УДК 517.984 + 519.210

©2008. **А.А. Амиршадян**

ГРАНИЧНАЯ ИНДЕФИНИТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА НЕВАНЛИННЫ-ПИКА

Построена операторная модель для граничной индефинитной интерполяционной задачи Неванлинны-Пика. Установлено взаимно однозначное соответствие между множеством решений задачи и множеством соответствующих минимальных самосопряженных расширений модельного оператора. В случае невырожденной матрицы Пика получено полное описание всех решений интерполяционной задачи.

Введение. В 1929 году Р.Неванлинна [20] рассмотрел задачу, получившую название граничной интерполяционной задачи. Такая задача характеризуется тем, что точки интерполяции принадлежат вещественной оси. Матричная дефинитная граничная задача Неванлинны-Пика была исследована в [9] методами В.П.Потапова. В работе [12] использовался операторный подход к скалярной дефинитной граничной задаче, имеющей не более счетного числа точек интерполяции на вещественной оси. Метод В.П.Потапова применялся в работе [8] при рассмотрении скалярной граничной задачи в классе Стилтьеса. Индефинитная скалярная задача была рассмотрена в [15]. В настоящей работе в рамках операторного подхода изучается граничная индефинитная задача в классах обобщенных неванлинновских матриц-функций. Аналогичная задача рассматривалась в [1], [3], [13].

Напомним необходимые определения и теоремы.

Определение 1. [17] Пара $n \times n$-матриц-функций $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$ голоморфных в области $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{O}} \subset \mathrm{C} \setminus \mathrm{R}$ называется обобщенной неванлинновской парой (или N_κ-парой, $\kappa \in \mathrm{Z}_+$) если: 1) ядро $\mathsf{N}_{\phi\psi}(\lambda, \mu) = \dfrac{\phi(\mu)^*\psi(\lambda) - \psi(\mu)^*\phi(\lambda)}{\lambda - \bar{\mu}}$ имеет κ отрицательных квадратов в $\mathcal{O}$; 2) $\psi(\bar{\lambda})^*\phi(\lambda) - \phi(\bar{\lambda})^*\psi(\lambda) = 0 \quad \forall\lambda \in \mathcal{O}$; 3) rank $\{\phi(\lambda)^* : \psi(\lambda)^*\} = n \quad \forall\lambda \in \mathcal{O}$. Каждая N_κ-пара $\{\phi, \psi\}$ допускает голоморфное продолжение в $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}$. Две пары $\{\phi, \psi\}$ и $\{\phi_1, \psi_1\}$ называются эквивалентными, если $\phi_1(\lambda) = \phi(\lambda)H(\lambda), \quad \psi_1(\lambda) = \psi(\lambda)H(\lambda)$ для некоторой голоморфной и обратимой в $\mathcal{O}$ матрицы функции $H(\lambda)$. Множество классов эквивалентности N_κ-пар обозначим $\widetilde{N}_\kappa(\mathrm{C}^\mathrm{n})$. Если $\tau(\lambda) = \{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\} \in \widetilde{N}_\kappa(\mathrm{C}^\mathrm{n})$ и $\phi(\lambda)$ – обратима, мы будем писать $\psi(\lambda)\phi(\lambda)^{-1} \in N_\kappa(\mathrm{C}^\mathrm{n})$. Будем рассматривать $N_\kappa(\mathrm{C}^\mathrm{n})$ как подмножество $\widetilde{N}_\kappa(\mathrm{C}^\mathrm{n})$, отождествляя матрицу $H(\lambda)$ с линейным отношением $\{I, H(\lambda)\}$.

Пусть S – замкнутое симметрическое линейное отношение в пространстве Понтрягина $(\Pi, [\cdot,\cdot])$, $\hat{\rho}(S)$ – множество точек регулярного типа отношения S и пусть дефектные подпространства $\mathcal{N}_\lambda = \ker(S^+ - \lambda)$ $(\lambda \in \hat{\rho}(S))$ конечномерны, а индексы дефекта $n_\pm(S) = \dim \mathcal{N}_\lambda \quad (\lambda \in \mathrm{C}_\pm \cap \hat{\rho}(\mathrm{S}))$ равны, $n_+(S) = n_-(S) = n(S) < \infty$. Напомним (см. [7] и [5], [11] в случае $\kappa = 0$) определение граничной тройки и функции Вейля симметрического отношения S, использующиеся при описании обобщенных резольвент линейного отношения S.

Определение 2. Совокупность $\{\mathrm{C^n}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где Γ_0, Γ_1 – линейные отображения из S^+ в $\mathrm{C^n}$ называется граничной тройкой линейного отношения S^+, если отображение $\Gamma : \widehat{f} \to \{\Gamma_0\widehat{f}, \Gamma_1\widehat{f}\}$ из S^+ в $\mathrm{C^n} \oplus \mathrm{C^n}$ является сюръективным и для всех $\widehat{f} = \{f, f'\}, \widehat{g} = \{g, g'\} \in S^+$ выполняется соотношение: $[f', g] - [f, g'] = (\Gamma_1\widehat{f}, \Gamma_0\widehat{g})_{\mathrm{C^n}} - (\Gamma_0\widehat{f}, \Gamma_1\widehat{g})_{\mathrm{C^n}}$.

Каждой граничной тройкой порождаются два самосопряженных расширения симметрического отношения S: $A_j := \ker\Gamma_j \quad (j = 0, 1)$. Матрица-функция $M(\lambda)$, определенная соотношением $M(\lambda)\Gamma_0\hat{f}_\lambda = \Gamma_1\hat{f}_\lambda \quad (\lambda \in \rho(A_0), \hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda)$ называется функцией Вейля симметрического отношения S, соответствующей граничной тройке $\{\mathrm{C^n}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. Функция Вейля $M(\lambda)$ корректно определена и голоморфна в $\rho(\widetilde{A})$. Пусть $\widetilde{A}$ – самосопряженное расширение симметрического отношения S, действующее в пространстве Понтрягина $\widetilde{\Pi} = \Pi[+]\Pi'$, P_Π – ортогональный проектор из $\widetilde{\Pi}$ на Π, $\kappa = \kappa^-(\Pi)$. Оператор-функция $\mathbf{R}_\lambda = P_\Pi(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}|_\Pi \quad (\lambda \in \rho(\widetilde{A}))$ называется обобщенной резольвентой отношения S. Расширение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^+$ отношения S в пространстве $\widetilde{\Pi}\,(\supseteq \Pi)$ называется минимальным, если: $\overline{\mathrm{span}}\{\Pi + (\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\Pi \mid \lambda \in \rho(\widetilde{A})\} = \widetilde{\Pi}$. Если $\kappa^-(\widetilde{\Pi}) = \widetilde{\kappa} \quad (\widetilde{\kappa} \in \mathrm{Z}_+)$, то обобщенную резольвенту $\mathbf{R}_\lambda$ относят к классу $\Omega_{\widetilde{\kappa}}(S)$. Расширение $\widetilde{A}$ называют регулярным, если выполнено условие минимальности и $\kappa^-(\widetilde{\Pi}) = \kappa$.

Теорема 1. (*[6], [17]*) *Пусть S – замкнутое симметрическое линейное отношение в пространстве Понтрягина $\Pi, \kappa = \kappa^-(\Pi)$ и $\{\mathrm{C^n}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка отношения S^+, $M(\lambda)$ – соответствующая функция Вейля, $\lambda_0 \in \rho(A_0) \cap \mathrm{C}_+$. Тогда: 1) формула $\mathbf{R}_\lambda = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\phi(\lambda)(\psi(\lambda) + M(\lambda)\phi(\lambda))^{-1}\gamma(\bar{\lambda})^+ \quad (\lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(\widetilde{A}))$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством обобщенных резольвент $\mathbf{R}_\lambda \in \Omega_{\widetilde{\kappa}}(S)$, голоморфных в точке λ_0 и множеством $N_{\widetilde{\kappa}-\kappa}$-пар $\{\phi, \psi\}$ голоморфных в точке λ_0 и таких, что $det(\psi(\lambda_0) + M(\lambda_0)\phi(\lambda_0)) \neq 0$.*

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма

Лемма 1. (*[4]*) *Пусть $\widetilde{A}$ – самосопряженное отношение в пространстве Понтрягина $\widetilde{\Pi}$, векторы f, g принадлежат $\mathcal{R}(\widetilde{A} - z_0)$ для некоторого $z_0 \in \mathrm{R} \setminus \sigma_p(\widetilde{A})$. Тогда существуют некасательные пределы $\lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} z_0}((\widetilde{A} - z)^{-1}f, g) = ((\widetilde{A} - z_0)^{-1}f, g)$, $\lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} z_0}((\widetilde{A} - z)^{-1}f, (\widetilde{A} - z)^{-1}g) = ((\widetilde{A} - z_0)^{-1}f, (\widetilde{A} - z_0)^{-1}g)$.*

Теорема 2.*([1], [3]) Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка линейного отношения S^+. Если $\widetilde{A} = \widetilde{A}^+$ – минимальное самосопряженное расширение оператора S, действующее в пространстве Понтрягина $\widetilde{\Pi} \supseteq \Pi$ $(\widetilde{\kappa} := \kappa^-(\widetilde{\Pi}) \geq \kappa := \kappa^-(\Pi))$, и $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$–$N_{\widetilde{\kappa}-\kappa}$ – пара, соответствующая расширению $\widetilde{A}$ в силу формулы обобщенных рзольвент. Тогда: 1) равномерная положительность (отрицательность) подпространства $\ker(\widetilde{A} - \lambda_0)$ $(\lambda_0 \notin \sigma_p(A_0))$ эквивалентна условию $\lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} \lambda_0}(\lambda - \lambda_0)\phi(\lambda)(M(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1} \geq 0 \ (\leq 0)$. 2) Если $\mathrm{mul}\, A_0 = \{0\}$, то равномерная положительность (отрицательность) подпространства $\mathrm{mul}\, \widetilde{A}$ эквивалентна условию $\lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} \infty} \dfrac{\phi(\lambda)(M(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1}}{\lambda} \geq 0 \quad (\leq 0)$. 3) Условие $\lambda_0 \notin \sigma_p(\widetilde{A})$ эквивалентно* *условию* $\lim_{\lambda \overset{\wedge}{\longrightarrow} \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\phi(\lambda)(M(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1} = 0.$

Замечание 1. В том случае, когда Π, $\widetilde{\Pi}$ – гильбертовы пространства и $\lambda_0 = \infty$, аналогичный вариант равенства из пункта 3) имеется в [11]. Как было показано в [10], если $\lambda_0 \in \rho(A_0) \cap \mathrm{R}$, $M'(\lambda_0) > 0$, то для любого регулярного самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ подпространства $\ker(\widetilde{A} - \lambda_0)$ являются равномерно положительными.

1. Постановка задачи и модельный оператор. Рассматривается следующая граничная интерполяционная **Задача** ∂IP_κ. Даны вещественные точки z_j и симметрические матрицы W_j, D_j $(j = 1, .., m)$. Требуется найти матрицу-функцию $F(\lambda) \in N_\kappa(\mathrm{C}^{\mathrm{n}})$, удовлетворяющую условиям:

$$\lim_{\lambda \overset{\wedge}{\longrightarrow} z_j} F(\lambda) = W_j \qquad (j = 1, .., m) \tag{1}$$

$$\lim_{\lambda \overset{\wedge}{\longrightarrow} z_j} F'(\lambda) \leq D_j \qquad (j = 1, .., m). \tag{2}$$

Выше предполагается, что некасательные пределы в (1), (2) существуют.

При получении основной теоремы используется функциональная модель М.Г.Крейна, Г.Лангера [18] и Б.С-Надя, А.Кораньи [19]. В скалярном случае такая модель была использована в [12] при исследовании граничной интерполяционной задачи в классах Неванлинны. С данными задачи свяжем блочную матрицу Пика $\mathbf{P} = (P_{jk})_{j,k=1}^m$, имеющую вид

$$P_{jk} = \begin{cases} \frac{W_j - W_k}{z_j - z_k}, \text{ при } j \neq k; \\ D_j, \text{ при} j = k. \end{cases}$$

В дальнейшем считаем, что $\det \mathbf{P} \neq 0$. В качестве модельного пространства, рассмотрим пространство функций Π

$$\Pi = \{f(t)\,|f(t) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j f_j = \sum_{j=1}^m \frac{t - z_1}{t - z_j} f_j, \ f_j \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}, \mathrm{t} \in \mathrm{C} \backslash \{\mathrm{z}_1, .., \mathrm{z}_\mathrm{m}\}\}$$

со скалярным произведением $[f(t), g(t)] = \sum_{j,k}^m g_k^* P_{jk} f_j$. Пространство Π является пространством Понтрягина и $\kappa^-(\Pi) = \mathrm{sq}_-(\mathbf{P})$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $V = (I_n, ..., I_n)$, $W = (W_1, ..., W_m)$, $\Phi_z = Z\mathbf{P} + V^*W - z\mathbf{P}$, $Z = \mathrm{diag}(z_1 I_n, ..., z_m I_n)$ $(V, W \in [\mathrm{C}^{\mathrm{mn}}, \mathrm{C}^{\mathrm{n}}], Z \in [\mathrm{C}^{\mathrm{mn}}, \mathrm{C}^{\mathrm{mn}}])$. Матрицы V, W, Z называются данными Задачи ∂IP_κ. Непосредственно проверяется, что справедливо уравнение Ляпунова $\mathbf{P}Z - Z^*\mathbf{P} = V^*W - W^*V$. На подпространстве $\mathcal{D}(S) = \{f(t)| \sum_{j=1}^m f_j = 0\}$ определим модельный оператор S умножения на независимую переменную $Sf(t) = tf(t) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j z_j f_j$. Оператор S является неплотно заданным симметрическим оператором с индексами дефекта $n_+(S) = n_-(S) = n$. Пусть G – оператор вложения C^{n} в Π, то есть $Gf := \varepsilon_1 f$ $(f \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}})$.

Следующая теорема является основной. Она устанавливает биективное соответствие между всеми решениями Задачи ∂IP_κ и соответствующими минимальными самосопряженными расширениями модельного оператора S.

Теорема 3. *Пусть матрица* $\mathbf{P}$ *невырождена и* $\mathrm{sq}_-(\mathbf{P}) \le \kappa$. *Для того, чтобы функция* $F(\lambda)$ *являлась решением Задачи* ∂IP_κ, *необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$F(\lambda) = W_1 + (\lambda - z_1)G^+(I + (\lambda - z_1)(\widetilde{A} - \lambda)^{-1})G, \tag{3}$$

где $\widetilde{A}$ $(= \widetilde{A}^+)$ – *произвольное минимальное самосопряженное расширение оператора* S, *действующее в пространстве Понтрягина* $\widetilde{\Pi} \supseteq \Pi$ $(\kappa^-(\widetilde{\Pi}) = \kappa)$, *такое что подпространства* $\ker(\widetilde{A} - z_j)$ *являются равномерно положительными* $(j = 1, .., m)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\widetilde{A}$ – произвольное минимальное самосопряженное расширение оператора S, такое что подпространства $\ker(\widetilde{A} - z_j)$ $(j = 1, .., m)$ равномерно положительны. Покажем, что функция вида (3) является решением Задачи ∂IP_κ. Проверим выполнение интерполяционных условий для точек z_j $(j = 2, ..., m)$. Так как подпространство $\widetilde{\Pi}''_j := \ker(\widetilde{A} - z_j)$ равномерно положительно, то пространство $\widetilde{\Pi}$ и линейное отношение $\widetilde{A}$ можно представить в виде

$$\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}'_j[+]\widetilde{\Pi}''_j, \ \ \widetilde{A} = \widetilde{A}'_j[+]\widetilde{A}''_j.$$

В соответствии с таким разложением пространства $\widetilde{\Pi}$ линейное отношение $(\widetilde{A} - z)$ $(z \in \rho(\widetilde{A}))$ имеет вид:

$$(\widetilde{A} - z) = \mathrm{diag}(\widetilde{A}'_j - z, \widetilde{A}''_j - z).$$

Если P'_j, P''_j – ортопроекторы на $\widetilde{\Pi}'_j$, $\widetilde{\Pi}''_j$, то из последнего разложения следует

$$P'_j(\widetilde{A} - z)^{-1}f_1 = (\widetilde{A}'_j - z)^{-1}f_1, \ \ \forall f_1 \in \widetilde{\Pi}'_j.$$

Для любого j $(= 2, ...m)$ верно равенство

$$(\widetilde{A} - z_j)(\varepsilon_j - \varepsilon_1)f = (z_j - z_1)\varepsilon_1 f,$$

что означает $(z_j - z_1)\varepsilon_1 f \in \mathcal{R}(\widetilde{A}'_j - z_j)$ и, следовательно, $\varepsilon_1 f \in \widetilde{\Pi}'_j$. Так как $(\widetilde{A}'_j - z_j)^{-1}$ оператор, то имеем

$$(I + (z_j - z_1)(\widetilde{A}'_j - z_j)^{-1})\varepsilon_1 f = P'_j\varepsilon_1 f. \tag{4}$$

Теперь выражение $(F(z)f, g)$ для f, $g \in \mathrm{C}^n$ примет вид

$$\begin{aligned}
&(F(z)f, g) = (W_1 f, g) + (z - z_1)[(I + (z - z_1)(\widetilde{A} - z)^{-1})Gf, Gg]_{\widetilde{\Pi}} = \\
&(W_1 f, g) + (z - z_1)[P'_j(I + (z - z_1)(\widetilde{A} - z)^{-1})Gf, Gg]_{\widetilde{\Pi}'_j} = \\
&(W_1 f, g) + (z - z_1)[(I + (z - z_1)(\widetilde{A}'_j - z)^{-1})Gf, Gg]_{\widetilde{\Pi}'_j}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Устремляя в последнем равенстве $z \xrightarrow{\wedge} z_j$, получим:

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \xrightarrow{\wedge} z_j} (F(z)f, g) = (W_1 f, g) + (z_j - z_1)(D_1 f, g) + (z_j - z_1)[P'_j(\varepsilon_j - \varepsilon_1)f, Gg] = \\
&(W_1 f, g) + (z_j - z_1)(D_1 f, g) + (z_j - z_1)[\varepsilon_j f, \varepsilon_1 g] - (z_j - z_1)[\varepsilon_1 f, \varepsilon_1 g] = \\
&(W_1 f, g) + (z_j - z_1)\left(\frac{W_j - W_1}{z_j - z_1} f, g\right) = (W_j f, g).
\end{aligned}$$

Из тождества

$$\left(\frac{F(z)-F(\lambda)^*}{z-\bar{\lambda}}f,f\right)=[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})Gf,(I+(\lambda-z_1)(\widetilde{A}-\lambda)^{-1})Gf],\quad (6)$$

проверяемого непосредственно, формул (4), (5) и равномерной положительности подпространства $\ker(\widetilde{A}-z_j)$ следует

$$\lim_{z,\lambda\xrightarrow{\wedge}z_j}\left(\frac{F(z)-F(\lambda)^*}{z-\bar{\lambda}}f,f\right)=$$
$$\lim_{z,\lambda\xrightarrow{\wedge}z_j}[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}'_j-z)^{-1})Gf,(I+(\lambda-z_1)(\widetilde{A}'_j-\lambda)^{-1})Gf]_{\widetilde{\Pi}'_j}=$$
$$[P'_j\varepsilon_jf,P'_j\varepsilon_jf]\leq[P'_j\varepsilon_jf,P'_j\varepsilon_jf]+[P''_j\varepsilon_jf,P''_j\varepsilon_jf]=[\varepsilon_jf,\varepsilon_jf]=(D_jf,f).$$

Таким образом, мы показали что выполняются интерполяционные условия для точек z_j $(j=2,...,m)$. Проверим интерполяционные условия в точке z_1. Рассмотрим разложение пространства $\widetilde{\Pi}$ вида $\widetilde{\Pi}=\widetilde{\Pi}'_1[+]\widetilde{\Pi}''_1$, где $\widetilde{\Pi}''_1=\ker(\widetilde{A}-z_1)$. Равенство $(\widetilde{A}-z_1)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)f=(z_1-z_2)\varepsilon_2f$, означает, что $\varepsilon_2f\in\mathcal{R}(\widetilde{A}-z_1)=\mathcal{R}(\widetilde{A}_1-z)\in\widetilde{\Pi}'_1$. Таким образом, верно $(I+(z_1-z_2)(\widetilde{A}'_1-z_1)^{-1})\varepsilon_2f=P'_1\varepsilon_1f$. Используя равенство:

$$(I+(\lambda-z_1)(\widetilde{A}-\lambda)^{-1})\varepsilon_1f=(I+(\lambda-z_j)(\widetilde{A}-\lambda)^{-1})\varepsilon_jf,\quad (7)$$

перепишем выражение $(F(z)f,g)$, $f,g\in\mathrm{C}^n$ в виде

$$(F(z)f,g)=(W_1f,g)+(z-z_1)[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})Gf,Gg]=$$
$$(W_1f,g)+(z-z_1)[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,P'_1\varepsilon_1g+P''_1\varepsilon_1g]=$$
$$(W_1f,g)+(z-z_1)[P'_1(I+(z-z_2)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_2f,\varepsilon_1g]+$$
$$(z-z_1)[P''_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,\varepsilon_1g]=$$
$$(W_1f,g)+(z-z_1)[(I+(z-z_2)(\widetilde{A}'_1-z)^{-1})\varepsilon_2f,\varepsilon_1g]+$$
$$(z-z_1)[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}''_1-z)^{-1})P''_1\varepsilon_1f,\varepsilon_1g].$$

Так как последнее слагаемое обращается в 0, то получаем $\lim_{z\xrightarrow{\wedge}z_1}(F(z)f,g)=(W_1f,g)$. Для завершения доказательства, воспользуемся равенством (6) и соотношением (7):

$$\left(\frac{F(z)-F(z)^*}{z-\bar{z}}f,g\right)=[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f]=$$
$$[P'_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,P'_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f]+$$
$$[P''_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,P''_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f]=$$
$$[P'_1(I+(z-z_2)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_2f,P'_1(I+(z-z_2)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_2f]+$$
$$[P''_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f,P''_1(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\varepsilon_1f].\quad (8)$$

Так как для для всех $z \in \rho(\widetilde{A})$ верно

$$P_1''(I + (z - z_1)(\widetilde{A} - z)^{-1})\varepsilon_1 f = (I + (z - z_1)(\widetilde{A}_1'' - z)^{-1})P_1''\varepsilon_1 f = 0,$$

то равенство (8) принимает вид

$$\left(\frac{F(z) - F(z)^*}{z - \bar{z}} f, g\right) = [P_1'(I + (z - z_2)(\widetilde{A} - z)^{-1})\varepsilon_2 f, P_1'(I + (z - z_2)(\widetilde{A} - z)^{-1})\varepsilon_2 f].$$

В последнем соотношении, устремляя $z \xrightarrow{\wedge} z_1$, получаем

$$\lim_{z \xrightarrow{\wedge} z_1} (F'(z)f, f) = (P_1'\varepsilon_1 f, P_1'\varepsilon_1 f) \leq$$
$$(P_1'\varepsilon_1 f, P_1'\varepsilon_1 f) + (P_1''\varepsilon_1 f, P_1''\varepsilon_1 f) = (\varepsilon_1 f, \varepsilon_1 f) = (D_1 f, f).$$

Таким образом, интерполяционные условия (1), (2) выполняются во всех точках z_j $(j = 1, ..., m)$. Равенство (6) влечет, что $F(\lambda) \in N_\kappa(\mathrm{C^n})$.

Необходимость. Пусть $F(z)$ является решением Задачи ∂IP_κ. Как функция класса N_κ она допускает представление [17]:

$$F(z) = F(\bar{\lambda}) + (z - \bar{\lambda})\Gamma^+(I + (z - \lambda)(A - z)^{-1})\Gamma, \quad (z, \lambda \in \rho(A)), \tag{9}$$

где A – самосопряженное отношение в некотором пространстве Понтрягина Π_A, $\kappa^-(\Pi_A) \geq \kappa$, Γ – отображение из $\mathrm{C^n}$ в Π_A. Представление (9) можно выбрать Γ – минимальным, то есть считать, что выполняется условие:

$$\Pi_A = \overline{\mathrm{span}}\,\{\Gamma_z f := (I + (z - \lambda)(A - z)^{-1})\Gamma f \ \mid f \in \mathrm{C^n}, \ \mathrm{z} \in \rho(\mathrm{A})\}. \tag{10}$$

При выполнении (10) верно равенство $\kappa^-(\Pi_A) = \kappa$. Из тождества Гильберта следует равенство

$$[\Gamma_z f, \Gamma_\lambda g]_{\Pi_A} = \frac{(F(z)f, g) - (F(\lambda)^* f, g)}{z - \bar{\lambda}} \qquad (\lambda, z \in \rho(A), \ f, \ g \in \mathrm{C^n}).$$

Так как элементы $\Gamma_\lambda f$, $\lambda \in \rho(A)$ плотны в Π_A и $F(z)$ является решением задачи, то из существования пределов (1), (2) следует, что существуют пределы $\Gamma_{z_j} f := \lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} z_j} \Gamma_z f$ $(j = 1, ..., m)$ и, следовательно,

$$[\Gamma_{z_j} f, \Gamma_{z_j} g]_{\Pi_A} = \lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} z_j} (F'(z)f, g) \leq (D_j f, g), \ \ (f, \ g \in \mathrm{C^n});$$

$$[\Gamma_{z_j} f, \Gamma_{z_k} g]_{\Pi_A} = \lim_{z \xrightarrow{\wedge} z_j \lambda \xrightarrow{\wedge} z_k} \frac{(F(z)f, g) - (F(\lambda)^* f, g)}{z - \bar{\lambda}} =$$
$$\frac{(W_j f, g) - (W_k f, g)}{z_j - z_k} = (P_{jk} f, g), \ \ (f, \ g \in \mathrm{C^n}).$$

Построим вложение модельного пространства Π в некоторое пространство Понтрягина, связанное с представлением (9). Для каждого $j\ (=1,...,m)$ определим подпространства $\mathcal{H}_j$ следующим образом

$$\mathcal{H}_j := \{f \in \mathrm{C^n} \ \mid [\Gamma_{z_j}f, \Gamma_{z_j}f]_{\Pi_A} < (D_jf, f)\} \ \ (j=1,..,m). \tag{11}$$

Пусть P_j – ортопроектор из $\mathrm{C^n}$ на $\mathcal{H}_j$, Z_s – совокупность тех точек z_j, для которых $\mathcal{H}_j \neq \{0\}$. С каждым $z_j \in Z_s$ свяжем символ e_j и рассмотрим пространство $\mathcal{E}$ формальных сумм вида $\sum_j e_j P_j f_j$, $f_j \in \mathrm{C^n}$. Определим в $\mathcal{E}$ скалярное произведение

$$[e_jP_jf_j, e_kP_kf_k] := 0, \ \ j \neq k$$

$$[e_jP_jf_j, e_jP_jf_j] := (D_jf_j, f_j)_{\mathrm{C^n}} - [\Gamma_{z_j}f_j, \Gamma z_j f_j]_{\Pi_A}, \ \ j=k.$$

Пространство $\mathcal{E}$ в силу (11) является пространством Гильберта. Теперь, в пространстве $\widetilde{\Pi}_A := \Pi_A \oplus \mathcal{E}$ рассмотрим линейное отношение

$$\widetilde{A} := A[+]A_{\mathcal{E}} = A\,[+]\,\{\,\{\sum_j e_jP_jf_j\ ,\ \sum_j e_jz_jP_jf_j\} \mid z_j \in Z_s\}. \tag{12}$$

Линейное отношение $\widetilde{A}$ является самосопряженным в $\widetilde{\Pi}_A$. Определим отображение $\widetilde{\Gamma}_{z_j}$ из C^n в $\widetilde{\Pi}_A = \Pi_A \oplus \mathcal{E}$ равенством

$$\widetilde{\Gamma}_{z_j}f := \begin{cases} \Gamma_{z_j}f, & \text{если } z_j \notin Z_s \\ \Gamma_{z_j}f + e_jP_jf, & \text{если } z_j \in Z_s. \end{cases}$$

На подпространстве $\mathcal{P} := \overline{\mathrm{span}}\,\{\widetilde{\Gamma}_{z_j}f_j \mid f_j \in \mathrm{C^n},\ \mathrm{j}=1,..,\mathrm{m}\}$ определим симметрический оператор S_A

$$S_A = \{\{\sum_{j=1}^m \widetilde{\Gamma}_{z_j}f_j,\ \sum_{j=1}^m z_j\widetilde{\Gamma}_{z_j}f_j\} \mid \sum_{j=1}^m f_j = 0\}.$$

Оператор S_A является симметрическим и унитарно эквивалентным модельному оператору S. Для доказательства унитарной эквивалентности достаточно рассмотреть унитарное отображение U из модельного пространства Π в пространство $\widetilde{\Pi}_A$, определяемое равенствами $U\varepsilon_jf_j := \widetilde{\Gamma}_{z_j}f_j$ $(f_j \in \mathrm{C^n},\ \mathrm{j}=1,...\mathrm{m})$. Покажем, что $\widetilde{A}$ является расширением симметрического оператора S_A. Так как

$$\Gamma_z f = (I + (z-\lambda)(A-z)^{-1})\Gamma f,$$

то для всех $z \in \rho(A)$, и любого $f \in \mathrm{C^n} : \{(\Gamma_z - \Gamma)f,\ (z\Gamma_z - \lambda\Gamma)f\} \in A \subset \widetilde{A}$. Отсюда, в силу замкнутости линейного отношения A следует, что

$$\{(\widetilde{\Gamma}_{z_j} - \Gamma)f,\ (z_j\widetilde{\Gamma}_{z_j} - \lambda\Gamma)f\} \in \widetilde{A}\ \ (j=1,...,m). \tag{13}$$

Покажем, что $\widetilde{A}$ является минимальным расширением оператора S_A. Для доказательства минимальности необходимо показать, что

$$\widetilde{\Pi}_A = \overline{\operatorname{span}}\,\{\widetilde{\Gamma}_{z_j}f,\ (\widetilde{A}-z)^{-1}\widetilde{\Gamma}_{z_j}h \ \mid\ z\in\rho(\widetilde{A}),\ f,h\in \mathrm{C}^{\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=1,..,\mathrm{m}\}. \tag{14}$$

Достаточно показать, что справедливо вложение

$$\widetilde{\Pi}_A \subseteq \overline{\operatorname{span}}\,\{\widetilde{\Gamma}_{z_j}f,\ (\widetilde{A}-z)^{-1}\widetilde{\Gamma}_{z_j}h \ \mid\ z\in\rho(\widetilde{A}),\ f,h\in \mathrm{C}^{\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=1,..,\mathrm{m}\}.$$

Из (13) выводим $\{(\widetilde{\Gamma}_{z_j}-\Gamma_z)f,\ (z_j\widetilde{\Gamma}_{z_j}-z\Gamma_z)f\}\in\ \widetilde{A}$, что эквивалентно равенству: $\Gamma_z f=(z-z_j)(\widetilde{A}-z)^{-1}\widetilde{\Gamma}_{z_j}f+\widetilde{\Gamma}_{z_j}f$. Последнее означает, что элементы $\Gamma_z f$ принадлежат правой части (14). Тогда, в силу Γ – минимальности отношения A пространство Π_A принадлежит правой части (14). Из равенств: $e_jP_jf=\widetilde{\Gamma}_{z_j}f-\Gamma_{z_j}f,\ \ z_j\in Z_s$, сразу следует, что пространство $\mathcal{E}$ принадлежит правой части (14). В силу построенного унитарного отображения U, имеем $U\varepsilon_1 f=\widetilde{\Gamma}_{z_1}f$, и функцию $F(z)$ можем записать в виде:

$$(F(z)f,f)=(W_1f,f)+(z-z_1)[(I+(z-z_1)(\widetilde{A}-z)^{-1})\widetilde{\Gamma}_{z_1}f,\widetilde{\Gamma}_{z_1}f]_{\widetilde{\Pi}_A}.$$

Покажем, что подпространства $\ker(\widetilde{A}-z_j)$ $(j=1,..,m)$ являются равномерно положительными. Так как функция $F(z)$ является решением задачи, то существуют пределы $\Gamma_{z_j}f$ для всех $f\in\mathrm{C}^{\mathrm{n}}$, $j=1,\ldots,m$ и $\left\{\Gamma_z f-\Gamma_{z_j}f,(z-z_j)\Gamma_z f\right\}\in(A-z_j),\ \ (j=1,...,m)$. Таким образом, $\mathrm{ran(A-z_j)}$ содержит все векторы вида $\Gamma_z f,\ z\in\rho(A)$, $f\in C^n$ и, в силу Γ-минимальности расширения A, линеал $\mathrm{ran(A-z_j)}$ плотен в Π_A. Поэтому подпространства $\mathrm{ker(A-z_j)}$ тривиальны и, в силу (12), подпространства $\ker(\widetilde{\mathrm{A}}-\mathrm{z_j})=\ker(\mathrm{A}_{\mathcal{E}}-\mathrm{z_j})$ являются равномерно положительными для всех $j=1,\ldots,m$. $\square$

2. Сопряженное отношение S^+ и граничная тройка. В модельном пространстве Π рассмотрим операторы $\mathcal{P}(z)$ и $\mathcal{P}(\infty)$ отображающие функцию $f(t)=\sum_j\varepsilon_j(t)f_j\in\Pi$ в $\mathcal{P}(z)f(t):=f(z)=\sum_j\varepsilon_j(z)f_j,\ \ z\in \mathrm{C}\backslash\{z_1,...,z_m\}$, и $\mathcal{P}(\infty)f(t):=\sum_j f_j$, соответственно. Положим $\mathcal{P}_1f(t):=\sum_j W_jf_j$, и определим самосопряженное расширение A_0 оператора S формулой $A_0f(t):=\sum_j\varepsilon_jz_jf_j+\mathcal{P}_1^+\mathcal{P}(\infty)f(t)=\sum_j\varepsilon_j(t)z_jf_j+\mathcal{P}_1^+(\sum_j f_j)$.

Предложение 1. Пусть матрица Пика $\mathbf{P}$ невырождена. 1) Сопряженное отношение S^+ оператора S можно представить в виде:

$$S^+=\{f(t),A_0f(t)+\mathcal{P}(\infty)^+l\ \mid\ f(t)\in\Pi,l\in\mathrm{C}^{\mathrm{n}}\}.$$

2) Совокупность $\{\mathrm{C}^{\mathrm{n}},\Gamma_1,\Gamma_0\}$, определенная для $\widehat{f}=\{f(t),A_0f(t)+\mathcal{P}(\infty)^+l\}\in S^+$ соотношениями:

$$\Gamma_1\widehat{f}(t):=\mathcal{P}(\infty)f(t)=\sum_j f_j,\quad \Gamma_0\widehat{f}(t):=-l, \tag{15}$$

образует граничную тройку отношения S^+.

Рассмотрим разложение пространства Π вида:

$$\Pi = \mathrm{Ran}(S - z)\dot{+}\mathrm{C}^{\mathrm{n}},\ \ z \in \mathrm{C} \setminus \{z_2, ..., z_m\}.$$

Заметим, что множество $\mathrm{C} \setminus \{z_2, ..., z_m\}$ является множеством $\mathcal{L}(= \mathrm{C}^{\mathrm{n}})$ – регулярных точек оператора S. В качестве косого проектора из Π на C^{n} возьмем оператор $\mathcal{P}(z)$. Определим оператор-функцию $Q(z)f(t) := G^{+}(S - z)^{-1}(I - \mathcal{P}(z))f(t),\ z \in \mathrm{C} \setminus \{z_2, ..., z_m\}$.

Теорема 4. *Пусть подпространство $\mathcal{L} = \mathrm{C}^n \subset \Pi$ выбрано в качестве масштабного подпространства. Тогда для $z \in \mathrm{C} \setminus \{z_2, ..., z_m\}$:*

1. $\mathcal{P}(\infty) = V,\ \mathcal{P}_1 = W,\ G^{+} = (I_n, 0, ..., 0)\mathbf{P} = \sum_j P_{j1}$,
   $\mathcal{P}(z) = -(z - z_1)V(Z - z)^{-1},\ Q(z) = [(I_n, 0..., 0)\mathbf{P} - P_{11}V](Z - z)^{-1}$.

2. *Элементы $W_{ij}(z)$ $(i, j = 1, 2)$ $\mathcal{L}$-резольвентной матрицы $W(z)$, соответствующей граничной тройке (15), имеют вид*

$$\begin{aligned} W_{11}(z) &= P_{11} - [(I_n, 0, ..., 0)\mathbf{P} - P_{11}V](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^{*},\\ W_{12}(z) &= -[(I_n, 0, ..., 0)\mathbf{P} - P_{11}V](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^{*},\\ W_{21}(z) &= (z_1 - z)[I + V(Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^{*}],\\ W_{22}(z) &= (z_1 - z)V(Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^{*}. \end{aligned} \tag{16}$$

3. *Функция Вейля $M(z)$ и её производная $M'(z)$ соответственно равны:*

$$M(z) = V(Z\mathbf{P} + V^{*}W - z\mathbf{P})^{-1}V^{*} = V\Phi_z^{-1}V^{*},\ \ M'(z) = V\Phi_z^{-1}\mathbf{P}\Phi_z^{-1}V^{*}. \tag{17}$$

3. Описание решений. Определим матрицу решений $\Omega(\lambda)$:

$$\Omega(\lambda) = (\Omega_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{2} = I_{2n} + \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} (Z - \lambda)^{-1}\, \mathbf{P}^{-1}\, (-V^{*}, W^{*}). \tag{18}$$

Вид матрицы решений (18) для задачи ∂IP_{κ} совпадает с хорошо известным видом матрицы решений классической интерполяционной проблемы Неванлинны-Пика [14]. Используя формулу для описания $\mathcal{L}$ – резольвент (см.[14]), получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{sq}_{-}(\mathbf{P}) = \kappa$, $\det \Phi_{z_j} \neq 0$ *(j=1,..,m). Тогда формула*

$$F(\lambda) = (\Omega_{12}(\lambda)\psi(\lambda) - \Omega_{11}(\lambda)\phi(\lambda))(\Omega_{22}(\lambda)\psi(\lambda) - \Omega_{21}(\lambda)\phi(\lambda))^{-1} \tag{19}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством решений задачи $\partial IP_{\widetilde{\kappa}}$ и множеством $N_{\widetilde{\kappa}-\kappa}$-пар $\{\phi(\lambda), \psi(\lambda)\}$, голоморфных в точках z_j $(j = 1, ..., m)$ и таких что

$$\det(\Omega_{22}(z)\psi(z) - \Omega_{21}(z)\phi(z)) \not\equiv 0$$

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\wedge} z_j} (\lambda - z_j)\phi(\lambda)(V\Phi_\lambda^{-1}V^*\phi(\lambda) + \psi(\lambda))^{-1} \geq 0 \qquad (j = 1, .., m). \tag{20}$$

Доказательство. Учитывая вид (3) функции-решения, достаточно применить формулу, описывающую множество $\mathcal{L}$ – резольвент

$$F(\lambda) = (\widetilde{\Omega}_{11}(\lambda)\psi(\lambda) + \widetilde{\Omega}_{12}(\lambda)\varphi(\lambda))(\widetilde{\Omega}_{21}(\lambda)\psi(\lambda) + \widetilde{\Omega}_{22}(\lambda)\varphi(\lambda))^{-1},$$

где

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}_{11}(\lambda) = (\lambda - z_1)^2 W_{11}(\lambda) + ((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)W_{21}(\lambda),\\
&\widetilde{\Omega}_{12}(\lambda) = (\lambda - z_1)^2 W_{12}(\lambda) + ((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)W_{22}(\lambda),\\
&\widetilde{\Omega}_{21}(\lambda) = W_{21}(\lambda), \ \ \widetilde{\Omega}_{22}(\lambda) = W_{22}\lambda.
\end{aligned}$$

Вид $\widetilde{\Omega}_{21}(\lambda), \widetilde{\Omega}_{22}(\lambda)$ установлен в (16). Найдем вид $\widetilde{\Omega}_{11}(\lambda), \widetilde{\Omega}_{12}(\lambda)$. Предварительно докажем тождества

$$[(W_1, ..., W_1) - (z_1 - z)(P_{11}, ..., P_{1m})](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* = -W_1 + W(Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^*,$$

$$[(W_1, ..., W_1) - (z_1 - z)(P_{11}, ..., P_{1m})](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* = -I_n + W(Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^*. \tag{21}$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned}
&[(W_1, ..., W_1) - (W_1, ..., W_m) - (z_1 - z)(P_{11}, ..., P_{1m})](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* =\\
&-(P_{11}, \frac{W_2 - W_1}{z_2 - z_1}, ..., \frac{W_m - W_1}{z_m - z_1})\mathbf{P}^{-1}W^* = -(I_n, 0, ..., 0)W^* = -W_1.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется равенство (21).

$$\begin{aligned}
&[(W_1, ..., W_1) - (W_1, ..., W_m) - (z_1 - z)(P_{11}, ..., P_{1m})](Z - z)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* =\\
&-(P_{11}, \frac{W_2 - W_1}{z_2 - z_1}, ..., \frac{W_m - W_1}{z_m - z_1})\mathbf{P}^{-1}V^* = -(I_n, 0, ..., 0)V^* = -I_n.
\end{aligned}$$

Теперь получаем:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}_{11}(\lambda) = (\lambda - z_1)^2 W_{11}(\lambda) + ((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)W_{21}(\lambda) =\\
&(\lambda - z_1)^2(P_{11} - Q(\lambda)\mathbf{P}^{-1}W^*) + ((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)(z_1 - \lambda)(I + V(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^*) =\\
&(\lambda - z_1)^2(P_{11} - ((I_n, 0, 0, ..., 0)\mathbf{P} - P_{11}V)(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^*) +\\
&((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)(z_1 - \lambda)I + ((\lambda - z_1)P_{11} + W_1)(z_1 - \lambda)V(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* =\\
&(z_1 - \lambda)^2 P_{11} - (z_1 - \lambda)^2((I_n, 0, ..., 0)\mathbf{P} - P_{11}V)(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* - (z_1 - \lambda)^2 P_{11} +\\
&W_1(z_1 - \lambda) - (z_1 - \lambda)^2 P_{11}V(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* + (z_1 - \lambda)W_1V(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* =\\
&(z_1 - \lambda)(W_1V - (z_1 - \lambda)(I_n, 0, ..., 0)\mathbf{P})(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^* + (z_1 - \lambda)W_1 =\\
&(z_1 - \lambda)(-W_1 + W(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^*) + (z_1 - \lambda)W_1 = (z_1 - \lambda)W(Z - \lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}W^*.
\end{aligned}$$

Найдем элемент $\widetilde{\Omega}_{12}(\lambda)$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Omega}_{12}(\lambda) = (z_1-\lambda)^2 W_{12}(\lambda) + (W_1 - (z_1-\lambda)P_{11})W_{22}(\lambda) = \\ &-(z_1-\lambda)^2((I_n,0,...,0)\mathbf{P} - P_{11}V)(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* + \\ &(z_1-\lambda)W_1V(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* - (z_1-\lambda)^2 P_{11}V(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* = \\ &(z_1-\lambda)((W_1,W_1,...,W_1) - (z_1-\lambda)(P_{11},...,P_{1m}))(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^* = \\ &(z_1-\lambda)(-I + W(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^*) = -(z_1-\lambda)(I - W(Z-\lambda)^{-1}\mathbf{P}^{-1}V^*).\end{aligned}$$

Для доказательства формулы (19) достаточно заметить, что

$$\widetilde{\Omega}(\lambda) = (\widetilde{\Omega}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2 = \Omega(\lambda)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия (20) непосредственно получаются из Теоремы 2 и вида (17) функции Вейля $M(\lambda)$. Заметим, что условие $\det\Phi_z \neq 0$ эквивалентно условию $z \in \rho(A_0)$. Действительно, легко находим матричный вид оператора $A_0 = Z + \mathbf{P}^{-1}W^*V$ и утверждение сразу следует из равенства $(A_0 - z)^{-1} = \Phi_z^{-1}\mathbf{P}$. $\square$

Замечание 2. В случае, когда и $M'(z_j) = V\Phi_{z_j}^{-1}\mathbf{P}\Phi_{z_j}^{-1}V^* > 0,\ \ j = 1,...,m$ условия (20) выполняются автоматически.

1. *Амиршадян А.А.* Граничная интерполяционная задача в классах обобщенных неванлинновских матриц-функций // Математические заметки. – 2003. – **73**, вып.2. – С.173-178.
2. *Амиршадян А.А.* Интерполяция на спектре в классе обобщенных неванлинновских функций // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – вып.5. – С.3-10.
3. *Амиршадян А.А.* Граничная интерполяционная задача в классах обобщенных неванлинновских матриц-функций // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – вып.7. – С.9-16.
4. *Амиршадян А.А.* Интерполяционные задачи в обобщенных классах Неванлинны и Стилтьеса // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Донецк-2006.
5. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев, Наук. Думка, 1984. – 284с.
6. *Деркач В.О.* Про розширення нещільно заданого ермітова оператора у просторі Крейна // Доповіді АН Укр. РСР, Сер. А. – 1988. – №10. – С.15-19.
7. *Деркач В.А.* Об обобщенных резольвентах одного класса эрмитовых операторов в пространстве Крейна // Докл. АН СССР. – 1991. – **317**, №4. – С.807-812.
8. *Кацнельсон В.Э.* Интерполяция "на спектре" в классе функций Стилтьеса (случай одного узла) // Функциональный анализ и прикладная математика. Сборник научных трудов. Киев : Наук. Думка – 1982. – С.33-42.
9. *Ковалишина И.В.* Кратная граничная интерполяционная задача для сжимающих матриц-функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1989. – №51 – С.38-55.
10. *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функциональный анализ и его приложения. – 1971. – Т.**5**, вып.2. – С.59-71, вып.3, С.54-69.
11. *Маламуд М.М.* О формуле обобщенных резольвент неплотно заданного эрмитова оператора // Укр. мат. журн. –1992. – **44**, №12. – С.1658-1688.
12. *Alpay D., Dijksma A., Langer H.* Classical Nevanlinna-Pick interpolation with real interpolation points // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2000. – **115**. – P.1–50.

13. *Amirshadyan A.A.* Boundary indefinite Nevanlinna-Pick interpolation problem // International conference "Modern analysis and applications" (MAA 2007), Odessa. – 2007. – P.6-7.
14. *Amirshadyan A.A., Derkach V.A.* Interpolation in generalized Nevanlinna and Stieltjes classes // J. of Operator Theory. – 1999. – V.42. – P.145-188.
15. *Ball J.A., Helton J.W.* Interpolation problems of Pick-Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1986. – **9**. – P.155-203.
16. *Derkach V.A.* On generalized resolvents of Hermitian relations in Kreĭn spaces // J. of Math. Sci. – 1999. – Vol.97, No5. – P.4420-4460.
17. *Dijksma A., Langer H., de Snoo H.* Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian system with eigenvalue depending boundary conditions // Math.Nachr. – 1993. – V.161. – P.107-154.
18. *Kreĭn M.G., Langer H.* Über die Q-functions eines π-hermiteschen Operators im Raume Π_κ // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1973. – **34**. – P.191-230.
19. *Nagy Sz., Koranyi A.* Relations d'un probleme de Nevanlinna et Pick avec la theorie des operateurs de l'espace hilbertien // Acta Math. Acad. Hung. – 1956. – V.7. – P.295-303.
20. *Nevanlinna R.* Über berchränkte Funktionen // Ann. Akad. Scient. Fenn. – 1929. – **32**, no.7.

Донецкий национальный ун-т
amirshadyan@mail.ru

Получено 15.11.08