапова степени κ.

Как показано в [5], среди всех возможных факторизаций (2) существует минимальная, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{rank}[b_l(\lambda)\ F_l(\lambda)] = n, \tag{3}$$

которая определяется однозначно, с точностью до левого унитарного множителя. Если при этом степень b_l равна κ_0, то $F \in H^{n\times n}_{\kappa_0,\infty}\backslash H^{n\times n}_{\kappa_0-1,\infty}$. Более того, для всякой матриц-функции F из класса $H^{n\times n}_{\kappa_0,\infty}\backslash H^{n\times n}_{\kappa_0-1,\infty}$ существует также правая факторизация

$$F(\lambda) = F_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1}, \tag{4}$$

где $b_r,\ F_r \in H^{n\times n}_{\infty}$, и b_r – произведение Бляшке-Потапова степени κ, для которых выполнено условие

$$\ker F_r(\lambda) \cap \ker b_r(\lambda) = \{0\},\ \lambda \in \mathbb{D}. \tag{5}$$

Условия (4), (5) определяют множители F_r и b_r однозначно, с точностью до правого унитарного множителя.

Определение. Будем говорить, что мероморфная в области $\mathbb{D}$ функция F принадлежит классу $\mathcal{D}^{n\times n}_{\kappa}$, если она допускает левую факторизацию (2), где b_l – множитель Бляшке-Потапова степени κ, $F_l \in \mathcal{D}^{n\times n}$; при этом b_l и F_l удовлетворяют условию (3).

Условие (3) гарантирует единственность разложения (2) с точностью до левого унитарного множителя (см. [4]).

В [4] показывается (см. также [1]), что для функций из класса $\mathcal{D}^{n\times n}_{\kappa}$ существует также правая факторизация (4), где $b_r \in H^{n\times n}_{\infty}$ – произведение Бляшке-Потапова степени κ, а F_r – матриц-функция класса $\mathcal{D}^{n\times n}$, такие что выполнено условие (5). Условия (4), (5) определяют множители $b_r,\ F_r$ однозначно, с точностью до правого унитарного множителя.

Заметим, что при этом степени множителей Бляшке-Потапова b_r и b_l совпадают.

Определение. Пусть $F \in \mathcal{D}^{n\times n}_{\kappa}(\mathbb{D})$ имеет левую факторизацию (2). Тогда число

$$\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}_{\zeta}(F_l) - \kappa$$

называется суммарной кратностью мероморфной матриц-функции $F(\lambda)$ относительно области $\mathbb{D}$.

Основной результат работы составляет следующая

Теорема 3. *Пусть* $F \in \mathcal{D}^{n\times n}_{\kappa}(\mathbb{D}),\ G \in \mathcal{D}^{n\times n}_{\kappa_1}(\mathbb{D})$. *Если* $\det(F(\lambda)+G(\lambda)) \not\equiv 0$ *(в* $\mathbb{D}$*) и* $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| \le 1$ *(п. в. на* $\mathbb{T}$*), то*

$$\mathcal{M}(F+G) \le \mathcal{M}(F). \tag{6}$$

Если к тому же $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, *то*

$$\mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F). \tag{7}$$

Доказательство основано на теореме Крейна-Лангера, приведенной выше, и на следующем утверждении.

Лемма 1. *Для произвольных мероморфных матриц-функций* A *и* B *из классов* $\mathcal{D}_{\kappa_1}^{n\times n}$ *и* $\mathcal{D}_{\kappa_2}^{n\times n}$*, соответственно, выполнено соотношение*

$$\mathcal{M}(A\cdot B) = \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B). \tag{8}$$

2. Доказательства основных результатов.

Доказательство Леммы 1. Если $n = 1$, то A и B – скалярные функции, и утверждение (8) очевидно. Действительно при умножении функций A и B, соответствующие порядки нулей и полюсов складываются. Если $n > 1$, то, как следует из [3]

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}\big(\det(A)\big), \quad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}\big(\det(B)\big). \tag{9}$$

Переходя к скалярным функциям, мы получим из формул (9) формулу (8)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(AB) &= \mathcal{M}\big(\det(AB)\big)\\ &= \mathcal{M}\big(\det(A)\cdot\det(B)\big)\\ &= \mathcal{M}\big(\det(A)\big) + \mathcal{M}\big(\det(B)\big)\\ &= \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказательство основной Теоремы 3. Представим функции F и G в виде

$$F = b^{-1}F_1, \quad G = G_1 d^{-1},$$

где b и d – произведения Бляшке-Потапова степеней κ и κ_1, соответственно; $F_1,\ G_1 \in \mathcal{D}^{n\times n}$. Тогда

$$F + G = b^{-1}(F_1 d + bG_1)d^{-1}.$$

Согласно Лемме 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(F+G) &= \mathcal{M}(b^{-1}) + \mathcal{M}(F_1 d + bG_1) + \mathcal{M}(d^{-1})\\ &= -\kappa_1 + \mathcal{M}(F_1 d + bG_1) - \kappa.\end{aligned} \tag{10}$$

Применим к $F_1 d + bG_1$ Теорему 1 Крейна-Лангера. Проверим выполнение всех условий Теоремы 1:

1) $F_1 d,\ bG_1 \in \mathcal{D}^{n\times n}$ по построению.

2) $||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| \le 1$ на $\mathbb{T}$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| &= ||b(\lambda)G_1(\lambda)d^{-1}(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| \\
&= ||b(\lambda)G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| \\
&= ||G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)b(\lambda)|| \\
&= ||G(\lambda)F^{-1}(\lambda)|| \le 1 \text{ (на } \mathbb{T}).
\end{aligned}$$

При этом используется равенство $||b(\lambda)G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)|| = ||G(\lambda)F_1^{-1}(\lambda)b(\lambda)||$, справедливое на $\mathbb{T}$, так как $b(\lambda)$ на границе $\mathbb{T}$ унитарна. Отсюда следует, что

$$||b(\lambda)G_1(\lambda)\cdot\big(F_1(\lambda)d(\lambda)\big)^{-1}|| \le 1$$

на $\mathbb{T}$.

3) $\det\big(b(\lambda)G_1(\lambda)+F_1(\lambda)d(\lambda)\big)\not\equiv 0$. Действительно, для всех $\lambda\in\mathbb{D}$ получим

$$\begin{aligned}
\det\big(b(\lambda)G_1(\lambda)+F_1(\lambda)d(\lambda)\big) &= \det\big(b^{-1}(\lambda)\big)\cdot\det\big(b(\lambda)G_1(\lambda)+F_1(\lambda)d(\lambda)\big)\cdot\det\big(d^{-1}(\lambda)\big) \\
&= \det\Big(b^{-1}(\lambda)\big(b(\lambda)G_1(\lambda)+F_1(\lambda)d(\lambda)\big)d^{-1}(\lambda)\Big) \\
&= \det\big(F(\lambda)+G(\lambda)\big)\not\equiv 0.
\end{aligned}$$

Поэтому применение Теоремы 1 возможно и

$$\mathcal{M}(F_1d+bG_1)\le\mathcal{M}(F_1d). \tag{11}$$

Применяя Лемму 1 к правой части (11), получим

$$\mathcal{M}(F_1d)=\mathcal{M}(F_1)+\mathcal{M}(d)=\mathcal{M}_\zeta(F_1)+\kappa_1. \tag{12}$$

Подставим (12) в (10):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(F+G) &\le -\kappa+\mathcal{M}_\zeta(F_1)+\kappa_1-\kappa_1 \\
&= -\kappa+\mathcal{M}_\zeta(F_1)=\mathcal{M}(F).
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (6) доказано.

4) Проверим принадлежность $F_1d(F_1d+bG_1)^{-1}\in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Действительно, по условию

$$F(F+G)^{-1}\in L_1^{n\times n}(\mathbb{T}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
F(F+G)^{-1} &= b^{-1}F_1(b^{-1}F_1+G_1d)^{-1} \\
&= b^{-1}F_1\big(b^{-1}(F_1d+bG_1)d^{-1}\big)^{-1}\in L_1^{n\times n}(\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Обозначим $B:=b^{-1}F_1d(F_1d+bG_1)^{-1}b\in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Так как $\kappa<\infty$, то bBb^{-1} – определена п.в. на $\mathbb{T}$, а так как b – унитарна на $\mathbb{T}$, то матриц-функции bBb^{-1} и B принадлежат $L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$, но $bBb^{-1}=F_1d(F_1d+bG_1)^{-1}$.

Применяя Теорему 1 к функции $F_1 d + bG_1$, аналогично доказываем равенство (7) при выполнении условия $F(F+G)^{-1} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Теорема доказана. □

Из Теоремы 3 вытекает

Следствие. *Пусть* $F \in D_\kappa^{n\times n}$, $G \in D_{\kappa_1}^{n\times n}$. *Если* $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| < \rho < 1$ *на* $\mathbb{T}$, *то* $\mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что $F(F+G)^{-1}|_{\mathbb{T}} \in L_1^{n\times n}(\mathbb{T})$. Действительно,

$$\begin{aligned} ||F(\lambda)\big(F(\lambda)+G(\lambda)\big)^{-1}|| &= ||F(\lambda)\cdot F(\lambda)^{-1}\big(1+F(\lambda)^{-1}G(\lambda)\big)^{-1}|| \\ &= ||I\cdot\big(1+F(\lambda)^{-1}G(\lambda)\big)^{-1}|| \\ &\le (1-\rho)^{-1} < \infty \ (\text{на } \mathbb{T}). \end{aligned}$$

Здесь использовалось соотношение, что $||G(\lambda)F(\lambda)^{-1}|| = ||F(\lambda)^{-1}G(\lambda)||$. □

Это утверждение оказывается также более общим, чем обобщение, полученное Гохбергом и Сигалом, так как здесь не требуется нормальность матриц-функций F и G относительно контура $\mathbb{T}$ и ее непрерывность вплоть до границы. В то же время отметим, что утверждение Гохберга-Сигала относится к оператор-функциям.

1. *Деркач В.А.* Об индефинитной интерполяционной задаче Шура-Неванлинны-Пика. – Укр. Матем. Журн. – т.55 (2003). – №10. – С.1299-1314.
2. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М., Изд. ин. лит., 1963.
3. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Обобщение теоремы о логарифмическом вычете. – Математический сборник. – т.84 (126). – №4, 1974г.
4. *Krein M.G., Langer H.* Uber die verallgemeinerten Resolventen und die characteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume Π_κ, Hilbert space Operators and Operator Algebras (Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970); Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, vol.5, North-Holland, Amsterdam, C.353-399, 1972.
5. *Krein M.G., Langer H.* Some proposition on analytic matrix-function related to the theory of operators in the space Π_κ, Acta Sct. Math., Szeged, 43 (1981). – C.181-205.
6. *Крейн С. Г., Трофимов В. П.* О кратности характерестической точки голоморфной оператор-функции, Мат. Иссед. 5. – №2. – (1970). – С.105-114.
7. *Палант Ю.А.* Об одном методе получения признаков кратной полноты системы собственных и присоединённых векторов полиномиального пучка операторов, Записки мех.-мат. фак-та Харьк. матем. об-ва, 34 (1970). – С.1-13.
8. *Потапов В. П.* О голоморфных ограниченных в единичном круге матриц-функциях, Докл. АН СССР, 72 (1950). С.849-852.
9. *Потапов В.П.* Мультипликативная структура J-несжимающих матриц-функций, Труды Моск. мат. заметок, 4 (1955). – С.125-236.
10. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970г.
11. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969г.

Донецкий национальный ун-т
evg_sqrt@mail.ru

Получено 05.09.08