УДК 517.9

©2008. **С.М. Чуйко, О.С. Чуйко**

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПЕРЕМИКАННЯМИ ТА ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ НА ГРАНИЦІ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Застосовуючи теорію псевдообернених матриць, вдосконалено схему дослідження задач про існування та побудову розв'язків нетерових крайових задач для лінійних систем диференціальних рівнянь з перемиканнями та імпульсним впливом типу "interface conditions". Такий підхід дозволив покращити раніше відомі результати та отримати нові факти в теорії лінійних крайових задач із перемиканнями та імпульсним впливом типу "interface conditions".

1. Лінійні системи з перемиканнями. Розглянемо задачу про знаходження розв'язку [1, 2, 3, 4, 5, 6]

$$z(t) = \mathrm{col}\left(z_1(t),\ \dots,\ z_n(t)\right),\ z_j(\cdot) \in C^1\big\{\ [a,b\,]\backslash\{\tau_i\}_I\big\},\ z_j(\cdot) \in C[a,b],\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

лінійного однорідного рівняння з перемиканнями

$$dz/dt = A_i(t)z,\ t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \tag{1}$$

де $A_i(t) - (n \times n)$ – вимірні матриці, неперервні на відрізках $[a;\tau_1],\ [\tau_1;\tau_2],\ \dots,\ [\tau_p;b]$. Нехай $W_0(t)$ – нормальна $(W_0(a) = I_n)$ фундаментальна матриця системи (1) на відрізку $[a;\tau_1]$, а $W_1(t)$ – фундаментальна матриця системи (1) на відрізку $[\tau_1;\tau_2]$, яка задовольняє умові $W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1)$. Існування нормальної $(W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1))$ фундаментальної матриці системи (1) на відрізку $[\tau_1;\tau_2]$ випливає із невиродженості фундаментальних матриць системи (1) на відрізках $[a;\tau_1]$ та $[\tau_1;\tau_2]$. Таким чином, нормальна $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальна матриця $X_0(t)$ системи (1) зображувана у вигляді

$$X_0(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [a;\tau_1], \quad W_0(a) = I_n, \\ W_1(t), & t \in [\tau_1;\tau_2], \quad W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1), \\ \dots\dots, & \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots\dots\dots, \\ W_p(t), & t \in [\tau_p;b], \quad W_p(\tau_p) = W_{p-1}(\tau_1). \end{cases} \tag{2}$$

Матриця $X_0(t)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і задовольняє системі (1).

Лема 1. *Загальний розв'язок системи (1) звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями зображуваний у вигляді* $z(t,c) = X_0(t)c,\ c \in R^n$; *тут* $X_0(t)-$ *нормальна* $(X_0(a) = I_n)$ *фундаментальна матриця (2) системи (1).*

Приклад 1. Нормальна $(X_0(0) = 1)$ фундаментальна матриця системи з перемиканнями

$$\begin{cases} dz/dt = z, & t \in [0;1], \\ dz/dt = 0, & t \in [1;2], \\ dz/dt = -z, & t \in [2;3] \end{cases} \tag{3}$$

неперервна і має вигляд

$$X_0(t) = \begin{cases} e^t, & t \in [0;1], \\ e, & t \in [1;2], \\ e^{3-t}, & t \in [2;3]. \end{cases}$$

2. Лінійні крайові задачі з імпульсним впливом типу "interface conditions" для систем з перемиканнями. Розглянемо задачу про знаходження розв'язків

$$z = z(t) = \mathrm{col}\,\Big(z_1(t),\ \dots\ ,\ z_n(t)\Big),\ z_j(\cdot) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

системи (1) з перемиканнями, які задовольняють крайові умови типу "interface conditions"

$$\ell_i\ z(\cdot) = 0,\ i = 1,\ 2, \dots, p, \tag{4}$$

де $\ell_i z(\cdot)$ – лінійні векторні функціонали $\ell_i z(\cdot) : C^1\Big\{[a, \tau_{i+1}\ [\ \setminus \{\tau_1,\ \dots,\ \tau_i\}_I\Big\} \to R^k$ вигляду

$$\ell_i z(\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot),$$

де

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot) : C^1[a, \tau_1\ [\ \to R^k,\ \dots\ , \ell_i^{(i)} z(\cdot) : C^1[\tau_i, \tau_{i+1}\ [\ \to R^k,\ i = 1,\ \dots\ , p-1,\ \dots\ ,$$

$$\ell_p^{(0)} z(\cdot) : C^1[a, \tau_1\ [\to R^k,\ \dots\ ,\ \ell_p^{(p)} z(\cdot) : C^1[\tau_p,\ b\ ] \to R^k$$

лінійні обмежені функціонали. Задача (1), (4) являє собою узагальнення задач з невиродженим імпульсним впливом, докладно вивчених у працях А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [6], а також двоточкових задач з умовами вигляду

$$M_i z(\tau_i - 0) + N_i z(\tau_i + 0) = 0,\ i = 1,\ 2, \dots,\ p\ ,$$

де M_i, N_i – сталі $(m \times n)$ – вимірні матриці. Останні задачі були вивчені Р. Конті [7] і, в свою чергу, узагальнювали двоточкові задачі з квадратними $(n \times n)$ – матрицями M_i, N_i, досліджені в [8, 9], і у випадку невиродженості матриць N_i розглянуті в [10]. Задача (1), (4) являє собою також узагальнення задач з виродженим імпульсним впливом [4, 11], задач із імпульсним впливом типу "interface conditions" [12, 13] та задачі [2] на випадок систем з перемиканнями.

Нормальну $X(a) = I_n$ фундаментальну матрицю $X(t)$ задачі (1), (4) шукаємо у вигляді

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t) Y_0, & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t) Y_1, & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ X_0(t) Y_2, & t \in [\tau_2; \tau_3[, \\ \dots\dots\dots\ , & \dots\dots\dots\dots\ , \\ X_0(t) Y_p, & t \in [\tau_p; b]. \end{cases} \tag{5}$$

Для знаходження невідомої сталої $(n\times n)-$ вимірної матриці Y_1 покладемо $Y_0=I_n$ і скористаємось крайовою умовою (4)

$$Q_1Y_1=\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)Y_0, \tag{6}$$

де $Q_1=-\ell_1^{(1)}X_0(\cdot)$ – стала $(k\times n)-$ вимірна матриця. Рівняння (6) розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)Y_0=0. \tag{7}$$

За умови (7), у випадку $k\geq n$, якщо матриця Q_1 повного рангу, то рівняння (6) має єдиний розв'язок $Y_1=Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)$. Тут Q_1^+ – стала $(n\times k)-$ вимірна псевдообернена за Муром-Пенроузом до Q_1 матриця, $P_{Q_1^*}-$ ортопроектор $R^k\to N(Q_1^*)$. Тоді

$$X(t)=X_0(t)Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot),\ t\in[\tau_1,\tau_2[.$$

Для знаходження $(n\times n)-$ матриці Y_2, використовуємо умову (4); позначаючи $(k\times n)$ – матрицю $Q_2=-\ell_2^{(2)}X_0(\cdot)$, одержуємо рівняння $Q_2Y_2=\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)+\ \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)Y_1$, розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)Y_0+\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)Y_1\right\}=0 \tag{8}$$

і однозначно розв'язне за умови повноти рангу матриці Q_2: $Y_2=Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)+\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)Y_1\right\}$. Таким чином, при $t\in[\tau_2,\tau_3[$

$$X(t)=X_0(t)Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)+\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)Y_1\right\}.$$

На проміжку $[\tau_p,b]$ шукану матрицю $X(t)$ визначає $(k\times n)-$ матриця Y_p, для знаходження якої одержуємо рівняння

$$Q_pY_p=\sum_{j=0}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)Y_j,$$

розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_p^*}\sum_{j=0}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)Y_j=0. \tag{9}$$

За умови (9) у випадку повноти рангу $(k\times n)$ – матриці $Q_p=-\ell_p^{(p)}X_0(\cdot)$ на проміжку $[\tau_p,b]$ шукана матриця $X(t)$ має вигляд

$$X(t)=X_0(t)Q_p^+\sum_{j=0}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)Y_j.$$

У випадку неперервної на всьому відрізку $[a, b]$ матриці $A(t)$, для виродженого імпульсного впливу побудована матриця $X(t)$ співпадає з матрицею [4, с.589], а у випадку невиродженого – з матрицею [6, с.53]. В свою чергу, побудована матриця $X(t)$ узагальнює нормальну фундаментальну матрицю [12] на випадок систем з перемиканнями.

Лема 2. *Задача Коші*

$$z(a) = c \tag{10}$$

для системи (1), (4) з перемиканнями розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконані умови

$$P_{Q_i^*} \sum_{j=0}^{i-1} \ell_i^{(j)} X_0(\cdot) Y_j = 0, \ i = 1, 2, \ \dots \ , \ p,$$

при $k \geq n$, *у випадку повноти рангу матриць* $Q_1, \ Q_2, \ \dots \ , \ Q_p$ *має розв'язок*

$$z(t, \ c) = X(t) \ c, \ c \in R^n,$$

зображуваний нормальною $(X(a) = I_n)$ *фундаментальною матрицею*

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)Y_0, & Y_0 = I_n, & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & Y_1 = Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ X_0(t)Y_2, & Y_2 = Q_2^+ \left\{ \ell_2^{(0)} X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) Y_1 \right\}, & t \in [\tau_2; \tau_3[, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)Y_p, & Y_p = Q_p^+ \sum\limits_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)} X_0(\cdot) Y_j, & t \in [\tau_p; b] \end{cases}$$

задачі (1), (4).

Приклад 2. Знайдемо нормальну $X(0) = 1$ фундаментальну матрицю $X(t)$ крайової задачі з двома крайовими умовами типу "interface conditions"

$$\begin{cases} dz/dt = z, & t \in [0; 1[, \\ dz/dt = 0, & t \in [1; 2[, \\ dz/dt = -z, & t \in [2; 3], \\ \triangle z(1) = -z(1-0), & \tau_1 = 1, \\ z(2+0) = z(1-0), & \tau_2 = 2. \end{cases} \tag{11}$$

Умови леми 2 виконані, отже система (11) розв'язна, причому матриця $X_0(t)$ співпадає з матрицею, яка знайдена в прикладі 1, тому $Y_1 = 0, \ Y_2 = 1$, отже

$$X(t) = \begin{cases} e^t, & t \in [0; 1[, \\ 0, & t \in [1; 2[, \\ e^{3-t}, & t \in [2; 3]. \end{cases}$$

На відміну від задач з виродженим імпульсним впливом [4], для яких ранг $X(t)$ вздовж відрізку $[a, b]$ не зростає, число лінійно-незалежних розв'язків задачі (11) в момент $t = 2$ змінюється з нуля на одиницю.

3. Традиційна неоднорідна задача Коші. Задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків

$$z = z(t) = \mathrm{col}\left(z_1(t),\ \ldots\ ,\ z_n(t)\right),\ z_j(\cdot) \in C^1\left\{\ [a, b\ ] \setminus \{\tau_i\}_I\right\},\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$dz/dt = A(t)z + f(t),\ t \neq \tau_i \tag{12}$$

з невиродженим ($\det(I_n + S_i) \neq 0$) імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ p \tag{13}$$

була розв'язана А.М. Самойленком та М.О. Перестюком у монографії [6] та узагальнювала задачу з крайовими умовами типу "shock conditions" [14]. Припустимо, що компоненти $a_{ij}(t),\ i, j = 1,\ 2, \ldots,\ n$ матриці $A(t)$ неперервні на всьому відрізку $[a, b],\ f(t)$ – неперервна, за виключенням точок τ_i вектор-функція; в точках τ_i : $a < \tau_1 <\ \ldots < \tau_p < b$, функція $f(t)$, як і розв'язок задачі (12), (13) можливо, зазнає розриви $\Delta z(\tau_i) = z(\tau_i + 0)\ - z(\tau_i - 0)$, першого роду, S_i – сталі $(n \times n)$ – вимірні матриці, $a_i \in R^n,\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p$. Загальний розв'язок задачі (12), (13)

$$z(t, c) = X(t)c + \int_a^b K(t, \tau)f(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(t, \tau_i)a_i$$

у випадку невиродженого імпульсного впливу зображуваний [3, 6] нормальною фундаментальною ($X(a) = I_n$) матрицею $X(t)$ однорідної частини задачі (12), (13) та матрицею Коші

$$K(t, \tau) = \begin{cases} -X(t)X^{-1}(\tau), & a \le t \le \tau \le b, \\ 0\ , & a \le \tau < t \le b \end{cases}$$

неоднорідної задачі (12), (13), причому $\bar{K}(t, \tau_i) = K(t, \tau_i - 0)(I_n + S_i)^{-1}$.

Приклад 3. Як приклад аналізу крайових задач з невиродженим імпульсним впливом, розглянемо модель, що описує динаміку змін внесків $s(t)$ з урахуванням сталих складових номінальних річних ставок $\delta(t)$, залежності номінальних річних ставок від величин внесків $Ds(t)$, фіксованих внесків на банківські рахунки ($a_i > 0$), $i = 1,\ 2,\ \ldots\ , p$, фіксованих виплат ($a_i < 0$) і внесків, або виплат, які лінійно залежать від величин внесків $B_i s(\tau_i - 0)$ вигляду

$$\frac{ds}{dt} = Ds(t) + \delta(t),\ t \neq \tau_i,\ \Delta s(\tau_i) = B_i s(\tau_i - 0) + a_i. \tag{14}$$

Тут B_i й D – сталі $(n \times n)$-вимірні матриці, $\delta(\cdot), s(\cdot) \in C^1\left\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\},\ a_i \in R^n$.

Система (14) узагальнює численні постановки задач про динаміку банківських заощаджень, зокрема – з урахуванням зменшення відсотків нарахувань пропорційно збільшенню грошових заощаджень задля запобігання надмірному збагаченню.

Розв'язки системи (14) можуть демонструвати досить складну поведінку, яка включає в себе як періодичні траєкторії, так і цілком хаотичні коливання [15]. У випадку невиродженого імпульсного впливу модель (14) дозволяє за величиною початкового внеску $s(a)$ знайти накопичену вартість

$$s(t) = X(t)\left(s(a) - \int_a^b K(a,\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(a,\tau_i)a_i\right) +$$
$$+ \int_a^b K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(t,\tau_i)a_i;$$

за величиною накопиченої вартості $s(b)$ знайти величину початкового внеску

$$s(a) = X^{-1}(b)s(b) + \int_a^b K(a,\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(a,\tau_i)a_i$$

і за умови рівних внесків (або виплат) a_i, за відомою величиною початкового внеску $s(a)$ та накопиченої вартості $s(b)$, у випадку невиродженості матриці

$$D = \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(a,\tau_i),\ \bar{K}(t,\tau_i) = K(t,\tau_i - 0)(I_n + B_i)^{-1}$$

знайти величину внесків (або виплат)

$$a_i = D^{-1}\left(s(a) - X^{-1}(b)s(b) - \int_a^b K(a,\tau)f(\tau)d\tau\right).$$

Моделювання динаміки зміни внесків у вигляді (14) та побудова розв'язків з використанням матриці Коші $K(t,\tau)$ вигляду [3] найбільш зручні завдяки лінійній та явній залежності частинного розв'язку задачі (14) від a_i, але можливі тільки у випадку невиродженого імпульсного впливу.

4. Узагальнена неоднорідна задача Коші для систем з перемиканнями. Узагальненням, як задач з невиродженим, так і з виродженим імпульсним впливом (12), (13) є задача про знаходження розв'язків

$$z = z(t) = \text{col}\left(z_1(t),\ \dots,\ z_n(t)\right),\ z_j(\cdot) \in C^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\},\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

системи звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями

$$dz/dt = A_i(t)z + f(t),\ t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \tag{15}$$

які задовольняють крайовим умовам типу "interface conditions" [12, 16]

$$\ell_i\ z(\cdot) = a_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ p, \tag{16}$$

де a_i сталі вектори з R^k, $\ell_i z(\cdot)$ – лінійні векторні функціонали

$$\ell_i\ z(\cdot) : C^1\Big\{[a, \tau_{i+1}\ [\backslash\{\tau_1,\ \dots\ , \tau_i\}_I\Big\} \to R^k$$

вигляду

$$\ell_i\ z(\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot),$$

де

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot) : C^1[a, \tau_1\ [\to R^k,\ \dots\ ,\ \ell_i^{(i)} z(\cdot) : C^1[\tau_i, \tau_{i+1}\ [\to R^k, i = 1,\ \dots\ , p-1,\ \dots\ ,$$

$$\ell_p^{(0)}\ z(\cdot) : C^1\ [a, \tau_1\ [\ \to R^k,\ \dots\ ,\ \ell_p^{(p)}\ z(\cdot) : C^1[\tau_p,\ b\ ]\ \to R^k$$

лінійні обмежені функціонали. Припустимо умови леми 2 виконаними. Внаслідок неперервності на проміжку $[a, \tau_1[$ розв'язок задачі Коші (10), (15), (16) зображуваний сумою $z(t, c) = X_0(t)c + \mathcal{I}(t)$, де $\mathcal{I}(t) = X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) f(s) ds$. Розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на проміжку $[\tau_1, \tau_2[$ шукаємо у вигляді

$$z(t, c) = X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{I}(t),\ \ \gamma_1 \in R^n.$$

Для знаходження невідомої γ_1 одержуємо рівняння $Q_1\gamma_1 = \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)c + \ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1$, для розв'язності якого необхідно і достатньо, щоб $P_{Q_1^*}\Big\{\ell_1^{(0)} X_0(\cdot)c + \ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\Big\} = 0$. З урахуванням (7), остання умова спрощується

$$P_{Q_1^*}\big\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\big\} = 0. \tag{17}$$

За умови (17), враховуючи, що (згідно лемі 2) $k \geq n$ та матриця Q_1-повного рангу, знаходимо $\gamma_1 = Q_1^+\Big\{\ell_1^{(0)}\ X_0(\cdot)c + \ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\Big\}$, звідки $\gamma_1 = Y_1 c + \bar{\gamma}_1$, де $\bar{\gamma}_1 = Q_1^+\Big\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\Big\}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на $[\tau_1, \tau_2[$ має вигляд

$$z(t, c) = X(t)c + K\Big[f(s); a_1\Big](t),$$

де $K\Big[f(s); a_1\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{I}(t)$. Розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на $[\tau_2, \tau_3[$ шукаємо у вигляді $z(t, \gamma_2) = X_0(t)\gamma_2 + \mathcal{I}(t),\ \ \gamma_2 \in R^n$. Для знаходження невідомої γ_2 одержуємо рівняння

$$Q_2\gamma_2 = \ell_2^{(0)}\ X_0(\cdot)c + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)Y_1 c + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2,$$

для розв'язності якого, з урахуванням (8), необхідно і достатньо, щоб

$$P_{Q_2^*}\Big\{\ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\bar{\gamma}_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2\Big\} = 0. \tag{18}$$

За умови (18), враховуючи, що (згідно лемі 2) $k \geq n$ та матриця Q_2-повного рангу, знаходимо $\gamma_2 = Y_2 c + \bar{\gamma}_2$, де $\bar{\gamma}_2 = Q_2^+ \Big\{ \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2 \mathcal{I}(\cdot) - a_2 \Big\}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на $[\tau_2, \tau_3[$ має вигляд $z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s); a_2\Big](t)$, де

$$K\Big[f(s); a_2\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_2 + \mathcal{I}(t).$$

Розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на проміжках $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, де $i = 3, 4, \ \dots \ , \ p-1$, а також на відрізку $[\tau_p, b]$ шукаємо у вигляді $z(t, \gamma_i) = X_0(t)\gamma_i + \mathcal{I}(t), \gamma_i \in R^n$. Для знаходження невідомої γ_p одержуємо рівняння

$$Q_p \gamma_p = \Big\{ \sum_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)} \ X_0(\cdot) Y_j \Big\} c + \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)} \ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p \mathcal{I}(\cdot) - a_p,$$

для розв'язності якого, з урахуванням (9), необхідно і достатньо, щоб

$$P_{Q_p^*} \Big\{ \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)} \ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p \mathcal{I}(\cdot) - a_p \Big\} = 0. \qquad (19)$$

За умови (19), враховуючи, що (згідно лемі 2) $k \geq n$ та матриця Q_p-повного рангу, знаходимо $\gamma_p = Y_p c + \bar{\gamma}_p$, де

$$\bar{\gamma}_p = Q_p^+ \Big\{ \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)} \ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p \mathcal{I}(\cdot) - a_p \Big\}.$$

При цьому розв'язок задачі Коші (15), (16), (10) на проміжку $[\tau_p, b]$ має вигляд

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s); a_p\Big](t),$$

де $K\Big[f(s); a_p\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_p + \mathcal{I}(t)$. Таким чином, доведено наступну лему.

Лема 3. *Нехай умови леми 2 та вимоги*

$$P_{Q_i^*} \Big\{ \sum_{j=1}^{i-1} \ell_i^{(j)} \ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_i \mathcal{I}(\cdot) - a_i \Big\} = 0, \ \ i = 1, 2, \ \dots \ , \ p$$

виконані. Неоднорідна задача Коші (10), (15), (16) при цьому має єдиний розв'язок

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s); a_i\Big](t), \qquad (20)$$

де

$$K\left[f(s);a_i\right](t)=\begin{cases} \mathcal{I}(t)=X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, & t\in[a,\tau_1[,\\ X_0(t)Q_1^+\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot)-a_1\}+\mathcal{I}(t), & t\in[\tau_1,\tau_2[,\\ X_0(t)Q_2^+\{\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\gamma_1+\ell_2\mathcal{I}(\cdot)-a_2\}+\mathcal{I}(t), & t\in[\tau_2,\tau_3[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, & \dots\dots\dots\dots\\ X_0(t)Q_p^+\left\{\sum\limits_{j=1}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)\bar\gamma_j+\ell_p\mathcal{I}(\cdot)-a_p\right\}+\mathcal{I}(t), & t\in[\tau_p,b] \end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші (10), (15), (16).

Приклад 4. Умови леми 3 виконуються для системи

$$\begin{cases} dz/dt=1,\ t\in[0;3], & t\neq\tau_i,\\ \ell_1z(\cdot)=\int\limits_0^1 z(t)dt-\int\limits_1^2 z(t)dt=0, & \tau_1=1.\\ \ell_2z(\cdot)=\int\limits_0^1 z(t)dt+\int\limits_1^2 z(t)dt-2\int\limits_2^3 z(t)dt=0, & \tau_2=2. \end{cases} \tag{21}$$

Загальний розв'язок системи (21) має вигляд (20), де нормальна фундаментальна матриця $X(t)\equiv 1,\ t\in[0,3]$, а частинний розв'язок визначає оператор Гріна задачі Коші

$$K\left[f(s);\ a_i\right](t)=\begin{cases} t+1, & t\in[0,1[,\\ t+3, & t\in[1,2[,\\ t-2, & t\in[2,3]. \end{cases}$$

Для задач без перемикань, у випадку виродженого імпульсного впливу узагальнений оператор Гріна задачі Коші $K\left[f(s);\ a_i\right](t)$ співпадає з оператором [4, с.591], а у випадку невиродженого імпульсного впливу – з оператором [3]. В свою чергу, узагальнений оператор Гріна $K\left[f(s);\ a_i\right](t)$ задачі Коші (15), (16), (10) узагальнює відповідний оператор Гріна задачі Коші $K\left[f(s);\ a_i\right](t)$ [12, 17, 18] на випадок систем із перемиканнями.

5. Узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі з імпульсним впливом для систем з перемиканнями. Розглянемо далі задачу про знаходження розв'язків $z=z(t)=\mathrm{col}\Big(z_1(t),\ \dots\ ,\ z_n(t)\Big),\ z_j(\cdot)\in C^1\Big\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\}$, $j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$ системи звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями (15) та імпульсним впливом типу "interface conditions"(16), які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot)=\alpha,\ \alpha\in R^m. \tag{22}$$

Тут $\ell z(\cdot)$ – лінійний обмежений функціонал $\ell z(\cdot):\ C^1\Big\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\}\to R^m$. Позначимо сталу $(m\times n)$-матрицю $Q:=\ell X(\cdot)$ та введемо $(d\times m)$-вимірну матрицю $P_{Q_d^*}$, складену з d-лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*}; тут

$$n - n_1 = r,\ m - n_1 = d,\ \text{rank}\ Q = n_1 \leq \min\ (m,\ n).$$

Доведення наступного твердження цілком аналогічне доведенню теореми [16].

Теорема. *Критична* ($P_{Q*} \neq 0$) *крайова задача (15), (16), (22) розв'язна тоді й тільки тоді, коли*

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell K\Big[f(s); a_i\Big](\cdot)\right\} = 0 \tag{23}$$

і має r-параметричну сім'ю розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t),$$

де

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](t) = X(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K\Big[f(s); a_i\Big](\cdot)\right\} + K\Big[f(s); a_i\Big](t)$$

– узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для системи з перемиканнями (15), (16), (22), $(n \times r)$*-вимірна матриця* $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$*, складена з* r*-лінійно-незалежних розв'язків однорідної частини задачі (15), (16), (22).*

У випадку виродженого імпульсного впливу узагальнений оператор Гріна $G\Big[f; \alpha\Big](t)$ співпадає з оператором [4, с.591], а у випадку невиродженого імпульсного впливу – з оператором [3]. В свою чергу, оператор Гріна $G\Big[f; \alpha\Big](t)$ задачі (15), (16), (22) узагальнює відповідний оператор Гріна $G\Big[f; \alpha\Big](t)$ [16] на випадок систем із перемиканнями.

Приклад 5. Умови теореми виконуються для задачі про знаходження розв'язків системи (21), які задовольняють умові періодичності

$$\ell z(\cdot) = z(0+) - z(3-0) = 0. \tag{24}$$

Оскільки в даному прикладі $Q = Q^+ = 0$, то загальний розв'язок задачі (21), (24) має вигляд (20), де нормальна фундаментальна матриця $X(t) \equiv 1,\ t \in [0, 3]$, а частинний розв'язок визначає оператор Гріна задачі Коші $K[f(s); a_i](t)$ системи (21), який в даному випадку співпадає з оператором Гріна задачі (21), (24).

Наприкінці статті, вважаємо приємним обов'язком висловити вдячність доктору фіз.-мат. наук, професору, провідному науковому співробітнику Інституту математики НАН України О.А. Бойчуку за обговорення одержаних результатів, а також доктору фіз.-мат. наук, професору Київського національного університету ім. Тараса Шевченка Д.Я. Хусаїнову, який привернув нашу увагу до систем звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями.

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317pp.
2. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады Академии Наук СССР.– 1986, Т. 286, №5. – С.1037-1040.
3. *Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения.– 1991. – 27, №9.– С.1516-1521.
4. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996.– Т.48, №5. – С.588-594.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М. Наука, 1977. – 744с.
6. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– Киев: Вища шк., 1987. – 287с.
7. *Conti R.* On ordinary differential equation with interface conditions // Journ. of Diff. Eq. – 1968. – №1. Vol.4. – P.4-11.
8. *Pignani T. J., Whyburn W. M.* Differential Systems with Interface and General Boundary Conditions // F. Elisha Mitchell Sci. Soc. – 1956. – №72. – P.1-14.
9. *Stallard F.W.* Differential systems with interface conditions. Oak Ridge National Laboratory Report № 1876.
10. *Pham D., Weiss D.* Sur un probléme aux limites pour un systéme ordinaire d'équations differentielles. Compt. Red. Acad. Sci. Paris. – 1966. – N262. P.123-126.
11. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Линейные системы с вырожденным импульсным воздействием и сопряженные к ним // Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2. N2. – С.285-289.
12. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доклады НАН Украины. – 1999. – N6. – С.43-47.
13. *Sčhwabik S.* Differential Equations with Interface Conditions// Časopis Pro pestovani matematiky. – 1980. – roč.105. – P.391-410.
14. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems // Ann. Vft. Pura et Appl. – 1968. – Vol.80, – P.123-136.
15. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М. Мир, – 1988. – 240с.
16. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т.37. – №8. – С.1132-1135.
17. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. Июль 2001. – Т.379. – №2. – С.170-172.
18. *Чуйко О.С.* Слабконелінійні крайові задачі з імпульсним впливом загального вигляду // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. – 2004. – №5. – С.51-52.

Славянский государственный педагогический ун-т
`chujko-slav@inbox.ru`

Получено 03.03.07