УДК 531.38

©2008. **М.В. Войтович**

О ПРИЛОЖЕНИИ СВОЙСТВ СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСИЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТЬЮ К ЗАДАЧАМ УСРЕДНЕНИЯ

В настоящей заметке дается приложение полученных ранее результатов о повышении суммируемости решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью к исследованию характера сходимости последовательностей таких решений.

Введение. В настоящей заметке дается приложение полученных в [1] результатов о повышении суммируемости решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью к исследованию характера сходимости последовательностей таких решений. Это приложение и его аналоги для уравнений высших порядков в фиксированной области или переменных областях могут быть полезны для уточнения характера сходимости решений в задачах усреднения для рассматриваемых уравнений, например, в случае быстро осциллирующих коэффициентов или перфорированных областей. В связи с этим отметим, что вопросы усреднения задач Дирихле для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью изучались в [2] в случае перфорированных областей и [3] в случае фиксированной области и коэффициентов, зависящих от параметра.

1. О суммируемости решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью. В этом пункте приведем установленную в [1] теорему о повышении суммируемости обобщенных решений нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью. Эта теорема будет использована при выводе основных результатов данной заметки.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Через Λ обозначим множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$. Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi : \Lambda \to \mathbb{R}$; если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть $p \in (1, n/2)$ и $q \in (2p, n)$. Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Положим $q^* = nq/(n-q)$. Как известно (см., например, [4, гл.7]),

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega), \tag{1}$$

и существует положительная постоянная c, зависящая только от n и q, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leqslant c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^q dx \right)^{1/q}. \tag{2}$$

Далее, пусть $c_1, c_2, c_3 > 0$, g_1, g_2, g_3 – неотрицательные суммируемые функции на Ω, и пусть для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} \leqslant c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_2(x), \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_3 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_3(x). \tag{5}$$

Пусть

$$f \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \tag{6}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{8}$$

Заметим, что в силу неравенств (3) и (4) для любых функций u, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$ функция $A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v$ суммируема на Ω. Кроме того, из (1) и (6) вытекает, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ функция fv суммируема на Ω.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (7), (8) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *такую, что для любой функции* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u)\, D^\alpha v \right\} dx = \int\limits_{\Omega} f\, v\, dx. \tag{9}$$

Заметим, что если дополнительно к сделанным предположениям относительно коэффициентов и правой части уравнения (7) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geqslant 0,$$

то обобщенное решение задачи (7), (8) существует. Это вытекает из известных результатов теории монотонных операторов (см., например, [5, гл.2]).

В силу (1) любое обобщенное решение задачи (7), (8) принадлежит пространству $L^{q^*}(\Omega)$. Однако, если функции g_2, g_3 и f обладают повышенной суммируемостью, то обобщенные решения рассматриваемой задачи имеют более высокую суммируемость, чем та, которая характеризуется показателем q^*. Соответствующую зависимость выражает следующий результат [1].

Теорема 1. *Пусть $m > q^*/(q^*-1)$, функции g_2, g_3, f принадлежат $L^m(\Omega)$ и M – мажоранта для $\|g_2\|_{L^m(\Omega)}$, $\|g_3\|_{L^m(\Omega)}$ и $\|f\|_{L^m(\Omega)}$. Пусть u – обобщенное решение задачи (7), (8). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $m < n/q$ и $q^* < \lambda < nm(q-1)/(n-qm)$, то $u \in L^\lambda(\Omega)$ и $\|u\|_{L^\lambda(\Omega)} \leqslant C_1$, где C_1 – положительное число, зависящее только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3, m, M и λ;*

(ii) *если $m = n/q$, то $\int\limits_\Omega \exp(b\,|u|^{1/\sigma})\,dx \leqslant C_2$, где $\sigma = 2 + 2np/(q-2p)$, а b и C_2 – положительные числа, зависящие только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3 и M;*

(iii) *если $m > n/q$, то $u \in L^\infty(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u| \leqslant C_3$, где C_3 – положительное число, зависящее только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3, m и M.*

Замечание 1. Из утверждения (ii) теоремы 1 следует, что если выполняются условия этой теоремы, $m = n/q$ и $\lambda > q^*$, то $u \in L^\lambda(\Omega)$ и $\|u\|_{L^\lambda(\Omega)} \leqslant C'_2$, где C'_2 – положительное число, зависящее только от n, p, q, $\operatorname{meas}\Omega$, c, c_2, c_3, M и λ.

2. О сильной сходимости в пространствах Лебега последовательности решений задач Дирихле в фиксированной области. Рассмотрим последовательность задач Дирихле

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha^{(s)}(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \qquad D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0,1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{D_s}$$

где для любого $s \in \mathbb{N}$ $\{A_\alpha^{(s)}\}_{\alpha\in\Lambda}$ – набор функций Каратеодори, удовлетворяющих неравенствам (3)–(5) с теми же фиксированными константами c_1, c_2, c_3 и функциями g_1, g_2, g_3.

Теорема 2. *Пусть $m > q^*/(q^*-1)$ и функции g_2, g_3, f принадлежат $L^m(\Omega)$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s – обобщенное решение задачи (D_s) и последовательность $\{u_s\}$ сходится слабо к некоторой функции u в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $m < n/q$ *и* $q^* < \lambda < nm(q-1)/(n-qm)$, *то* $\{u_s\} \subset L^\lambda(\Omega)$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ *и последовательность* $\{u_s\}$ *сходится сильно к* u *в* $L^\lambda(\Omega)$;

(ii) *если* $m = n/q$ *и* $\lambda > q^*$, *то* $\{u_s\} \subset L^\lambda(\Omega)$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ *и последовательность* $\{u_s\}$ *сходится сильно к* u *в* $L^\lambda(\Omega)$;

(iii) *если* $m > n/q$ *и* $\lambda > q^*$, *то* $\{u_s\} \subset L^\infty(\Omega)$, $u \in L^\infty(\Omega)$ *и последовательность* $\{u_s\}$ *сходится сильно к* u *в* $L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть $m < n/q$ и $q^* < \lambda < nm(q-1)/(n-qm)$. Зафиксируем число λ_1 такое, что

$$\lambda < \lambda_1 < nm(q-1)/(n-qm). \tag{10}$$

Из утверждения (i) теоремы 1 следует, что $\{u_s\} \subset L^{\lambda_1}(\Omega)$ и

$$\forall\ s \in \mathbb{N} \qquad \|u_s\|_{L^{\lambda_1}(\Omega)} \leqslant C_1\,. \tag{11}$$

Хорошо известно (см., например [4, гл.7]), что пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$ компактно вложено в $L^1(\Omega)$. Отсюда и из слабой сходимости $\{u_s\}$ к u в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ следует, что

$$u_s \to u \quad \text{сильно в } L^1(\Omega), \tag{12}$$

$$u_s \to u \quad \text{по мере в } \Omega. \tag{13}$$

Из (13) с помощью теоремы Рисса получаем, что существует возрастающая последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$u_{s_k} \to u \quad \text{почти всюду в } \Omega. \tag{14}$$

Это вместе с (11) и леммой Фату позволяет заключить, что $u \in L^{\lambda_1}(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L^{\lambda_1}(\Omega)} \leqslant C_1\,. \tag{15}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$E_s = \{x \in \Omega : |u_s - u| \geqslant 1\}.$$

В силу (12) имеем

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{meas} E_s = 0. \tag{16}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_s - u|^\lambda\, dx = \int\limits_{\Omega\setminus E_s} |u_s - u|^\lambda\, dx + \int\limits_{E_s} |u_s - u|^\lambda\, dx. \tag{17}$$

Учитывая определение множества E_s и то, что $\lambda > 1$, получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus E_s} |u_s - u|^\lambda\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_s - u|\, dx. \tag{18}$$

Кроме того, используя неравенства Гельдера и Минковского, (11) и (15) устанавливаем, что

$$\int\limits_{E_s} |u_s - u|^\lambda\, dx \leqslant (\operatorname{meas} E_s)^{(\lambda_1-\lambda)/\lambda_1} \Bigg(\int\limits_{E_s} |u_s - u|^{\lambda_1}\, dx \Bigg)^{\lambda/\lambda_1} \leqslant$$

$$\leqslant (2C_1)^\lambda (\operatorname{meas} E_s)^{(\lambda_1-\lambda)/\lambda_1}. \tag{19}$$

Теперь из (17)–(19) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_s - u|^\lambda\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_s - u|\, dx + (2C_1)^\lambda (\operatorname{meas} E_s)^{(\lambda_1-\lambda)/\lambda_1}.$$

Отсюда и из (12), (16) следует сильная сходимость $\{u_s\}$ к u в $L^\lambda(\Omega)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Далее, пусть $m = n/q$ и $\lambda > q^*$. Фиксируем λ_1 такое, что $q^* < \lambda < \lambda_1$. Из замечания 1 следует, что $\{u_s\} \subset L^{\lambda_1}(\Omega)$ и

$$\forall\ s \in \mathbb{N} \qquad \|u_s\|_{L^{\lambda_1}(\Omega)} \leqslant C_2'\,. \tag{20}$$

Теперь включение $u \in L^\lambda(\Omega)$ и сильная сходимость $\{u_s\}$ к u в $L^\lambda(\Omega)$ устанавливаются таким же образом, как и выше, только вместо (11) используем (20). Значит, утверждение (ii) справедливо.

Пусть, наконец, $m > n/q$ и $\lambda > q^*$. Из утверждения (iii) теоремы 1 следует, что $\{u_s\} \subset L^\infty(\Omega)$ и

$$\forall\ s \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u_s| \leqslant C_3. \tag{21}$$

Отсюда и из (14) следует, что $u \in L^\infty(\Omega)$. Сильную сходимость $\{u_s\}$ к u в $L^\lambda(\Omega)$ устанавливаем таким же образом, как и в утверждении (i), только вместо (11) используем (21). Значит, утверждение (iii) справедливо. Теорема доказана. □

Замечание 2. Заметим, что в силу (2), (5) и (6) последовательность $\{u_s\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$. Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

3. О сильной сходимости в пространствах Лебега решений задач Дирихле в переменных областях. Пусть $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Рассмотрим последовательность задач Дирихле

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega_s, \\ \qquad D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega_s, \end{array} \right. \tag{P_s}$$

где A_α, $\alpha \in \Lambda$, – те же функции, что и в п. 1.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$, $u_s \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega_s)$ – обобщенное решение задачи (P_s), а $\widetilde{u}_s$ – его продолжение на Ω такое, что $\widetilde{u}_s = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_s$. Ясно, что $\widetilde{u}_s \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть $m > q^*/(q^* - 1)$ и функции g_2, g_3, f принадлежат $L^m(\Omega)$. Пусть последовательность $\{\widetilde{u}_s\}$ сходится слабо к функции u в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $m < n/q$ и $q^* < \lambda < nm(q-1)/(n-qm)$, то $\{\widetilde{u}_s\} \subset L^\lambda(\Omega)$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ и последовательность $\{\widetilde{u}_s\}$ сходится сильно к u в $L^\lambda(\Omega)$;*

(ii) *если $m = n/q$ и $\lambda > q^*$, то $\{\widetilde{u}_s\} \subset L^\lambda(\Omega)$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ и последовательность $\{\widetilde{u}_s\}$ сходится сильно к u в $L^\lambda(\Omega)$;*

(iii) *если $m > n/q$ и $\lambda > q^*$, то $\{\widetilde{u}_s\} \subset L^\infty(\Omega)$, $u \in L^\infty(\Omega)$ и последовательность $\{\widetilde{u}_s\}$ сходится сильно к u в $L^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

В заключение отметим, что результаты, аналогичные изложенным выше, могут быть получены для нелинейных уравнений произвольного четного порядка с усиленной эллиптичностью. Это можно сделать с помощью основной теоремы, установленной в [6].

Автор благодарит А.А.Ковалевского за полезные замечания.

1. *Ковалевский А.А., Войтович М.В.* О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №11. – С.1511-1524.
2. *Dal Maso G., Skrypnik I.V.* Asymptotic behaviour of nonlinear elliptic higher order equations in perforated domains // J. Anal. Math. – 1999. – **79**. – P.63-112.
3. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On the convergence of solutions of degenerate nonlinear elliptic high order equations // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. – 2002. – **49**. – P.335-360.
4. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 513p.
5. *Lions J.L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – 554p.
6. *Войтович М.В.* О свойствах интегрируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью // Труды ИПММ НАН Украины. – Донецк, 2007. – **15**. – С.3-14.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины
voytovich@bk.ru

Получено 01.12.08