УДК 517.946

©2008. **А.В. Мартыненко**

ОЦЕНКА МАКСИМУМА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И ИСТОЧНИКОМ

Изучается задача Коши для вырождающегося параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью вида

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p.$$

Найдены условия на параметры уравнения и начальную функцию, при которых решение задачи Коши существует глобально по времени. Получены точные оценки максимума решения.

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для уравнения с неоднородной плотностью и источником

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T), \quad T > 0, \quad N \geq 1,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Всюду далее предполагаем, что $\rho(x) = (1+|x|)^{-l}$, $\lambda > 0$, $0 \leq l < \lambda + 1 < N$, $m+\lambda-2 > 0$, $p > m+\lambda-1$, $u_0(x)$ – неотрицательная измеримая функция из класса $L_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$ и такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho(x) u_0^{1+\frac{m+\lambda-1}{\lambda}} dx < \infty.$$

Хорошо известно [1], что задача Коши для уравнения с источником может не иметь глобального по времени решения вне зависимости от свойств начальной функции. Поэтому, одним из наиболее важных является вопрос об условиях на параметры уравнения, при которых существует глобальное по времени решение. Так, для уравнения (1) при $\rho(x) \equiv 1$ справедлив следующий результат. Если $1 < p < p^* = m + \lambda - 1 + (\lambda+1)/N$, то решение взрывается за конечное время. Если же $p > p^*$, то решение существует глобально по времени и справедлива оценка

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \leq \gamma t^{-\frac{N}{K}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)dx\right]^{\frac{\lambda+1}{K}} \quad \forall t \in (0,\infty),$$

где $K = N(m+\lambda-2)+\lambda+1$. Такие утверждения принято называть результатами типа Фуджиты-Хаякавы, а p^* – показателем Фуджиты. Детальное изложение этих вопросов можно найти в работах [1]–[8].

Решения уравнения (1) без источника с неоднородной плотностью $\rho(x)$ обладают некоторыми качественно иными свойствами по сравнению со случаем $\rho(x) \equiv 1$. Например, стабилизация к нулю решения при $t \to \infty$ и конечная скорость распространения носителя нарушаются, если $\rho(x)$ слишком быстро убывает на бесконечности (см. [9]– [17]).

В работе ([18]) изучалась задача Коши для уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + \rho(x)u^p. \tag{3}$$

Было, в частности, установлено, что в случае $\rho(x) = (1+|x|)^{-l}, \;\; 0 \le l < \lambda+1$ решение взрывается при $m+\lambda-1 < p < p^*(l) = m+\lambda-1+(\lambda+1-l)/(N-l)$, а при $p > p^*(l)$ решение существует глобально по времени и выполняется оценка

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \le \gamma t^{-\frac{N-l}{K_l}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,\tau)dx \right]^{\frac{\lambda+1-l}{K_l}} \quad \forall t \in (0,\infty),$$

где $K = (N-l)(m+\lambda-2)+\lambda+1-l$. В случае $\rho(x) = (1+|x|)^{-l}, \;\; l > \lambda+1$ решение уравнения (3) существует глобально по времени при $p > m+\lambda-1$ и выполняется универсальная, т.е. не зависящая от начальной функции, оценка

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \le \gamma t^{-\frac{1}{m+\lambda-2}} \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Отметим, что частный случай уравнения (3) был, по всей видимости, впервые рассмотрен в [19], где изучались спектральные свойства автомодельных решений.

Некоторые свойства решений уравнения (1) было изучены в [20]. Было доказано, что при $m+\lambda-1 < p < p^*(l) = m+\lambda-1+(\lambda+1)/(N-l)$ решение взрывается за конечное время для произвольной начальной функции $u_0 \ne 0$. Кроме того, была получена универсальная оценка решения вблизи времени обострения. Однако, оставался открытым вопрос о разрешимости и оценке максимума при $p > p^*(l)$.

В данной работе, с помощью некоторой модификации методов, использованных в [21] и [18], получена точная оценка максимума решения для $p > \tilde{p}$, где $\tilde{p}$, вообще говоря, больше $p^*(l)$.

Введем понятие обобщенного решения, для чего заметим, что (1) допускает эквивалентную запись

$$\rho(x)\frac{\partial v^\beta}{\partial t} = \beta^\lambda div(|Dv|^{\lambda-1}Dv) + v^\mu,$$

где $\beta = \frac{\lambda}{m+\lambda-1}$, $\mu = \frac{\lambda p}{m+\lambda-1}$, $u = v^\beta$.

Определение. Будем говорить, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение (или просто решение) задачи (1), (2) в $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$, если $u^{(m+\lambda-1)/\lambda}$ является элементом пространства

$$L_{\lambda+1}(0,T,W^1_{\lambda+1}(\mathbb{R}^N)) \cap L_{\mu+1}(0,T,L_{\mu+1}(\mathbb{R}^N)) \cap C([0,T),L_{\beta+1,\rho}(\mathbb{R}^N))$$

и удовлетворяет задаче (1), (2) в смысле интегрального тождества.

Замечание 1. Во избежание стандартных громоздких рассуждений, связанных с необходимостью аппроксимации решений гладкими функциями, всюду в дальнейшем будем считать решения задачи (1), (2) достаточно гладкими.

Замечание 2. Если не оговорено противное, то всюду дальше через γ, γ_1, γ_2,... будем обозначать постоянные, которые зависят только от параметров задачи l, m, λ, p, N.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{l}{p-1}, \quad \tilde{p} = \frac{N(m+\lambda-1)}{N-\lambda-1}, \quad K_l = (N-l)(m+\lambda-2)+\lambda+1,$$

$$Q_0 = \frac{(N-l-\alpha)(p-m-\lambda+1)}{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}.$$

Теорема 1. *Пусть $p \geq \tilde{p}$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{\alpha(q-p)} u_0^q(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-l} u_0(x)dx \leq \delta, \tag{4}$$

где $q > Q_0$ и δ – достаточно малое число, зависящее лишь от параметров уравнения.

Тогда задача (1)–(2) имеет глобальное по времени решение $u(x,\tau)$ и $\forall t \in (0,\infty)$ справедливы оценки

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \leq \gamma t^{-\frac{N-l}{K_l}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-l} u_0(x)dx\right]^{\frac{\lambda+1-l}{K_l}}, \tag{5}$$

$$\|(1+|x|)^{\alpha} u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \leq \gamma t^{-\frac{N-\alpha-l}{K_l}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-l} u_0(x)dx\right]^{\frac{\lambda+1-l}{K_l}}, \tag{6}$$

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-l} u(x,\tau)dx \leq \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-l} u_0(x)dx, \tag{7}$$

где γ зависит только лишь от параметров уравнения.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть B – шар радиуса $d > 0$ с центром в точке $x = 0$, $T > 0$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$(1+|x|)^{-l}\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + min\{d, u^p\}, \quad (x,t) \in B\times(0,T) \tag{8}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B \times (0,T), \tag{9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_0(x) \in C_0^{\infty}(B). \tag{10}$$

С помощью стандартных рассуждений (см. например [22], [23]) можно показать, что для любого $d < \infty$ задача (8)–(10) имеет обобщенное решение при $t \in (0, \infty)$, которое является непрерывным по Гельдеру ([24]).

Задача Коши (1)–(2) может быть аппроксимирована задачами (8)–(10). Таким образом, для доказательства теоремы необходимо получить не зависящие от d оценки (5)–(7) для решения задачи (8)–(10), при условии, что $u_0(x)$ из (10) удовлетворяет (4).

С помощью результатов работы ([18]) легко доказывается следующая

Лемма 1. *Пусть $u_0(x,t)$ решение задачи (8)–(10) и для всех $t \in (0,T)$ выполнено условие*

$$\Omega_0(t) \equiv \sup_{0<\tau<t} \sup_{x \in B} \left\{ \tau(1+|x|)^l u(x,\tau)^{p-1} \right\} \le 2, \tag{11}$$

тогда, для всех $t \in (0,T)$ и произвольного $\omega \ge 0$ справедлива оценка

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty, B\times(\frac{t}{2},t)} \le \gamma t^{-\frac{N-l}{H_{l,\omega}}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_B \frac{u^{\omega+1}}{(1+|x|)^l} dx \right]^{\frac{\lambda+1-l}{H_{l,\omega}}}, \tag{12}$$

где постоянная γ зависит только лишь от ω и параметров уравнения, и использовано обозначение

$$H_{l,\omega} = (N-l)(m+\lambda-2) + (\omega+1)(\lambda+1-l).$$

Лемма 1 носит условный характер: для доказательства оценки (12) при $t \in (0, \infty)$ необходимо проверить справедливость условия (11) при $t \in (0,\infty)$. Очевидно, для произвольного $d > 0$ и достаточно малого $T > 0$ условие (11) выполнено в силу непрерывности функции $u(x,t)$. Рассуждая далее как в ([18]), можно выбрать δ так, что из оценки (12) и условия (4) будет следовать $T = \infty$, однако при этом δ будет зависеть от d, что делает невозможным переход к пределу при $d \to \infty$. Для того, чтобы избежать возникающих трудностей, необходимо наряду с оценкой (12) иметь оценку максимума для функции $(1+|x|)^{l/(p-1)}u(x,\tau)$, которая позволит доказать (11) для $T = \infty$ при малом δ, не зависящем от d.

Выполним подстановку $u(x,t) = (1+|x|)^{-\alpha}v(x,t)$, $\alpha = l/(p-1)$, тогда задача (8)–(10) примет вид:

$$(1+|x|)^{-l-\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= div\left(\frac{v^{m-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} \left| Dv - \frac{\alpha v}{1+|x|} D|x| \right|^{\lambda-1} \left(Dv - \frac{\alpha v}{1+|x|} D|x| \right) \right) +$$

$$+ min\{d, (1+|x|)^{-\alpha p} v^p\}, \quad (x,t) \in B \times (0,T) \tag{13}$$

$$v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B \times (0,T), \tag{14}$$

$$v(x,0) = (1+|x|)^{\alpha} u_0(x). \tag{15}$$

Пусть $a_1 > a_2 > 0, \quad t > \tau_1 > \tau_2 > 0.$

Введем в рассмотрение последовательности

$$\theta_i = \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)2^{-i}, \quad k_i = a_2 + (a_1 - a_2)2^{-i}, \quad i = \overline{0, \infty},$$

цилиндры $U_i = B \times (\theta_i, t)$ и гладкие срезки $\xi_i(\tau)$ такие, что

$$\xi_i(\tau) = \begin{cases} 1 & \theta_{i-1} < \tau < t, \\ 0 & 0 < \tau < \theta_i, \end{cases} \qquad |(\xi_i)_\tau| \le \frac{2^i}{\tau_1 - \tau_2}, \quad i = \overline{1, \infty}.$$

Лемма 2. *Для $i = \overline{1, \infty}$, справедливо неравенство*

$$\sup_{\tau_1 < \tau < t} \int_B \frac{w_0^q}{(1 + |x|)^{l+\alpha}} dx + \iint_{U_{i-1}} (1 + |x|)^{-\alpha(m+\lambda-1)} |Dw_i|^{\lambda+1} dx d\tau \le$$

$$\le \gamma b^i F \iint_{U_i} \frac{w_{i+1}^q}{(1 + |x|)^{l+\alpha}} dx d\tau, \tag{16}$$

где $b > 1$, $s > max[1, 2 - m]$, $q = \frac{(s+1)(\lambda+1)}{m+\lambda+s-1}$, $w_i = (v - k_i)_+^{\frac{m+\lambda+s-1}{\lambda+1}}$, γ *зависит от* s *и*

$$F = F(\tau_1, \tau_2, a_1, a_2, t) = \left[\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} + \frac{\Omega(t)}{\tau_2}\right] \left(\frac{a_1}{a_1 - a_2}\right)^2,$$

$$\Omega(t) = \sup_{0<\tau<t} \sup_{x \in B} \left\{ \frac{\tau v^{m+\lambda-2}}{(1 + |x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}} \right\} + \sup_{0<\tau<t} \sup_{x \in B} \{\tau v^{p-1}\}.$$

Доказательство. Умножая обе части уравнения (13) на пробную функцию $(v - k_i)_+^s \xi_i$ и интегрируя по цилиндру U_i, с помощью элементарных рассуждений получаем

$$\iint_{U_i} \frac{[(v - k_i)_+^{s+1}]_\tau}{(1 + |x|)^{l+\alpha}} \xi_i dx + \iint_{U_i} \frac{v^{m-1}(v - k_i)_+^{s-1}}{(1 + |x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} \left| Dv - \frac{\alpha v}{1 + |x|} D|x| \right|^{\lambda+1} \xi_i dx d\tau \le$$

$$\le \gamma \iint_{U_i} \frac{v^m (v - k_i)_+^{s-1}}{(1 + |x|)^{\alpha(m+\lambda-1)+1}} \left| Dv - \frac{\alpha v}{1 + |x|} D|x| \right|^\lambda \xi_i dx d\tau +$$

$$+ \gamma \iint_{U_i} (1 + |x|)^{-\alpha p} v^p (v - k_i)_+^s \xi_i dx d\tau. \tag{17}$$

С помощью неравенства Юнга первый член правой части (17) оценивается сверху величиной

$$\varepsilon \iint_{U_i} \frac{v^{m-1}(v - k_i)_+^{s-1}}{(1 + |x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} \left| Dv - \frac{\alpha v}{1 + |x|} D|x| \right|^{\lambda+1} \xi_i dx d\tau +$$

$$+\gamma(\varepsilon)\iint\limits_{U_i}\frac{v^{m+\lambda}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)+\lambda+1}}\xi_i dxd\tau,$$

а второй член левой части (17) оценивается снизу величиной

$$\gamma_1\iint\limits_{U_i}\frac{v^{m-1}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}}|Dv|^{\lambda+1}\xi_i dxd\tau-\gamma_2\iint\limits_{U_i}\frac{v^{m+\lambda}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)+\lambda+1}}\xi_i dxd\tau.$$

Таким образом, интегрируя по частям первый член левой части, из неравенства (17) получаем

$$\int\limits_B\frac{(v(x,t)-k_i)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}\xi_i dx+\iint\limits_{U_i}\frac{v^{m-1}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}}|Dv|^{\lambda+1}\xi_i dxd\tau\leq$$

$$\leq\frac{\gamma 2^i}{\tau_1-\tau_2}\iint\limits_{U_i}\frac{(v-k_i)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}\xi_i dxd\tau+\gamma\iint\limits_{U_i}\frac{v^{m+\lambda}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)+\lambda+1}}\xi_i dxd\tau+$$

$$+\gamma\iint\limits_{U_i}(1+|x|)^{-\alpha p}v^p(v-k_i)_+^s\xi_i dxd\tau. \tag{18}$$

Последовательность цилиндров U_i является расширяющейся, и справедливы неравенства

$$(v-k_0)_+\leq(v-k_i)_+\leq(v-k_{i+1})_+\leq v, \tag{19}$$

$$\frac{v}{k_i}\chi_i\leq\frac{v-k_{i+1}}{k_i-k_{i+1}}\chi_i, \tag{20}$$

где χ_i – характеристическая функция множества $\{(x,t):v(x,t)\geq k_i\}$. Поэтому из неравенства (18) можно получить

$$\sup_{\tau_1<\tau<t}\int\limits_B\frac{(v(x,t)-k_0)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx+$$

$$+\iint\limits_{U_{i-1}}\frac{1}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}}\left|D(v-k_i)_+^{\frac{m+\lambda+s-1}{\lambda+1}}\right|^{\lambda+1}dxd\tau\leq$$

$$\leq\frac{\gamma 2^i}{\tau_1-\tau_2}\iint\limits_{U_i}\frac{(v-k_{i+1})_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau+$$

$$+\gamma\iint\limits_{U_i}\left\{\frac{\tau\ k_i^2\ v^{m+\lambda-2}}{\tau_2\ (k_i-k_{i+1})^2(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}}\right\}\frac{(v-k_{i+1})_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau+$$

$$+\gamma\iint\limits_{U_i}\left\{\frac{\tau\ k_i\ v^{p-1}}{\tau_2\ (k_i-k_{i+1})(1+|x|)^{\alpha(p-1)-l}}\right\}\frac{(v-k_{i+1})_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau.$$

Отсюда следует неравенство (16). □

Лемма 3. *Пусть $p\geq\tilde{p}$, тогда для $i=\overline{1,\infty}$ справедливо неравенство*

$$\sup_{\tau_1<\tau<t}\int\limits_B\frac{w_0^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx+\iint\limits_{U_{i-1}}\frac{|Dw_i|^{\lambda+1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}}dxd\tau\leq$$

$$\leq\varepsilon\iint\limits_{U_i}\frac{|Dw_{i+1}|^{\lambda+1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}}dxd\tau+$$

$$+C(\varepsilon)b_1^iF^{M_1}(t-\tau_2)\left[\sup_{\tau_2<\tau<t}\int\limits_B\frac{w_\infty^\mu}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx\right]^{M_2}. \qquad (21)$$

Здесь $s>\omega>0$, $\mu=\frac{(\lambda+1)(\omega+1)}{m+\lambda+s-1}$, $\varepsilon>0$, $C(\varepsilon)>0$, $b_1>1$ *и использованы следующие обозначения*

$$a=\frac{(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{q})(N-l-\alpha)}{\frac{N-l-\alpha}{\mu}-\frac{N-\lambda-1+\alpha(m+\lambda-1)}{\lambda+1}},\quad M_1=\frac{\lambda+1}{\lambda+1-qa},\quad M_2=M_1(1-a)\frac{q}{\mu}.$$

Доказательство. Неравенство (21) можно получить из весового мультипликативного неравенства [25] и леммы 2 с помощью стандартных рассуждений (см. например [18]). При этом условие $p\geq\tilde{p}$ является следствием ограничений, накладываемых на показатели в весовом мультипликативном неравенстве [25]. □

Для дальнейшего нам понадобятся следующие обозначения

$$\mu(t)=\sup_{0<\tau<t}\int\limits_B\frac{v(x,\tau)^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx,\quad \mu(0)=\int\limits_B\frac{v_0(x)^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx,\quad q>Q_0,$$

$$M(t)=\sup_{0<\tau<t}\int\limits_B\frac{v(x,\tau)}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx,\quad M(0)=\int\limits_B\frac{v_0(x)}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx,$$

$$T=\sup\{t:\Omega(t)\leq 1\},\quad T_0=\sup\{t:\Omega_0(t)\leq 2\},$$

$$T_\mu=\sup\{t:\mu(t)\leq 2\mu(0)\},\quad T_M=\sup\{t:M(t)\leq 2M(0)\},$$

$$G_{l,\alpha}(\omega)=(N-l-\alpha)(m+\lambda-2)+(\omega+1)[\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l].$$

Заметим, что

$$H_{l,\omega}\equiv G_{l,0}(\omega),\qquad H_{l,0}\equiv G_{l,\alpha}(0)\equiv K_l,$$

$$M(t)\equiv\sup_{0<\tau<t}\int\limits_B\frac{u(x,\tau)}{(1+|x|)^l}dx,\quad M(0)\equiv\int\limits_B\frac{u_0(x)}{(1+|x|)^l}dx.$$

Лемма 4. *Пусть $p \geq \tilde{p}$, $q > Q_0$ и δ из условия (4) достаточно мало, тогда найдется такое $\tilde{T} > 1$, что*

$$min\{T, T_\mu, T_M\} \geq \tilde{T}.$$

Кроме того, для всех $t \in (0, T)$ и произвольного $\omega \geq 0$ справедлива оценка

$$\|v(x,\tau)\|_{\infty, B\times(\frac{t}{2},t)} \leq \gamma t^{-\frac{N-l-\alpha}{G_{l,\alpha}(\omega)}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_B \frac{v^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx\right]^{\frac{\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l}{G_{l,\alpha}(\omega)}}, \qquad (22)$$

где постоянная γ зависит от ω.

Доказательство. Очевидно, что $T > 0$ в силу непрерывности функции $u(x,\tau)$. Докажем оценку (22) для $t \in (0, T)$.

Пользуясь обозначением

$$I_i = \iint\limits_{U_i} \frac{|Dw_{i+1}|^{\lambda+1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} dx d\tau$$

из рекуррентного неравенства (21) получаем

$$\sup_{\tau_1<\tau<t} \int\limits_B \frac{w_0^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx + I_1 \leq \varepsilon^i I_i +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} (\varepsilon b_1)^j C(\varepsilon) F^{M_1}(t-\tau_2) \left[\sup_{\tau_2<\tau<t} \int\limits_B \frac{w_\infty^\mu}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx\right]^{M_2}. \qquad (23)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon b_1 < \frac{1}{2}$ и устремим $i \to \infty$, тогда из (23) следует

$$\sup_{\tau_1<\tau<t} \int\limits_B \frac{(v-a_1)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx \leq \gamma(t-\tau_2) F^{M_1} \left[\sup_{\tau_2<\tau<t} \int\limits_B \frac{(v-a_2)_+^{\mu+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx\right]^{M_2}. \qquad (24)$$

Пусть k – постоянная, значение которой будет выбрано ниже, для $n = \overline{0,\infty}$ рассмотрим последовательности

$$t_n = \frac{t}{2}(1-2^{-n-1}), \quad h_n = k(1-2^{-n-1}), \quad \overline{h}_n = \frac{1}{2}(h_n + h_{n+1}).$$

В неравенстве (24) положим

$$\tau_1 = t_{n+1}, \quad \tau_2 = t_n, \quad a_1 = \overline{h}_n, \quad a_2 = h_n.$$

Учитывая, что $\Omega(t) \leq 1$ при $t \in (0, T)$, для всех $t \in (0, T)$ получаем

$$F(\tau_1, \tau_2, a_1, a_2, t) = F_1(t_{n+1}, t_n, \overline{h}_n, h_n, t) \leq \frac{b^n}{t}, \quad \text{где} \quad b = const > 1,$$

а неравенство (24) будет иметь вид

$$\sup_{t_{n+1}<\tau<t}\int\limits_B \frac{(v-\overline{h}_n)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx \le b^n t^{-M_1+1}\left[\sup_{t_n<\tau<t}\int\limits_B \frac{(v-h_n)_+^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx\right]^{M_2}. \qquad (25)$$

Заметим, что

$$\int\limits_B \frac{(v-h_{n+1})_+^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx \le (h_{n+1}-\overline{h}_n)^{\omega-s}\int\limits_B \frac{(v-\overline{h}_n)_+^{s+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx. \qquad (26)$$

Используя обозначение

$$Y_n = \sup_{t_n<\tau<t}\int\limits_B \frac{(v-h_n)_+^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx,$$

из (25) и (26) получим рекуррентное неравенство

$$Y_{n+1} \le b^n k^{\omega-s} t^{-M_1+1} Y_n^{M_2}, \quad \text{где} \quad b = const > 1.$$

Из итеративной леммы(см. [26, гл. II, лемма 5.6]) следует $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$ (что в свою очередь означает $\|v(x,\tau\|_{\infty, B\times(\frac{t}{2},t)} \le k$), если

$$k^{\omega-s} Y_0^{M_2-1} t^{-M_1+1} \le \gamma_0.$$

Это будет выполнено, если

$$k = \gamma t^{\frac{-M_1+1}{s-\omega}} Y_0^{\frac{M_2-1}{s-\omega}} \le \gamma t^{\frac{-M_1+1}{s-\omega}}\left[\sup_{\frac{t}{4}<\tau<t}\int\limits_B \frac{v^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dx\right]^{\frac{M_2-1}{s-\omega}},$$

откуда получаем справедливость оценки (22) для $t \in (0,T)$.

Докажем, что $min\{T, T_\mu\} > 1$, для чего рассмотрим два случая: 1) $T_\mu < T$; 2) $T_\mu \ge T$.

В случае 1) умножим уравнение (13) на u^{q-1}, проинтегрируем по $B \times (0, T_\mu)$ и рассуждая как в лемме 2, имеем

$$\int\limits_0^{T_\mu}\int\limits_B \frac{(v^q)_\tau}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau \le \gamma \int\limits_0^{T_\mu}\int\limits_B v^{p-1}\frac{v^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau +$$

$$+\gamma \int\limits_0^{T_\mu}\int\limits_B \frac{v^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l}}\frac{v^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}}dxd\tau,$$

откуда получаем

$$\mu(T_\mu) \le \mu(0) + \gamma\mu(T_\mu)\int\limits_0^{T_\mu} \|v(x,\tau)\|_{\infty,B}^{m+\lambda-2} d\tau + \gamma\mu(T_\mu)\int\limits_0^{T_\mu} \|v(x,\tau)\|_{\infty,B}^{p-1} d\tau.$$

Для $\tau \in (0, T_\mu)$ выполнена оценка (22) и $\mu(\tau) \le 2\mu(0) \le 2\delta$, следовательно, из последнего неравенства получаем

$$\mu(T_\mu) \le \mu(0) + \gamma\mu(T_\mu)\int\limits_0^{T_\mu} \tau^{-\frac{(N-l-\alpha)(m+\lambda-2)}{G_{l,\alpha}(q-1)}} \delta^{\kappa_1} d\tau +$$

$$+\gamma\mu(T_\mu)\int\limits_0^{T_\mu} \tau^{-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}} \delta^{\kappa_2} d\tau, \tag{27}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{[\lambda + 1 + \alpha(m+\lambda-2) - l](m+\lambda-2)}{G_{l,\alpha}(q-1)},$$

$$\kappa_2 = \frac{[\lambda + 1 + \alpha(m+\lambda-2) - l](p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}.$$

Нетрудно видеть, что при $q > Q_0$ оба интеграла в (27) сходящиеся при $\tau = 0$, значит, при достаточно малом δ из предположения $T_\mu \le 1$ и (27) следует $\mu(T_\mu) \le \mu(0) + \mu(T_\mu)/3$, т.е. $\mu(T_\mu) \le 2\mu(0)/3$, но это противоречит выбору T_μ. Таким образом, $T > T_\mu > 1$ в случае 1).

Из предположения $T \le 1$, условия $q > Q_0$ и оценки (22) при достаточно малом δ имеем противоречие

$$1 = \Omega(T) \le \gamma \sup_{0<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{(N-l-\alpha)(m+\lambda-2)}{G_{l,\alpha}(q-1)}}\delta^{\kappa_1}\right\} +$$

$$+\gamma \sup_{0<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}}\delta^{\kappa_2}\right\} \le \gamma(\delta^{\kappa_1} + \delta^{\kappa_2}) \le \frac{1}{2},$$

следовательно $T_\mu \ge T > 1$ в случае 2).

Покажем теперь, что $T_M > 1$. Предположим $T_M < min\{T, T_\mu\}$ (в противном случае утверждение очевидно), тогда умножим уравнение (8) на финитную функцию $u/(u+\varepsilon)$ и проинтегрируем по $B \times (0, T_M)$:

$$\sup_{0<\tau<T_M}\int\limits_B \frac{1}{(1+|x|)^l}\int\limits_0^{u(\tau)} \frac{z}{z+\varepsilon} dz dx + \gamma_0 \int\limits_0^{T_M}\int\limits_B u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}\frac{\varepsilon}{(u+\varepsilon)^2} dx d\tau \le$$

$$\le \int\limits_B \frac{1}{(1+|x|)^l}\int\limits_0^{u_0} \frac{z}{z+\varepsilon} dz dx + \gamma\int\limits_0^{T_M}\int\limits_B u^p \frac{u}{u+\varepsilon} dx d\tau.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, из последнего неравенства получаем

$$M(T_M) \le M(0) + \gamma M(T_M) \int\limits_0^{T_M} \|v(x,\tau)\|_{\infty,B}^{p-1} d\tau.$$

Применение оценки (22) дает

$$M(T_M) \le M(0) + \gamma M(T_M) \int\limits_0^{T_M} \tau^{-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}} \delta^{\kappa_2} d\tau.$$

Отсюда, выбрав δ достаточно малым, легко получаем $T_M > 1$. $\square$

Очевидно, что $T_0 \ge T$, значит, оценка (12) справедлива при $t \le \tilde{T}$. Таким образом, для доказательства теоремы необходимо получить $T_0 = T_M = \infty$. Для этого нам понадобится локальная по пространственным переменным оценка типа (22), вывод которой будет осуществлен ниже.

Пусть $a_1 > a_2 > 0, \quad t > \tau_1 > \tau_2 > 0, \quad d > R_1 > R_2 > 0$. Введем в рассмотрение для $i = \overline{0,\infty}$ последовательности

$$\theta_i = \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)2^{-i}, \quad k_i = a_2 + (a_1 - a_2)2^{-i}, \quad R_i = R_2 + (R_1 - R_2)2^{-i},$$

области

$$H_i = B_d(0) \setminus B_{R_i}(0), \quad U_i = H_i \times (\theta_i, t), \quad S_i = B_{R_{i-1}} \setminus B_{R_i}(0), \quad W_i = S_i \times (\theta_i, t)$$

и гладкие срезки $\xi_i(x,\tau)$ такие, что

$$\xi_i(x,\tau) = \begin{cases} 1 & (x,\tau) \in U_{i-1}, \\ 0 & (x,\tau) \in H_i \times (0,\theta_i), \\ 0 & (x,\tau) \in \partial B_{R_i}(0) \times (\theta_i, t), \end{cases}$$

$$|D\xi_i| \le \frac{2^i}{R_1 - R_2}, \quad |(\xi_i)_\tau| \le \frac{2^i}{\tau_1 - \tau_2}.$$

Лемма 5. *Для $i = \overline{1,\infty}$, справедливо неравенство*

$$\sup_{\tau_1 < \tau < t} \int\limits_{H_0} \frac{w_0^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx + \iint\limits_{U_i} (1+|x|)^{-\alpha(m+\lambda-1)} |D(w_i\xi_i)|^{\lambda+1} dx d\tau \le$$

$$\le \gamma b^i F \iint\limits_{U_{i+2}} \frac{(w_{i+2}\xi_{i+2})^q}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx d\tau, \tag{28}$$

где $b > 1$, $s > max[1, 2-m]$, $q = \frac{(s+1)(\lambda+1)}{m+\lambda+s-1}$, $w_i = (v-k_i)_+^{\frac{m+\lambda+s-1}{\lambda+1}}$, γ *зависит от* s *и*

$$F = \left[\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} + \frac{\bar{\Omega}(t)}{\tau_2}\right] \left(\frac{a_1}{a_1 - a_2}\right)^2 \left(\frac{R_1 + 1}{R_1 - R_2}\right)^{\lambda+1},$$

$$\bar{\Omega}(t) = \sup_{0<\tau<t} \sup_{x\in B_d\setminus B_{R_2}} \left\{ \frac{\tau v^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}} + \tau v^{p-1} \right\}.$$

Доказательство. Умножая обе части уравнения (13) на пробную функцию $(v-k_i)_+^s\xi_i^{\lambda+1}$ и интегрируя по цилиндру U_i, получаем

$$\iint\limits_{U_i} \frac{[(v(x,t)-k_i)_+^{s+1}]_\tau}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx+$$

$$+\iint\limits_{U_i} \frac{v^{m-1}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} \left| |Dv| - \frac{\alpha v}{1+|x|} D|x| \right|^{\lambda+1} \xi_i^{\lambda+1} dxd\tau \leq$$

$$\leq \gamma \iint\limits_{U_i} \frac{v^{m}(v-k_i)_+^{s-1}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)+1}} \left| |Dv| - \frac{\alpha v}{1+|x|} D|x| \right|^{\lambda} \xi_i^{\lambda+1} dxd\tau+$$

$$+\gamma \iint\limits_{W_i} \frac{v^{m-1}(v-k_i)_+^{s}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-1)}} \left| |Dv| - \frac{\alpha v}{1+|x|} D|x| \right|^{\lambda} |D\xi_i| \xi_i^{\lambda} dxd\tau+$$

$$+\gamma \iint\limits_{U_i} (1+|x|)^{-\alpha p} v^p (v-k_i)_+^s \xi_i dxd\tau.$$

Рассуждая далее как в лемме 2 и учитывая, что $1+|x| < 1+R_1$, при $x \in W_i$ получаем утверждение леммы. $\square$

Рассуждая аналогично леммам 3 и 4, из леммы 5 получаем

Лемма 6. *Пусть d_1, d_2 – произвольные числа такие, что $0 < d_1 < d_2 < d$, $p \geq \tilde{p}$ и для всех $t \in (0, t_1)$ выполнено условие*

$$\sup_{0<\tau<t} \sup_{x\in B_d\setminus B_{d_1}} \left\{ \frac{\tau v^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}} + \tau v^{p-1} \right\} \leq 2. \tag{29}$$

Тогда, для всех $t \in (0, t_1)$ и произвольного $\omega \geq 0$ справедлива оценка

$$\|v(x,\tau)\|_{\infty, B_d\setminus B_{d_2}\times(\frac{t}{2},t)} \leq$$

$$\leq \gamma \left(\frac{d_2+1}{d_2-d_1} \right)^a t^{-\frac{N-l-\alpha}{G_{l,\alpha}(\omega)}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_B \frac{v^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx \right]^{\frac{\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l}{G_{l,\alpha}(\omega)}},$$

где $G_{l,\alpha}(\omega)$ было определено выше, постоянная γ зависит от ω и постоянная $a > 0$ зависит только лишь от параметров уравнения.

Введем обозначения

$$\Gamma_i(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : (\ max\{\tilde{T}, \tau\}^\beta - 1)/i \leq |x| \leq d \right\},$$

где $\tilde{T}$ было определено в лемме 4, $\beta = 1/K_l$, $i = 1, 2$,

$$\Omega_2(t) = \underset{0<\tau<t}{sup} \underset{x\in\Gamma_2(\tau)}{sup} \left\{ \frac{\tau v^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}} \right\} + \Omega_0(t),$$

$$T_2 = sup\{t : \Omega_2(t) \le 2\}.$$

В лемме 6 положим

$$d_2 = max\{\tilde{T}, t\}^\beta - 1, \quad d_1 = (\ max\{\tilde{T}, t\}^\beta - 1)/2,$$

при этом заметим, что

$$\frac{d_2+1}{d_2-d_1} \le \frac{2\ \tilde{T}^\beta}{\tilde{T}^\beta - 1} = const < \infty.$$

Тогда лемма 6 примет вид

Лемма 7. *Пусть $p \ge \tilde{p}$, тогда, для всех $t \in (0, T_2)$ и произвольного $\omega \ge 0$ справедлива оценка*

$$\|v(x,t)\|_{\infty,\Gamma_1(t)} \le \gamma t^{-\frac{N-l-\alpha}{G_{l,\alpha}(\omega)}} \left[\underset{0<\tau<t}{sup} \int\limits_B \frac{v^{\omega+1}}{(1+|x|)^{l+\alpha}} dx \right]^{\frac{\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l}{G_{l,\alpha}(\omega)}}, \tag{30}$$

где $G_{l,\alpha}(\omega)$ было определено выше, а постоянная γ зависит только лишь от ω и параметров уравнения.

Для дальнейшего отметим очевидные неравенства

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{k}{max\{\tilde{T}, t\}^\beta}, \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_i(\tau),$$

$$1 + |x| \le max\{\tilde{T}, t\}^\beta \quad \text{при} \quad x \in B_d \setminus \Gamma_i(\tau).$$

Очевидно, что $T_0 \ge T_2$, поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать $T_2 = T_M = \infty$. Необходимо рассмотреть два случая.

1) Предположим $T_M < \infty$, $T_M < T_2$, тогда умножая уравнение (8) на финитную функцию $u/(u+\varepsilon)$ и интегрируя по $B \times (0, T_M)$ также, как в лемме 4, получаем

$$M(T_M) \le M(0) + \gamma M(T_M) \int\limits_0^{T_M} \|(1+|x|)^{l/(p-1)} u(x,\tau)\|_{\infty,B}^{p-1} d\tau. \tag{31}$$

Оценим интеграл в правой части (31)

$$\int\limits_0^{T_M} \|(1+|x|)^{l/(p-1)} u(x,\tau)\|_{\infty,B}^{p-1} d\tau = \int\limits_0^{\tilde{T}} \|v(x,\tau)\|_{\infty,B}^{p-1} d\tau +$$

$$+\int\limits_{\tilde{T}}^{T_M}\|v(x,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\Gamma_1(\tau)}d\tau+\int\limits_{\tilde{T}}^{T_M}\|(1+|x|)^{l/(p-1)}u(x,\tau)\|^{p-1}_{\infty,B\setminus\Gamma_1(\tau)}d\tau=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Из (4), оценки (22) при $\omega=q-1$ и того, что $q>Q_0$ следует

$$I_1\le\gamma\int\limits_0^{\tilde{T}}\tau^{-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}}\delta^{\kappa_1}d\tau=\gamma\delta^{\kappa_1}\tilde{T}^{1-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{G_{l,\alpha}(q-1)}},$$

а из (4), оценки (30) при $\omega=0$ и того, что $p\ge\tilde{p}$ следует

$$I_2\le\gamma\int\limits_{\tilde{T}}^{T_M}\tau^{-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{K_l}}\delta^{\kappa_3}d\tau\le\gamma_1\delta^{\kappa_3}\tilde{T}^{1-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{K_l}},$$

$$\kappa_3=\frac{[\lambda+1+\alpha(m+\lambda-2)-l](p-1)}{K_l},$$

наконец, пользуясь (4), оценкой (12) при $\omega=0$ и условием $p\ge\tilde{p}$ получаем

$$I_3\le\gamma\int\limits_{\tilde{T}}^{T_M}\|(1+|x|)^l\|_{\infty,B\setminus\Gamma_1(\tau)}\tau^{-\frac{(N-l)(p-1)}{K_l}}\delta^{\kappa_4}d\tau\le$$

$$\le\gamma_1\int\limits_{\tilde{T}}^{T_M}\tau^{\beta l}\tau^{-\frac{(N-l)(p-1)}{K_l}}\delta^{\kappa_4}d\tau\le$$

$$\le\gamma_2\delta^{\kappa_4}\tilde{T}^{1+\beta l-\frac{(N-l-\alpha)(p-1)}{K_l}},\quad\kappa_4=\frac{[\lambda+1-l](p-1)}{K_l}.$$

Таким образом, δ можно выбрать столь малым, что

$$I_1+I_2+I_3=\frac{1}{3},$$

поэтому из неравенства (31) следует

$$M(T_M)\le\frac{3}{2}M(0),$$

что противоречит определению T_M, значит, $T_M=\infty$.

2) Предположим $T_2<\infty$, $T_2<T_M$, тогда получаем

$$\Omega_2(T_2)\le\Omega(\tilde{T})+\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\ \sup_{x\in\Gamma_2(\tau)}\left\{\frac{\tau v^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\alpha(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}}\right\}+$$

$$+\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in B}\{\tau v^{p-1}\}\le 1+\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in\Gamma_2(\tau)}\left\{\frac{\tau u^{m+\lambda-2}}{(1+|x|)^{\lambda+1-l}}\right\}+$$

$$+\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in\Gamma_1(\tau)}\{\tau v^{p-1}\}++\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in B\backslash\Gamma_1(\tau)}\{\tau(1+|x|)^l u^{p-1}\}=$$

$$=1+A_1+A_2+A_3.$$

Условие (4) и оценка (12) при $\omega=0$ дают

$$A_1\le\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in\Gamma_2(\tau)}\left\{\frac{\tau u^{m+\lambda-2}}{max\{\tilde{T},\tau\}^{\beta(\lambda+1-l)}}\right\}\le$$

$$\le\gamma\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\left\{\tau^{1-\beta(\lambda+1-l)}\tau^{-\frac{(N-l)(m+\lambda-2)}{K_l}}\delta^{\kappa_5}\right\}=\gamma\delta^{\kappa_5},$$

$$\kappa_5=\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{K_l}.$$

Чтобы оценить A_2 воспользуемся (4), (30) при $\omega=0$ и условием $p\ge\tilde{p}$

$$A_2\le\gamma\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{(N-l)(m+\lambda-2)}{K_l}}\delta^{\kappa_3}\right\}=\gamma\delta^{\kappa_3}\tilde{T}^{1-\frac{(N-l)(m+\lambda-2)}{K_l}}.$$

Из (4), (12) при $\omega=0$ и того, что $p\ge\tilde{p}$ получаем

$$A_3\le\gamma\sup_{\tilde{T}<\tau<T}\sup_{x\in B\backslash\Gamma_1(\tau)}\left\{max\{\tilde{T},\tau\}^{\beta l}\tau^{1-\frac{(N-l)(p-1)}{K_l}}\delta^{\kappa_4}\right\}\le$$

$$\le\gamma\delta^{\kappa_4}\tilde{T}^{1+\beta l-\frac{(N-l)(p-1)}{K_l}}.$$

Так как $\tilde{T}>1$, то из вышесказанного получаем противоречие

$$2=\Omega_2(T_2)\le 1+\gamma(\delta^{\kappa_5}+\delta^{\kappa_3}+\delta^{\kappa_4})\le\frac{3}{2},$$

значит, $T_2=\infty$.

Таким образом, в каждом из двух возможных случаев получили $T_0=T_2=T_M=\infty$.

1. *Deng K., Levine H.A.* The role of critical exponents in blow up theorems: The sequel // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – V.243. – P.85-126.
2. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. – 1966. – V.13. – P.109-124.
3. *Galaktionov V.A., Levine H.A.* A general approach to critical Fujita exponents and systems // Nonlinear Anal. – 1998. – V.34. – P.1005-1027.
4. *Галактионов В.А, Курдюмов С.П, Михайлов А.П, Самарский А.А* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$ // ДАН СССР. – 1980. – Т.252. – №6. – С.1362-1364.

5. *Andreucci D., Tedeev A.F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – V.231. – P.543-567.
6. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. – 1998. – V.128. – №6. – P.1163-1180.
7. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – Т.42. – №2(254). – С.135-176.
8. *Самарский А.А, Галактионов В.А, Курдюмов С.П, Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
9. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in a finite mass medium // Comm. Pure Appl. Math. – 1982. – V.35. – P.113-127.
10. *Kamin S., Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Comm. Pure Appl. Math. – 1981. – V.34. – P.831-852.
11. *Kamin S., Kersner R.* Disappearence of interfaces in finite time // Meccanica. – 1993. – V.28. – P.117-120.
12. *Guedda M., Hilhorst D., Peletier M.A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // Adv. Math. Sci. Appl. – 1997. – V.7. – P.695-710.
13. *Galaktionov V.A., King J.R.* On the behaviour of blow-up interfaces for an inhomogeneous filtration equation // J. Appl. Math. – 1996. – V.57. – P.53-77.
14. *Kersner R., Reyes G., Tesei A.* On a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absortion // Advances Diff. Eqs. – 2002. – V.7. – №2. – P.155-176.
15. *Galaktionov V.A., Kamin S., Kersner R., Vazquez J.L.* Intermidiate asymptotics for inhomogeneous nonlinear heat conduction // Journal of Mathematical Sciences, 2004. – V.120. – №3. – P.1277-1294.
16. *Тедеев А. Ф.* Условия существования и несуществования в целом по времени компактного носителя решений задачи Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Сиб. мат. журн. – 2004. – Т.45, №1. – С.189-200.
17. *Tedeev A.F.* The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations // Applicable Analysis. – 2007. – Vol.86, 6. – P.755-782.
18. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* О поведении решений задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения с неоднородной плотностью и источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008, Т.48. – №7. – С.1-16.
19. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* Спектр собственных функций для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т.44. – №9. – С.1619-1637.
20. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т.47. – №2. – С.242-252.
21. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Advances Diff. Eqs. – 2005. – V.10. – №1. – P.89-120.
22. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – V.279. – P.373-394.
23. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – V.183. – P.311-341.
24. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* Регулярность решений вырождающихся параболических уравнений с неоднородной плотностью // UMB 2008. – Т.5. – №1. – С.116-145.
25. *Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L.* First order interpolation inequalities with weights // Compositio Math. – 1984. – V.53. – P.259-275.
26. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
amartynenko@rambler.ru

Получено 14.05.08