УДК 512.533

©2008. **А.В. Жучок**

НАПІВРЕТРАКЦІЇ ДІМОНОЇДІВ

У роботі визначається і вивчається поняття напівретракції дімоноїду.

Вступ. Поняття "дімоноїд" ввів Джин Лодей [1]. Дімоноїдом називається алгебра з двома асоціативними операціями, що задовольняють деяким трьом аксіомам (див. нижче). У випадку, коли ці операції співпадають, дімоноїд перетворюється у напівгрупу. Першим результатом про дімоноїди є описання вільного дімоноїду на заданій множині. Іншим поняттям, що належить до теорії напівгруп, є поняття напівретракції [2] – перетворення з деякими природними властивостями, за допомогою якого полегшується задача знаходження конгруенцій напівгруп. Деякі застосування техніки напівретракцій напівгруп використовувались в [2–6].

У даній статті визначається і вивчається поняття напівретракції дімоноїду, наводяться деякі застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів.

Термінологія та позначення відповідають прийнятим в [2].

Основні поняття. Множина D з визначеними на ній бінарними асоціативними операціями $\prec$ і $\succ$, які задовольняють умовам:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z) \tag{1}$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z) \tag{2}$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z) \tag{3}$$

для всіх $x, y \in D$, називається дімоноїдом.

Елемент $e \in D$ називають бар'єрною одиницею дімоноїду D, якщо $x \prec e = x = e \succ x$ для будь-якого $x \in D$.

Відзначимо, що на відміну від моноїдів дімоноїд може мати необов'язково лише одну бар'єрну одиницю.

Гомоморфізмом дімоноїдів D та D' називається відображення $f : D \to D'$ таке, що

$$(x \prec y)f = xf \prec yf, \ \ (x \succ y)f = xf \succ yf$$

для всіх $x, y \in D$.

Будь-який моноїд $(M, *)$ є дімоноїдом. Дійсно, якщо для будь-яких $m, n \in M$ покласти $m \prec n = m * n = m \succ n$, то отримаємо дімоноїд $D = (M, \prec, \succ)$. Навпаки, якщо дімоноїд D має одиницю, то згідно (2) $\prec = \succ$, і ми отримуємо моноїд.

1. Загальні властивості напівретракцій.

1.1. Перетворення τ дімоноїду D називатимемо лівою напівретракцією, якщо

$$(x \prec y)\tau = (x\tau \prec y)\tau, \tag{4}$$

$$(x \succ y)\tau = (x\tau \succ y)\tau \tag{5}$$

при будь-яких $x, y \in D$. Якщо замість $(4), (5)$ виконуються тотожності

$$(x \prec y)\tau = (x \prec y\tau)\tau, \tag{6}$$

$$(x \succ y)\tau = (x \succ y\tau)\tau, \tag{7}$$

то говоритимемо про праву напівретракцію.

Якщо для перетворення τ дімоноїду D виконуються тотожності (4)–(7), то перетворення τ називатимемо (симетричною) напівретракцією дімоноїду D.

Нехай D^e – дімоноїд, який містить принаймні одну бар'єрну одиницю e.

Будь-яка ліва (права) напівретракція τ дімоноїду D^e є його ідемпотентним перетворенням. Дійсно, якщо $x \in D^e$ – довільний елемент, то

$$x\tau = (x \prec e)\tau = (x\tau \prec e)\tau = (x\tau)\tau = x\tau^2.$$

Аналогічно показується ідемпотентність правої напівретракції.

Характеристику ідемпотентних перетворень, які є лівими напівретракціями, дає

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ дімоноїду D є його лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є правою конгруенцією цього дімоноїду.*

Доведення. Нехай ідемпотентне перетворення τ дімоноїду D є його лівою напівретракцією. Якщо $(x; y) \in \nabla_\tau$, $x, y \in D$, то $x\tau = y\tau$, звідки

$$x\tau \prec t = y\tau \prec t,\ x\tau \succ t = y\tau \succ t$$

для будь-якого $t \in D$. Діючи на обидві частини кожної з останніх двох рівностей перетворенням τ, отримуємо

$$(x\tau \prec t)\tau = (x \prec t)\tau = (y\tau \prec t)\tau = (y \prec t)\tau,$$
$$(x\tau \succ t)\tau = (x \succ t)\tau = (y\tau \succ t)\tau = (y \succ t)\tau$$

згідно з $(4), (5)$ і, отже, $(x \prec t; y \prec t) \in \nabla_\tau,\ (x \succ t; y \succ t) \in \nabla_\tau$.

Нехай, навпаки, $\tau^2 = \tau$ і відношення рівнозначності ∇_τ є правою конгруенцією дімоноїду D. Тоді для будь-яких $x, y \in D$ за першою умовою матимемо $x\tau^2 = (x\tau)\tau = x\tau$, звідки $(x, x\tau) \in \nabla_\tau$, а за другою –

$$(x \prec y; x\tau \prec y) \in \nabla_\tau, \quad (x \succ y; x\tau \succ y) \in \nabla_\tau.$$

З останніх умов отримуємо, що

$$(x \prec y)\tau = (x\tau \prec y)\tau, \quad (x \succ y)\tau = (x\tau \succ y)\tau.$$

Лему доведено.

1.2. У двоїстий спосіб доводиться

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ дімоноїду D є його правою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є лівою конгруенцією цього дімоноїду.*

1.3. Нехай ω – довільна права конгруенція дімоноїду D, $z \in D$, $[\omega]z = \{x \in D|(z;x) \in \omega\}$. Якщо розглянути деяке фіксоване константне перетворення γ_z множини $[\omega]z$ ($s\gamma_z = z$ для всіх $s \in [\omega]z$) і покласти $x\gamma = x\gamma_z \Leftrightarrow x \in [\omega]z$ для всіх $x \in D$, то отримаємо ідемпотентне перетворення множини D таке, що $\nabla_\gamma = \omega$. Отже, має місце

Лема. *Для кожної правої конгруенції ω дімоноїду D існує його ліва напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \omega$.*

1.4. У двоїстий спосіб отримуємо

Лема. *Для кожної лівої конгруенції ω дімоноїду D існує його права напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \omega$.*

2. Регулярність.

2.1. Природньо постає питання про те, за яких умов образ Δ_τ лівої напівретракції τ є піддімоноїдом в D і як пов'язані властивості напівретракцій з внутрішніми та факторизаційними властивостями відповідного дімоноїду.

Ліву напівретракцію τ дімоноїду $D = (D, \prec, \succ)$ назвемо регулярною, якщо її образ $\Delta_\tau = Im\tau$ є піддімоноїдом дімоноїду D. Для всіх $t \in D$ визначимо перетворення $\rho_t, \rho_t^{'}$ та $\lambda_t, \lambda_t^{'}$ дімоноїду D, поклавши $x\rho_t = x \prec t$, $x\rho_t^{'} = x \succ t$, $x\lambda_t = t \prec x$, $x\lambda_t^{'} = t \succ x$ для всіх $x \in D$. Перетворення τ дімоноїду D назвемо централізаторним справа, якщо $\rho_t\tau = \tau\rho_t$, $\rho_t^{'}\tau = \tau\rho_t^{'}$ для всіх $t \in Im\tau$, і децентралізаторним зліва, якщо $\tau\lambda_x\tau = \tau\lambda_{x\tau}$, $\tau\lambda_x^{'}\tau = \tau\lambda_{x\tau}^{'}$ для всіх $x \in D$.

Твердження. *Для дімоноїду D та його лівої ідемпотентної напівретракції τ еквівалентними є твердження:*

1. τ є регулярною;

2. τ є централізаторною справа;

3. τ є децентралізаторною зліва.

Доведення. Якщо τ є регулярною, $x \in D$, $t \in \Delta_\tau$, то

$$x\tau\rho_t = x\tau \prec t = (x\tau \prec t)\tau = (x \prec t)\tau = x\rho_t\tau,$$
$$x\tau\rho_t^{'} = x\tau \succ t = (x\tau \succ t)\tau = (x \succ t)\tau = x\rho_t^{'}\tau,$$

звідки $\rho_t\tau = \tau\rho_t$, $\rho_t^{'}\tau = \tau\rho_t^{'}$ для всіх $t \in \Delta_\tau$.

Якщо виконується твердження 2, то при будь-яких $x, a \in D$ матимемо

$$a\tau\lambda_{x\tau} = x\tau \prec a\tau = x\tau\rho_{a\tau} = x\rho_{a\tau}\tau = (x \prec a\tau)\tau = a\tau\lambda_x\tau,$$

звідки $\tau\lambda_{x\tau} = \tau\lambda_x\tau$. Аналогічно, $\tau\lambda_x^{'}\tau = \tau\lambda_{x\tau}^{'}$ для всіх $x \in D$.

Якщо ж виконується твердження 3, то для будь-яких $t, u \in \Delta_\tau$ матимемо

$$t \prec u = t\tau \prec u\tau = u\tau\lambda_{t\tau} = u\tau\lambda_t\tau = u\lambda_t\tau = (t \prec u)\tau \in \Delta_\tau,$$

$$t \succ u = t\tau \succ u\tau = u\tau\lambda_{t\tau}^{'} = u\tau\lambda_t^{'}\tau = u\lambda_t^{'}\tau = (t \succ u)\tau \in \Delta_\tau,$$

звідки випливає, що τ є регулярною лівою напівретракцією.

Твердження доведено.

Двоїсто визначивши ліву централізаторність та праву децентралізаторність правої напівретракції, отримаємо відповідний результат для правих напівретракцій.

2.2. Один з прикладів регулярних лівих напівретракцій виникає при розгляді внутрішніх лівих зсувів дімоноїдів.

Перетворення $\lambda_a,\ a \in D$ назвемо внутрішнім лівим зсувом дімоноїду D, якщо $x\lambda_a = a \succ x$ для всіх $x \in D$.

Твердження. *Якщо $a \in D$ та $a \succ a = a$, то внутрішній лівий зсув λ_a дімоноїду D є регулярною лівою напівретракцією.*

Доведення. Для будь-яких $x, y \in D$ маємо

$$\begin{gathered}
(x \succ y)\lambda_a = a \succ (x \succ y) = a \succ (a \succ (x \succ y)) = \\
= a \succ (x\lambda_a \succ y) = (x\lambda_a \succ y)\lambda_a, \\
(x \prec y)\lambda_a = a \succ (x \prec y) = a \succ a \succ (x \prec y) = \\
= a \succ (a \succ (x \prec y)) = a \succ ((a \succ x) \prec y) = a \succ (x\lambda_a \prec y) = (x\lambda_a \prec y)\lambda_a
\end{gathered}$$

згідно асоціативності операції $\succ$ та умови (2).

Покажемо, що λ_a – регулярна. Зрозуміло, що $Im\lambda_a = a \succ D$. Візьмемо елементи $a \succ x,\ a \succ y \in Im\lambda_a$, для яких отримаємо

$$\begin{gathered}
((a \succ x) \succ (a \succ y))\lambda_a = a \succ (a \succ x) \succ (a \succ y) = (a \succ x) \succ (a \succ y), \\
((a \succ x) \prec (a \succ y))\lambda_a = a \succ ((a \succ x) \prec (a \succ y)) = \\
= (a \succ (a \succ x)) \prec (a \succ y) = (a \succ x) \prec (a \succ y)
\end{gathered}$$

згідно асоціативності операції $\succ$ та умови (2). Звідси випливає, що τ є регулярною лівою напівретракцією.

Твердження доведено.

2.3. Перетворення $\rho_a,\ a \in D$ назвемо внутрішнім правим зсувом дімоноїду D, якщо $x\rho_a = x \prec a$ для всіх $x \in D$.

У двоїстий спосіб (див.п.2.2) доводиться

Твердження. *Якщо $a \in D$ та $a \prec a = a$, то внутрішній правий зсув ρ_a дімоноїду D є регулярною правою напівретракцією.*

3. Симетричні напівретракції.

3.1. Якщо напівретракція τ дімоноїду $D = (D, \prec, \succ)$ є симетричною (див. п.1.1), то природньо виникає дімоноїд $D^\tau = (Im\tau, \prec_\tau, \succ_\tau)$, в якому операції визначаються за правилами

$$\begin{gathered}
x \prec_\tau y = (x \prec y)\tau,\ x, y \in Im\tau, \\
x \succ_\tau y = (x \succ y)\tau,\ x, y \in Im\tau.
\end{gathered}$$

Дійсно, при будь-яких $x,\ y,\ z \in Im\tau$ матимемо:

$$\begin{gathered}
(x \prec_\tau y) \prec_\tau z = ((x \prec y)\tau \prec z)\tau = ((x \prec y) \prec z)\tau = \\
= (x \prec (y \succ z))\tau = (x \prec (y \succ z)\tau)\tau = \\
= (x \prec (y \succ_\tau z))\tau = x \prec_\tau (y \succ_\tau z),
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
(x \succ_\tau y) \prec_\tau z = ((x \succ y)\tau \prec z)\tau = ((x \succ y) \prec z)\tau = \\
= (x \succ (y \prec z))\tau = (x \succ (y \prec z)\tau)\tau = (x \succ (y \prec_\tau z))\tau = \\
= x \succ_\tau (y \prec_\tau z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(x \prec_\tau y) \succ_\tau z = ((x \prec y)\tau \succ z)\tau = ((x \prec y) \succ z)\tau = \\
= (x \succ (y \succ z))\tau = (x \succ (y \succ z)\tau)\tau = (x \succ (y \succ_\tau z))\tau = \\
= x \succ_\tau (y \succ_\tau z)
\end{gathered}
$$

згідно умовам (1)–(3) відносно операцій $\prec$, $\succ$. Асоціативність операцій $\prec_\tau$ і $\succ_\tau$ випливає з роботи [2].

Дімоноїд D^τ називатимемо τ-мутацією дімоноїду D. Легко бачити, що відображення $\tau^\# : D \to D^\tau \ : x \mapsto x\tau^\# = x\tau$ є гомоморфізмом дімоноїдів. Дійсно, для будь-яких t, $u \in D$ матимемо

$$
\begin{aligned}
(t \prec u)\tau^\# = (t \prec u)\tau = (t\tau \prec u\tau)\tau = t\tau^\# \prec_\tau u\tau^\#, \\
(t \succ u)\tau^\# = (t \succ u)\tau = (t\tau \succ u\tau)\tau = t\tau^\# \succ_\tau u\tau^\#.
\end{aligned}
$$

3.2. Загальну характеристику (симетричних напівретракцій) дає

Твердження. *Для ідемпотентного перетворення π дімоноїду $D = (D, \prec, \succ)$ еквівалентними є твердження:*

1. π є симетричною напівретракцією;

2. π є лівою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією дімоноїду D;

3. π є правою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією дімоноїду D;

4. для всіх $x, y \in D$ виконуються тотожності:

$$
(x \prec y)\pi = (x\pi \prec y\pi)\pi, (x \succ y)\pi = (x\pi \succ y\pi)\pi.
$$

Доведення. Еквівалентність тверджень 1, 2, 3 випливає з визначення симетричної напівретракції та з лем п.п.1.1, 1.2.

Для завершення доведення покажемо еквівалентність тверджень 1 і 4. Якщо виконується умова 1, то для всіх $x, y \in D$ матимемо:

$$
\begin{aligned}
(x \prec y)\pi = (x\pi \prec y)\pi = (x \prec y\pi)\pi = (x\pi \prec y\pi)\pi, \\
(x \succ y)\pi = (x\pi \succ y)\pi = (x \succ y\pi)\pi = (x\pi \succ y\pi)\pi,
\end{aligned}
$$

тобто $1 \Rightarrow 4$. Якщо ж виконується умова 4, то для всіх $x, y \in D$ матимемо:

$$
\begin{aligned}
(x \prec y)\pi = (x\pi \prec y\pi)\pi = (x\pi^2 \prec y\pi)\pi = ((x\pi)\pi \prec y\pi)\pi = (x\pi \prec y)\pi, \\
(x \prec y)\pi = (x\pi \prec y\pi)\pi = (x\pi \prec y\pi^2)\pi = (x\pi \prec (y\pi)\pi)\pi = (x \prec y\pi)\pi.
\end{aligned}
$$

Аналогічні викладки матимемо й для операції $\succ$. Тобто $4 \Rightarrow 1$.

Твердження доведено.

Таким чином, задача описання конгруенцій дімоноїдів заданого класу зводиться до описання їх напівретракцій. Тобто, знаючи дію напівретракції на дімоноїді ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, та, навпаки, знаючи будову конгруенції на дімоноїді, можливо задати клас напівретракцій, відношення рівнозначності за якими співпадають із заданою конгруенцією.

3.3. Наведемо деякі розв'язки задачі безпосереднього описання напівретракцій дімоноїдів.

Нехай $D = (D, \prec, \succ)$ – довільний дімоноїд, I, $J-$довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$p: \quad J \times I \to D : (j; i) \mapsto (j; i)p = p_{ji}.$$

Визначимо на множині $D^{'} = I \times D \times J$ операції за правилами:

$$(i, g, j) \prec^{'} (k, h, l) = (i, g \prec p_{jk} \prec h, l)\,,$$
$$(i, g, j) \succ^{'} (k, h, l) = (i, g \succ p_{jk} \succ h, l)$$

для всіх $(i, g, j), (k, h, l) \in D^{'}$.

Лема. *Алгебра* $(D^{'}, \prec^{'}, \succ^{'})$ *є дімоноїдом.*

Доведення. Той факт, що операції $\prec^{'}, \succ^{'}$ є асоціативними, випливає з визначення напівгрупи Ріса матричного типу (див., наприклад, [7]).

Нехай $(i, a, j),\ (k, b, t),\ (l, c, m)$ – довільні елементи дімоноїду $(D^{'}, \prec^{'}, \succ^{'})$. Тоді

$$((i, a, j) \prec^{'} (k, b, t)) \prec^{'} (l, c, m) = (i, a \prec p_{jk} \prec b, t) \prec^{'} (l, c, m) =$$
$$= (i, (a \prec p_{jk} \prec b) \prec p_{tl} \prec c, m) = (i, ((a \prec p_{jk}) \prec b) \prec p_{tl} \prec c, m) =$$
$$= (i, ((a \prec p_{jk}) \prec (b \succ p_{tl})) \prec c, m) = (i, (a \prec p_{jk}) \prec ((b \succ p_{tl}) \succ c), m) =$$
$$= (i, a, j) \prec^{'} (k, b \succ p_{tl} \succ c, m) = (i, a, j) \prec^{'} ((k, b, t) \succ^{'} (l, c, m))$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (1) відносно операцій $\prec$, $\succ$.

Покажемо справедливість умови (2) для операцій $\prec^{'}, \succ^{'}$. Маємо:

$$((i, a, j) \succ^{'} (k, b, t)) \prec^{'} (l, c, m) = (i, a \succ p_{jk} \succ b, t) \prec^{'} (l, c, m) =$$
$$= (i, (a \succ p_{jk} \succ b) \prec p_{tl} \prec c, m) = (i, ((a \succ p_{jk}) \succ b) \prec (p_{tl} \prec c), m) =$$
$$= (i, (a \succ p_{jk}) \succ (b \prec (p_{tl} \prec c)), m) = (i, a, j) \succ^{'} (k, b \prec p_{tl} \prec c, m) =$$
$$= (i, a, j) \succ^{'} ((k, b, t) \prec^{'} (l, c, m))$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (2) відносно операцій $\prec$, $\succ$.

Нарешті покажемо справедливість умови (3) для операцій $\prec^{'}, \succ^{'}$. Маємо:

$$((i, a, j) \prec^{'} (k, b, t)) \succ^{'} (l, c, m) = (i, a \prec p_{jk} \prec b, t) \succ^{'} (l, c, m) =$$
$$= (i, (a \prec p_{jk} \prec b) \succ p_{tl} \succ c, m) = (i, ((a \prec p_{jk}) \prec b) \succ p_{tl} \succ c, m) =$$
$$= (i, (a \prec p_{jk}) \succ (b \succ p_{tl}) \succ c, m) = (i, (a \prec p_{jk}) \succ (b \succ p_{tl} \succ c), m) =$$
$$= (i, a \succ p_{jk} \succ (b \succ p_{tl} \succ c), m) = (i, a, j) \succ^{'} (k, b \succ p_{tl} \succ c, m) =$$
$$= (i, a, j) \succ^{'} ((k, b, t) \succ^{'} (l, c, m))$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (3) відносно операцій $\prec$, $\succ$. Таким чином, $(D^{'}, \prec^{'}, \succ^{'})$ є дімоноїдом.

Лему доведено.

Дімоноїд, отриманий в такий спосіб, назвемо дімоноїдом Ріса і позначимо його через $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$.

3.4. Нехай $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$ – дімоноїд Ріса (див. п.3.3.), τ – ідемпотентна напівретракція дімоноїду D, $\alpha = \alpha^2 : I \to I$, $\beta = \beta^2 : J \to J$ – перетворення такі, що виконується умова:

$$p_{ji} = p_{j\beta\, i\alpha},\ j \in J,\ i \in I.$$

Нехай далі $D^{''} = (D^{''}, \prec^{''}, \succ^{''}) = D^{''}(I\alpha, D^{\tau}, J\beta; p^{'})$ – дімоноїд Ріса такий, що

$$p^{'} : J\beta \times I\alpha \to D^{\tau} : (j\beta, i\alpha) \mapsto (j\beta, i\alpha)p^{'} = p^{'}_{j\beta\ i\alpha} = p_{j\beta\ i\alpha}\tau.$$

Визначимо перетворення $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ дімоноїду $D^{'}$, поклавши

$$(i, a, j)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha,\ a\tau, j\beta)$$

для всіх $(i, a, j) \in D^{'}$.

У позначеннях п.3.1 отримуємо

Теорема. *Будь-яке перетворення* $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ *дімоноїду Ріса* $D^{'}$ *є напівретракцією, для якої має місце рівність* $(D^{'})^{\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}} = D^{''}(I\alpha, D^{\tau}, J\beta; p^{'})$.

Доведення. Якщо (i, a, j), (m, b, n)–довільні елементи дімоноїду $D^{'}$, то, з одного боку –

$$((i, a, j) \prec^{'} (m, b, n))\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = (i, a \prec p_{jm} \prec b, n)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha, (a \prec p_{jm} \prec b)\tau, n\beta)$$

і, з іншого боку –

$$\begin{aligned} &((i, a, j)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} \prec^{'} (m, b, n)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]})\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = \\ &= ((i\alpha, a\tau, j\beta) \prec^{'} (m\alpha,\ b\tau; n\beta))\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = \\ &= (i\alpha,\ (a\tau\ \prec p_{j\beta\ m\alpha} \prec b\tau)\tau,\ n\beta). \end{aligned}$$

Оскільки τ – ідемпотентна напівретракція дімоноїду D та $p_{jm} = p_{j\beta\ m\alpha}$, то

$$\begin{aligned} (a \prec p_{jm} \prec b)\tau &= ((a \prec p_{jm})\tau \prec b\tau)\tau = ((a\tau \prec p_{jm})\tau \prec b\tau)\tau = \\ &= (a\tau \prec p_{jm} \prec b\tau)\tau = (a\tau \prec\ p_{j\beta\ m\alpha} \prec b\tau)\tau, \end{aligned}$$

а це, разом з попереднім, означає, що

$$((i, a, j) \prec^{'} (m, b, n))\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = ((i, a, j)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} \prec^{'} (m, b, n)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]})\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$$

для всіх (i, a, j), $(m, b, n) \in D^{'}$.

Аналогічно показується справедливість умови симетричної напівретракції для операції $\succ^{'}$. Отже, $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ є напівретракцією.

Неважко бачити, що образом напівретракції $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ є множина

$$Im\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = \{(i\alpha, a\tau, j\beta) \in D^{'} | i \in I, a \in D, j \in J\}.$$

При цьому для будь-яких $(i\alpha, a\tau, j\beta)$, $(m\alpha, b\tau, n\beta) \in D''$ маємо:

$$\begin{gathered}(i\alpha, a\tau, j\beta) \ \prec'' (m\alpha, b\tau, n\beta) = (i\alpha, a\tau \prec_\tau p'_{j\beta\, m\alpha} \prec_\tau b\tau, n\beta) = \\ = (i\alpha, ((a\tau \prec p_{j\beta\, m\alpha}\tau)\tau \prec b\tau)\tau, n\beta) \ = (i\alpha, (a\tau \prec p_{j\beta\, m\alpha}\tau \prec b\tau)\tau, n\beta) = \\ = (i\alpha^2, (a\tau \prec p_{j\beta\, m\alpha} \prec b\tau)\tau, n\beta^2) = (i\alpha, a\tau \prec p_{j\beta\, m\alpha} \prec b\tau, n\beta)\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]} = \\ = (i\alpha, a\tau, j\beta) \ \prec'_{\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}} (m\alpha, b\tau, n\beta)\end{gathered}$$

завдяки тому, що τ – ідемпотентна напівретракція дімоноїду D. Звідси $\prec'_{\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}} = \prec''$. Аналогічно показується, що $\succ'_{\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}} = \succ''$.

Теорему доведено.

3.5. Нехай $D = (D, \prec, \ \succ)$ – довільний дімоноїд, a – довільний, але фіксований елемент дімоноїду D. На множині D визначимо операції $\prec_a$ і $\succ_a$ за правилами:

$$x \prec_a y = x \prec a \prec y, \quad x \succ_a y = x \succ a \succ y$$

для всіх $x, y \in D$.

Лема. *Алгебра* $(D, \prec_a, \ \succ_a)$ *є дімоноїдом.*

Доведення. Той факт, що операції $\prec_a$ і $\succ_a$ є асоціативними, випливає з визначення напівгрупи з деформованим множенням (див., наприклад, [8]).

Нехай x, y, z – довільні елементи дімоноїду $(D, \prec_a, \ \succ_a)$. Тоді

$$\begin{gathered}(x \prec_a y) \prec_a z = (x \prec a \prec y) \prec a \prec z = ((x \prec a \prec y) \prec a) \prec z = \\ = (x \prec a \prec y) \prec (a \succ z) = ((x \prec a) \prec y) \prec (a \succ z) = \\ = (x \prec a) \prec (y \succ (a \succ z)) = (x \prec a) \prec (y \succ a \succ z) = \\ = (x \prec a) \prec (y \succ_a z) = x \prec_a (y \succ_a z)\end{gathered}$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (1) відносно операцій $\prec$, $\succ$.

Покажемо справедливість умови (2) для операцій $\prec_a$ і $\succ_a$. Маємо:

$$\begin{gathered}(x \succ_a y) \prec_a z = (x \succ a \succ y) \prec a \prec z = ((x \succ a) \succ y) \prec a \prec z = \\ = ((x \succ a) \succ (y \prec a)) \prec z = x \succ a \succ (y \prec a \prec z) = x \succ_a (y \prec_a z)\end{gathered}$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (2) відносно операцій $\prec$, $\succ$.

Нарешті покажемо справедливість умови (3) для операцій $\prec$, $\succ$. Маємо:

$$\begin{gathered}(x \prec_a y) \succ_a z = (x \prec a \prec y) \succ a \succ z = ((x \prec a) \prec y) \succ a \succ z = \\ = ((x \prec a) \succ (y \succ a)) \succ z = (x \succ (a \succ (y \succ a))) \succ z = \\ = x \succ a \succ (y \succ a \succ z) = x \succ_a (y \succ_a z)\end{gathered}$$

згідно асоціативності операцій $\prec$, $\succ$ та умови (3) відносно операцій $\prec$, $\succ$. Таким чином, $(D, \prec_a, \ \succ_a)$ є дімоноїдом.

Лему доведено.

Дімоноїд, отриманий в такий спосіб, назвемо дімоноїдом з деформованими множеннями.

3.6. В умовах та позначеннях попереднього пункту має місце

Твердження. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ *– довільний дімоноїд,* $(D, \prec_a, \succ_a)$ *– дімоноїд з деформованими множеннями. Якщо ідемпотентне перетворення* τ *множини* D *є напівретракцією дімоноїду* $(D, \prec, \succ)$*, то воно є напівретракцією і дімоноїду* $(D, \prec_a, \succ_a)$*.*

Доведення. Якщо τ – напівретракція дімоноїду $(D, \prec, \succ)$, то для будь-яких $x, y \in (D, \prec_a, \succ_a)$ маємо:

$$(x \prec_a y)\tau = (x \prec a \prec y)\tau = ((x \prec a)\tau \prec y\tau)\tau = ((x\tau \prec a)\tau \prec y\tau)\tau =$$
$$= ((x\tau \prec a) \prec y\tau)\tau = (x\tau \prec a \prec y\tau)\tau = (x\tau \prec_a y\tau)\tau.$$

Аналогічно показується, що $(x \succ_a y)\tau = (x\tau \succ_a y\tau)\tau$ для будь-яких $x, y \in (D, \prec_a, \succ_a)$.

Твердження доведено.

1. *J.-L. Loday* Dialgebras, In: Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. 1763. Springer, Berlin. – 2001. – PP.7-66.
2. *Усенко В.М.* Напівретракції моноїдів // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – т.5. – С.155-164.
3. *Усенко В.М.* Напівретракції та симетричні зображення // Вісник Київ. Університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. – вип.1. – С.81-85.
4. *Жучок А.В.* Свободные полугруппы идемпотентов // Известия Гомельського гос. ун-та им. Ф.Скорины, 2003. – №4 (19). – С.55-58.
5. *Жучок А.В.* Напівретракції вільних моноїдів // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – вып.11. – С.81-88.
6. *Жучок А.В.* Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – вып.12. – С.57-62.
7. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп // М.: Мир. –1972. – т.1 – С.185; т.2. – С.422.
8. *Magill K.D., Jr.* Semigroup structures for families of functions. I-III. // J. Austral. Math. Soc. – 1967. – №7.

Луганський національний педагогічний
ун-т ім. Тараса Шевченка
zhuchok_a@mail.ru

Получено 24.06.08