УДК 517.956.4

©2008. **В.М. Шраменко**

ІНДЕКС КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ІЗ СИЛЬНИМ ЗРОСТАННЯМ КОЕФІЦІЄНТІВ. АБСТРАКТНА ТЕОРЕМА

В роботі доводиться теорема про індекс критичної точки щільно визначеного оператора класу (S_+). Подібні результати раніше були отримані в роботах А.Г.Картсатоса, І.В.Скрипника та автора. Але специфіка функціональних просторів, в яких розглядаються граничні задачі, не дозволяє довести єдину абстрактну теорему, яка б змогла покрити всі можливі випадки. Таким чином, щоб розширити коло застосувань, попередні абстрактні теореми про індекс потребують узагальнення. Результат даної роботи дозволяє отримати формули для обчислення індексу критичної точки диференціальних операторів, які відповідають задачам:
Високого порядку на площині

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,u,Du,...,D^m u)+$$
$$+\sum_{|\beta|\le m-1}(-1)^{|\beta|}D^\beta B_\beta(x,u,Du,...,D^{m-1}u)=f,\ x\in\Omega\subset R^2,$$
$$D^\gamma u=0, |\gamma|\le m-1,\ u\in\partial\Omega$$

та другого порядку

$$\sum_{|\alpha|=1}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\{\rho^2(u)D^\alpha u+a_\alpha(x,u,Du)\}+a_0(x,u,Du)=f,\ x\in\Omega\subset R^n, n\ge 3,$$
$$u(x)=0, x\in\partial\Omega.$$

Причому коефіцієнти $B_\beta(x,u,...,D^{m-1}u)$ та $\rho(u)$ можуть мати експоненціальне зростання, а функціональний простір $W_0^{m,p}(\Omega)$, на якому розглядається задача, має показник сумовності $1<p<2$, що призводить до необмеженості лінеаризуючого оператора.
Результати про індекс критичної точки цих операторів та їх застосування до задач про точки біфуркації будуть опубліковані у наступних статтях.

1. Формулювання основного результату. Перед тим, як перейти до результату цього розділу, сформулюємо основні умови на простори та оператори, які розглядаються далі.

Нехай X є дійсним сепарабельним рефлексивним банаховим простором, що задовольняє умовам:

X_1) існує обмежений демінеперервний оператор $J:\overline{B_r(0)}\to X^*$, який задовольняє умову (S_+) для деякого $r>0$, та $Ju\to 0$ при $u\to 0$;

X_2) існує обмежений лінійний оператор $K:X\to X^*$ такий, що $\langle Kx,x\rangle>0$ для $x\ne 0$.

Припустимо, що існує підпростір L простору X такий, що

$$L\subset D(A), \overline{L}=X. \tag{1}$$

Позначимо $F(L)$ множину усіх скінченновимірних підпросторів L. Оберемо послідовність підпросторів $\{F_j\}$, $j \in N$, таку що, для кожного $j \in N$,

$$F_j \in F(L),\ F_j \subset F_{j+1},\ \dim F_j = j,\ \overline{L\{F_j\}} = X, \tag{2}$$

де $L\{F_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$.

Введемо класи операторів, які будуть розглядатись у цьому розділі.

Будемо вважати, що оператор $A : X \supset D(A) \to X^*$ задовольняє умови:

A_1) існує підпростір L простору X, який задовольняє (1), що оператор A задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$;

A_2) для довільного $F \in F(L), v \in L$ відображення $a(F,v) : F \to R$, визначене як $(a(F,v))(u) = \langle Au, v\rangle$ є неперервним.

За таких умов, для оператора A можна ввести ступінь відображення $deg(A, D, 0)$ (див. [1]).

Також мають місце умови:

$$\langle Au, u - v\rangle \geq C_1(v),\ \forall u, v \in L,\ \|u\| \leq r_0. \tag{3}$$

Де $C_1(v) \geq 0$ залежить лише від v, а $r_0 > 0$ деяке досить мале число.

Нехай лінійний оператор $A' : X \supset D(A') \to X^*$ задовольняє умови:

A') Рівняння $A'u = 0$ має лише нульовий розв'язок. Існує лінійний, взагалі необмежений, оператор $\Gamma : X \supset D(\Gamma) \to X^*$ такий, що $D(A') \subset D(\Gamma)$ та

$$\langle (A' + \Gamma)u, u\rangle > 0,\ u \in D(A'), u \neq 0 \tag{4}$$

$$\langle (A' + \Gamma)^* v, v\rangle > 0,\ v \in D((A')^*), v \neq 0 \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\langle A'u, u - w\rangle \geq -C(w), \langle (A' + \Gamma)u, u - w\rangle \geq -C(w), \\ u \in D(A') \cap B_\rho,\ w \in L,\end{gathered} \tag{6}$$

де $C(w)$ додатна константа, яка залежить лише від w, а ρ деяке достатньо мале число.

Будемо розглядати оператор $T_\Gamma = (A' + \Gamma)^{-1}\Gamma : X \supset D(\Gamma) \to X$, який є визначеним, до того ж існує лінійний цілком неперервний оператор $T : X \to X$, з яким він співпадає при $u \in D(\Gamma)$. Оператор $A' + q\Gamma$ задовольняє умову $(S_+)_L$, для довільного $q \in [0, 1]$.

Залишається нагадати означення:

Означення 1 *Оператор $A : X \supset D(A) \to X^*$ задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$, якщо для довільної послідовності $\{u_j\} \subset D(A)$ такої, що*

$$u_j \rightharpoonup u_0,\ \limsup_{j\to\infty} \langle Au_j, u_j\rangle \leq 0,\ \lim_{j\to\infty} \langle Au_j, v\rangle = 0 \tag{7}$$

для деякого $u_0 \in X$ та довільного $v \in L$, маємо, що

$$u_j \to u_0, u_0 \in D(A), Au_0 = 0. \tag{8}$$

Означення 2 *Оператор A задовольняє умову $(S_+)_L$, якщо оператор $A_h : D(A) \to X^*$, визначений як $A_h = Au - h$ задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$ для довільного $h \in X^*$*

Проблема лінеаризації оператора A розв'язується наступним чином.
ω) для оператора $\omega : D(A') \cap D(A) \to X^*$, визначеного $\omega(u) = Au - A'u$, маємо

$$\frac{\omega(u)}{\|u\|} \to 0, u \to 0, u \in Z_\varepsilon \tag{9}$$

для деякого $\varepsilon > 0$, де

$$Z_\varepsilon = \cup_{t\in[0,1]}\{u \in D(A') \cap D(A) : tAu + (1-t)A'u = 0, 0 < \|u\| \le \varepsilon\}. \tag{10}$$

Також необхідною є умова:
С) слабке замикання множини

$$\sigma_\varepsilon = \{v = \frac{u}{\|u\|} : u \in Z_\varepsilon\} \tag{11}$$

не містить нуля для достатньо малого $\varepsilon > 0$.

Введемо деякі підпростори просторів X, X^*, пов'язані з операторами $A' + \Gamma$, T, визначеними в умові A'). По-перше, визначимо два інваріантних підпростори цілком неперервного оператора $T : X \to X$. Позначимо через F пряму суму усіх інваріантних підпросторів оператора T, які відповідають характеристичним числам цього оператора з інтервалу (0,1). Нехай R буде замиканням прямої суми усіх інваріантних підпросторів оператора T, які не увійшли до F. Тоді F та R є інваріантними підпросторами оператора T та має місце пряма сума

$$X = F + R. \tag{12}$$

З властивостей характеристичних чисел цілком неперервного оператора випливає, що F є скінченновимірним підпростором X та

$$\dim F = \nu, \tag{13}$$

де ν – сума кратностей характеристичних чисел оператора T з інтервалу (0,1).

Введемо оператор проектування $\Pi : X \to F$, який відповідає розкладанню (12), наступним чином

$$\Pi(f + r) = f, \quad \text{для} \quad f \in F, r \in R. \tag{14}$$

Теорема 1 *Нехай оператор $A : X \supset D(A) \to X^*$ задовольняє відповідні умови. Будемо вважати, що існує лінійний (можливо необмежений) оператор $A' : X \supset D(A') \to X^*$, який задовольняє умови $A'), \omega)$. Оператор $A + sA'$ задовольняє умову $(S_+)_{0,L}$ для усіх $s > 0$.*
Нехай до того ж виконуються наступні умови:

1) оператор $\Pi(A'+\Gamma)^{-1} : X^* \supset (A'+\Gamma)D(A') \to X$ *обмежений, де оператори* Π, Γ *визначені у (14) та* A'*).*

2) виконується умова C*) .*

Тоді нуль є ізольованою критичною точкою оператора A *та його індекс дорівнює* $(-1)^\nu$*, де* ν *сума кратностей характеристичних чисел оператора* T*, які належать інтервалу (0,1).*

Спочатку покажемо, що нуль є ізольованою критичною точкою оператора A. Нехай це не так: тоді існує послідовність $\{u_j\}$ така що

$$Au_j = 0,\ u_j \neq 0,\ u_j \to 0. \tag{15}$$

За означенням множини Z_ε отримаємо, що $u_j \in Z_\varepsilon$ для усіх великих j. Тоді з умови C) випливає, що слабке замикання множини $\{v_j = u_j/\|u_j\|\}$ не містить нуля. Можемо вважати, що $v_j \rightharpoonup v_0$, $v_0 \neq 0$. Скориставшись умовою ω) та (15), прийдемо до

$$\lim_{j\to\infty}\langle A'v_j, v_j\rangle = 0, \lim_{j\to\infty}\langle A'v_j, v\rangle = 0 \tag{16}$$

для довільного $v \in L$. З останніх рівностей за умовою $(S_+)_{0,L}$ отримаємо $A'v_0 = 0$, що протирічить умові A'). Таким чином, перше твердження теореми доведено.

Доведення формули індексу критичної точки базується на властивості гомотопічної інваріантності ступеню відображеня. Нагадаємо пов'язані із цим означення. Нехай $A_t : X \supset D(A_t) \to X^*$, $t \in [0,1]$ є сім'єю нелінійних операторів такою, що $L \subset D(A_t)$, для $t \in [0,1]$. Ми кажемо, що сім'я $\{A_t\}$ задовольняє умову $(S_+)^{(t)}_{0,L}$ по відношенню до відкритої множини D, якщо існує послідовність скінченновимірних підпросторів $\{F_j\}$ простору L та для довільної послідовності $\{u_j\} \subset L\{F_j\} \cap \partial D$, що $\{t_j\} \subset [0,1]$ з умов $u_j \rightharpoonup u_0$, $t_j \to t_0$

$$\lim_{j\to\infty}\langle A_{t_j}(u_j), u_j\rangle = 0, \quad \lim_{j\to\infty}\langle A_{t_j}(u_j), v\rangle = 0 \tag{17}$$

для деякого $u_0 \in X$, $t_0 \in [0,1]$ та довільного $v \in L$ випливає, що послідовність $\{u_j\}$ сильно збігається та $A_{t_0}(u_0) = 0$.

Означення 3 *Нехай* $A^{(i)} : X \supset D(A^{(i)}) \to X^*$, $i = 0, 1$ *задовольняє умови* $A_1), A_2)$*. Оператори* $A^{(0)}, A^{(1)}$ *звуться гомотопними по відношенню до відкритої множини* D*, якщо існує однопараметрична сім'я* $A_t : X \supset D(A_t) \to X^*$, $t \in [0,1]$*, що задовольняє умову* $(S_+)^{(t)}_{0,L}$ *та до того ж :*

1) $A^{(0)} = A_0,\ A^{(1)} = A_1$ *та*

$$A_t(u) \neq 0 \quad \text{для} \quad u \in D(A_t) \cap \partial D,\ t \in [0,1] \tag{18}$$

2) для кожного $F \subset L\{F_j\}$ *та довільного* $v \in L\{F_j\}$ *відображення* $\widetilde{a}(F,v) : F \times [0,1] \to R$ *визначене* $\widetilde{a}(F,v)(u,t) = \langle A_t u, v\rangle$ *є неперервним.*

2. Леми про допоміжні гомотопії.

Лема 1 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує додатне число* r_1 *таке що:*

1) для $t \in [0,1]$, $u \in D(A) \cap D(A')$, $0 < \|u\| \leq r_1$, *маємо* $A_t^{(1)}(u) \neq 0$, *де*

$$A_t^{(1)}(u) = tAu + (1-t)A'u \tag{19}$$

2) сім'я $\{A_t^{(1)}\}$ *є гомотопією між операторами* A *та* A' *у* $B_r(0)$, *де* r *довільне число з інтервалу* $(0, r_1]$.

Доведення. Доведення першого твердження цієї теореми повністю повторює доведення того факту, що нуль є ізольованою критичною точкою.

Доведемо друге твердження леми. Приймаючи до уваги перше твердження леми та властивості операторів A, A', нам потрібно довести лише умову $(S_+)_{0,L}^{(t)}$ для сім'ї $\{A_t^{(1)}\}$ та кулі $B_r(0)$, $r \in (0, r_1]$. Оберемо довільну послідовність підпросторів $\{F_j\}$, задовольняючих умову (2), та послідовності $\{u_j\}, \{t_j\}$ такі, що

$$\begin{gathered} u_j \in L\{F_j\} \cap \partial B_r(0),\, t_j \in [0,1],\, u_j \rightharpoonup u_0,\, t_j \to t_0 \ \text{ та} \\ \lim_{j\to\infty} \langle A_{t_j}^{(1)}(u_j), u_j \rangle = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \langle A_{t_j}^{(1)}(u_j), v \rangle = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

для деякого $u_0 \in X$ та довільного $v \in L$. Користуючись умовами (3) та (6), отримаємо наступні оцінки

$$\begin{gathered} t_j \, |\langle Au_j, u_j \rangle| \leq C_1,\, (1-t_j)\, |\langle A'u_j, u_j \rangle| \leq C_1, \\ t_j \, |\langle Au_j, v \rangle| \leq C_2(v),\, (1-t_j)\, |\langle A'u_j, v \rangle| \leq C_2(v) \end{gathered} \tag{21}$$

з додатною сталою C_1 та додатним числом $C_2(v)$, яке залежить лише від v.

Розглянемо окремо три можливі випадки:
$a)$ $0 < t_0 < 1$, $\ b)$ $t_0 = 0$, $\ c)$ $t_0 = 1$.

У випадку $a)$ ми отримаємо

$$\begin{gathered} \lim_{j\to\infty} \langle Au_j + \frac{1-t_0}{t_0} A'u_j, u_j \rangle = 0, \\ \lim_{j\to\infty} \langle Au_j + \frac{1-t_0}{t_0} A'u_j, v \rangle = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Тоді, застосовуючи умову $(S_+)_{0,L}$ для оператора $A + sA'$, ми прийдемо до сильної збіжності $u_j \to u_0$, а також $t_0 Au_0 + (1-t_0)A'u_0 = 0$ при $u_0 \in \partial B_r(0)$, що протирічить першому твердженню леми. Ми встановили, що випадок a) неможливий.

Розглянемо випадок b) $t_0 = 0$
З умови (3) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \langle A'u_j, u_j \rangle = 0,\ \lim_{j\to\infty} \langle A'u_j, v \rangle = 0. \tag{23}$$

За умовою $(S_+)_L$ для оператора A' отримаємо, що $A'u_0 = 0$ при тому, що $\|u_0\| = r$. Ми прийшли до протиріччя із першим твердженням леми. Цей випадок також неможливий.

У випадку c) ми маємо з (6)

$$\lim_{j\to\infty} \langle Au_j, u_j \rangle = 0, \ \lim_{j\to\infty} \langle Au_j, v \rangle = 0. \tag{24}$$

Користуючись умовою $(S_+)_{0,L}$ для оператора A прийдемо до того, що $u_j \to u_0$ та $Au_0 = 0$. Таким чином, і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя з першим твердженням леми.

Це і завершує доведення леми 1.

Визначимо підпростори F^*, R^* простору X^* наступним чином

$$F^* = (A' + \Gamma)F, \quad R^* = \overline{(A' + \Gamma)\,(D(A') \cap R)}, \tag{25}$$

де F, R підпростори X з (12). Неважко побачити, що $F \subset D(A')$.

Лема 2 *Має місце розкладення*

$$X^* = F^* + R^* \tag{26}$$

у пряму суму.

Ця лема доводиться у роботі [2].

Наступні гомотопії вже не містять оператора A, тому доведення відповідних лем повністю повторює роботу [4].

Лема 3 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує додатне число r_2 таке, що $r_2 \le r_1$ та наступні твердження вірні:*

1) $A_t^{(2)}(u) \neq 0$, для $t \in [0,1]$, $u \in D(A')$, $0 < \|u\| \le r_2$, де

$$A_t^{(2)}(u) = tA'u + (1-t)\{-(A' + \Gamma)\Pi u + (A' + \Gamma)(I - \Pi)u\}, \tag{27}$$

оператор Π є визначеним у (14);

2) оператор $A_0^{(2)}$ задовольняє умову $(S_+)_L$;

3) сім'я $\{A_t^{(2)}\}$ є гомотопією між операторами $A_0^{(1)}$ та $A_0^{(2)}$, у кулі $B_r(0)$, для $r \in (0, r_2]$.

Наступна гомотопія буде зводити обчислення індексу критичної точки до відповідної проблеми, але для оператора, який є всюди заданим у деякому околі критичної точки. Для цього нам буде потрібно деяке перетворення оператора K, який було введено в умові X_2). Відповідно до (26), кожний $h \in X^*$ може бути поданим як $f^* + r^*$, де $f^* \in F^*, r^* \in R^*$ однозначно визначені. Тоді ми можемо визначити обмежений лінійний оператор

$P^* : X^* \to F^*$ як $P^* h = f^*$, для $h = f^* + r^*$. Нехай $\{f_1, ..., f_\nu\}$ буде базисом лінійного простору F з (12). Тоді дію оператора P^* подамо як

$$P^* h = \sum_{i=1}^{\nu} \langle h, w_i \rangle (A' + \Gamma) f_i \tag{28}$$

де $w_i \in X$, $i = 1, ..., \nu$, задовольняє наступну умову

$$\langle (A' + \Gamma) f_j, w_i \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle (A' + \Gamma) r, w_i \rangle = 0 \tag{29}$$

для $i, j = 1, ..., \nu$, $r \in D(A') \cap R$. Тут δ_{ij} є символом Кронекера.

Оператор Π, визначений у (14), може бути записаним у вигляді

$$\Pi u = \sum_{i=1}^{\nu} \langle h_i, u \rangle f_i \tag{30}$$

де $h_i \in X^*$, $i = 1, ..., \nu$, задовольняє умови:

$$\langle h_i, f_j \rangle = \delta_{ij}, \ \langle h_i, r \rangle = 0, \quad \text{для} \quad i, j = 1, ..., \nu, \ r \in R. \tag{31}$$

Розглянемо матрицю D з елементами $d_{ij} = \langle h_i, w_j \rangle$, $i, j = 1, ..., \nu$. Покажемо, що її визначник відмінний від нуля. Нехай буде вірним протилежне. Тоді ми можемо знайти $\tilde{w} = \sum\limits_{j=1}^{\nu} \tilde{c}_j w_j \neq 0$ таке, що

$$\langle h_i, \tilde{w} \rangle = 0, \ i = 1, ..., \nu. \tag{32}$$

Покажемо, що $\tilde{w} \in D((A' + \Gamma)^*)$ та

$$(A' + \Gamma)^* \tilde{w} = \tilde{h}, \quad \text{де} \quad \tilde{h} = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{c}_j h_j. \tag{33}$$

Необхідно встановити рівність

$$\langle (A' + \Gamma) u, \tilde{w} \rangle = \langle \tilde{h}, u \rangle \tag{34}$$

для довільного $u \in D(A')$. Якщо $u \in D(A') \cap R$, то (34) випливає з другої рівності у (29) та (31). Якщо $u = f_i$ ми отримаємо (34) з першої рівності у (29) та виразів для $\tilde{w}, \tilde{h}$. Таким чином, ми встановили (33) та з (32) одержимо $\langle (A' + \Gamma)^* \tilde{w}, \tilde{w} \rangle = 0$, що протирічить до (4). Це означає, що матриця D має обернену. Позначимо через c_{ij} елементи матриці D^{-1}. Маємо

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_{ki} \langle h_i, w_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \text{для} \quad k, j = 1, ..., \nu \tag{35}$$

Введемо оператор $\tilde{K} : X \to X^*$ наступним чином

$$\tilde{K}u = Ku - \sum_{k,i=1}^{\nu} c_{ki} \langle Ku, w_k \rangle h_i, \tag{36}$$

де K оператор з умови X_2).

Ми маємо наступні властивості для оператора $\tilde{K}$:

$$P^* \tilde{K} X = \{0\}, \ \langle \tilde{K} r, r \rangle > 0, \quad \text{для} \ \ r \in R, \ r \neq 0. \tag{37}$$

Перше у (37) випливає безпосередньо з (28) та (35). Друге випливає з (31) та додатності оператора K.

Визначимо функціонал $\delta : X \to R^1$ як

$$\delta(u) = \max\{0, C \langle (I - P^*) Ju, u \rangle\}, \tag{38}$$

де J – оператор з умови X_1) та C додатне число, яке буде обране надалі.

Лема 4 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує додатне число* $\overline{C_1}$ *таке, що для* C *з (38) із* $0 < C \leq \overline{C_1}$ *виконуються наступні твердження при* $r_3 = \min\{r, r_2\}$, *де* r, r_2 *відповідно числа з умови* X_1) *та леми 3.*

1) $A_t^{(3)}(u) \neq 0$, *для* $t \in [0,1]$, $u \in D(A')$, $0 < \|u\| \leq r_3$, *де*

$$A_t^{(3)}(u) = \delta(u)(1-t)Ju - (A' + \Gamma)\Pi u + t(A' + \Gamma)(I - \Pi)u + (1-t)\widetilde{K}(I - \Pi)u. \tag{39}$$

2) оператор $A_0^{(3)}$, *задовольняє умову* $(S_+)_{0,X}$;

3) сім'я $\{A_t^{(3)}\}$ *є гомотопією між операторами* $A_0^{(2)}$ *та* $A_0^{(3)}$ *у довільній кулі* $B_r(0)$, *для* $r \in (0, r_3]$.

Зараз ми маємо змогу перейти до обчислення індексу оператора A у критичній точці, застосовуючи попередні леми та властивість інваріантності ступеня відображення відносно гомотопії.

Лема 5 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$\mathit{Ind}(A, 0) = \mathit{Deg}(A_0^{(3)}, B_r(0), 0), \tag{40}$$

де $A_0^{(3)}$ *оператор з леми 4 та* r *довільне число з інтервалу* $(0, r_3]$.

Відмітимо, що оператор $A_0^{(3)}$ є всюди визначеним у кулі $\overline{B_r(0)}$. Ми можемо обрати таку послідовність $\{F_j\}$ яка задовольняє умову (2) для $L = X$. Візьмемо цю послідовність таким чином, щоб $F_0 = PX, F \subset F_{2\nu}$, де P є спряженим до P^*, визначеного у (28) та F – це підпростір з розкладання (12). Оберемо систему $\{v_i\}$, $i = 1, 2, ...$, таким чином, щоб кожний підпростір F_j був лінійною комбінацією елементів $v_1, .., v_j$. Можливо вважати, що $v_i = w_i$, для $i \leq \nu$, and $\langle (A' + \Gamma) f_j, v_i \rangle = 0$ для $j = 1, ..., \nu$, $i = \nu + 1, ...$ де f_j, w_i ті ж самі, що і у (29).

Визначимо скінченновимірну апроксимацію $A_{0,j}^{(3)}$ оператора $A_0^{(3)}$

$$A_{0,j}^{(3)}(u) = \sum_{i=1}^{j} \langle A_0^{(3)}(u), v_i \rangle v_i, \quad \text{для} \quad u \in F_j \cap B_{r_3}(0). \tag{41}$$

За означенням ступеню відображення, ми можемо обрати, для заданого числа $r \in (0, r_3]$, число $j(r)$ таке, що

$$\mathrm{Deg}(A_0^{(3)}, B_r(0), 0) = \deg(A_{0,j}^{(3)}, B_{r,j}(0), 0), \quad \text{for} \quad j \geq j(r), \tag{42}$$

де $B_{r,j} = B_r(0) \cap F_j$.

Лема 6 *Нехай виконуються умови теореми 1. Та r_0 якесь фіксоване число з інтервалу $(0, r_3]$ та $j_0 = 2\nu + j(r_0)$. Тоді рівняння*

$$A_{0,j_0}^{(3)}(u) = 0 \tag{43}$$

має лише нульовий розв'язок у кулі $B_{r_o,j_0}(0)$.

Лема 7 *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$Ind(A, 0) = (-1)^{\nu}, \tag{44}$$

де ν те саме, що і у теоремі 1.

Доведення. Застосовуючи (40), (42) та лему 6, прийдемо до

$$\mathrm{Ind}\,(A, 0) = \deg(A_{0,j_0}^{(3)}, B_{\rho,j_0}(0), 0) \tag{45}$$

для кожного $\rho \in (0, r_0]$. Неважко перевірити, що для достатньо малого ρ відображення $A_{0,j_0}^{(3)}$ гомотопно на $\overline{B_\rho, j_0}(0)$ відображенню

$$A_{j_0}^{(4)}(u) = \sum_{i=1}^{j_0} \langle -(A' + \Gamma)\Pi u + \widetilde{K}(I - \Pi)u, v_i \rangle v_i. \tag{46}$$

Таким чином, $Ind(A, 0) = \deg(A_{j_0}^{(4)}, B_{\rho_0,j_0}(0), 0)$.

Ступінь відображення $A_{j_0}^{(4)}$ дорівнює $(-1)^{\nu}$ та може бути обчислена за відомою формулою для ступеню лінійних скінченновимірних відображень.

1. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V.* Topological degree theories for densely defined mappings involving operators of type (S_+), Adv. Differential Equations, **4** (1999), 413-456.
2. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V.* The index of a critical point for densely defined operators of type (S_+) in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Society **354** (2001), 1601-1630.
3. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V.* The index of a critical point for nonlinear elliptic operators with strong coefficient growth, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 109-137.
4. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. and Shramenko V.N.* The index of an isolated critical point for a class of non-differentiable elliptic operators in reflexive Banach spaces // J. Differential Equations. – 2005. – V.214. – p.189-231.

Національний технічний ун-т України, Київ
`vshramenko@ukr.net`

Получено 04.03.08