УДК 517.946

©2008. **В.А. Маркашева**

ЛОКАЛЬНАЯ ГЁЛЬДЕРОВОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА БАОУЕНДИ-ГРУШИНА. ЧАСТЬ 1

В работе изучается свойство регулярности решений вырождающегося параболического уравнения с нелинейным оператором типа Баоуенди-Грушина. Установлено свойство локальной гёльдеровости решений.

1. Введение. Постановка задачи. Исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\lambda,\alpha}[u] = div_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u), \quad (x,y,t) \in S_T = R^{N+M} \times (0,T). \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda > 1$, а $x = (x_1,..,x_N)$, $y = (y_1,..,y_M)$, $N \geq 1, M \geq 1$ – произвольные точки евклидовых пространств R^N и R^M, соответственно. $z = (x,y) = (x_1,...,x_N,y_1,...,y_M), z \in R^{N+M}$. Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .., \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, .., |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M}). \tag{1.2}$$

Далее,

$$|D_L u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 + |x|^{2\alpha} \sum_{j=1}^{M} (\frac{\partial u}{\partial y_j})^2}$$

$$div_L \vec{F}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}.$$

Если $\alpha = 0$, то при условии $\lambda > 1$ ([7]) уравнение (1.1) описывает процесс с медленной диффузией. Операторы типа $L_{1,\alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, где символ Δ означает оператор Лапласа, впервые исследовались в работах [1] и [6]. В работах [3] и [4] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda,\alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) (см. также [5] и имеющуюся там литературу).

Цель данной работы – доказать локальную гёльдеровость решений уравнения (1.1). Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы введем необходимые понятия. Однородное расстояние для пространственных переменных $d(z,0) = d((x,y),(0,0)) = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2\right)^{1/2(\alpha+1)}$. В качестве шаров используем $B_\rho(z') = \{z \in R^{N+M} : d(z-z',0) \leq \rho\}$. $Q = N + (\alpha+1)M$ – однородная размерность в пространствах Карно-Каратеодори (см. [6]). B_ρ является естественным расширением понятия шара в пространствах Карно-Каратеодори.

Пусть $t > 0, R > 0$ – произвольные фиксированные числа.

Определение. Слабым решением уравнения (1.1) будем называть неотрицательную измеримую на $S_T = R^{N+M} \times (0,T)$ функцию

$$u(x,y,t) \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \equiv L_{\lambda+1}(t,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1,loc}(R^{M+N})) \cap C(t,T;L_{2,loc}(R^{M+N})),$$

при каждом $t > 0$ удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_{B_R} u(z,\tau)\eta(z,\tau)dz|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{B_R} \{-u\eta_\tau + (|D_L u|^{\lambda-1} D_L u) D_L \eta\} dz d\tau = 0, \tag{1.3}$$

для всех $\eta(x,y,t) \in C(t,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(B_R)) \cap L_2(B_R \times (t,T))$ и для всех $t_1, t_2 : 0 < t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Основным результатом статьи является теорема вложения:

Теорема 5.3. *Пусть $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \cap L_{\infty,loc}(S_T)$ – слабое решение уравнения (1.1). Тогда $u(z,t)$-локально гёльдерово на S_T и для любого компакта $K \subset S_T$ существует постоянные $\bar{\alpha} \in (0,1)$ и $C(\bar{\alpha})$, зависящие только от параметров задачи и $diamK$, такие что*

$$|u(z_1,t_1) - u(z_2,t_2)| \leq C(\bar{\alpha})(d^{\bar{\alpha}}(z_1,z_2) + |t_1 - t_2|^{\frac{\bar{\alpha}}{\lambda+1}}). \tag{1.4}$$

Содержание теоремы 5.3 является естественным обобщением результатов работы [2], где изучался случай $\alpha = 0$. Доказательство Теоремы 5.3 приводится подходом работы [2], где существенно используются также идеи работы [5].

Статья разделена на 2 части. В первую часть входят разделы 1 и 2. Во вторую часть войдут разделы 3, 4 и 5. Структура статьи такова: в первом разделе описывается класс функций $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, для $\lambda > 1$, и доказывается, что если слабое решение уравнения (1.1) из $L_{\infty,loc}(S_T)$, то принадлежит классу функций $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, второй раздел содержит предварительные пояснения и обозначения,а также все вспомогательные утверждения, на основании которых строится доказательство альтернатив и основного результата, разделы 3 и 4 доказывают, соответственно, первую и вторую альтернативы, а в пятом разделе приводится доказательство теоремы 5.3 при помощи альтернатив. Доказательства третьего, четвертого, пятого разделов используют лишь принадлежность функции классу $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$.

На протяжении всей работы символами $C, C_{i.j}$ будем обозначать различные положительные константы, зависящие лишь от параметров $\lambda, N, M, \bar{\alpha}, \alpha$. Индексы i, j означают, что эта константа впервые появляется в выражении $(i.j)$. Нумерация сквозная.

Определим класс $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$. Для этого введем обозначения: $S_{R,\varrho}(x_0,t_0) = B_R(x_0) \times \{t_0 - \varrho, t_0\}$, $\xi(x,t)$ – кусочно-гладкая функция на $S_{R,\varrho}(x_0,t_0)$, такая что $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(z,t) = 0$ вне B_R, u – ограниченная, измеримая функция на $S_{R,\varrho}(x_0,t_0)$. Определим срезающие функции: $(u-k)^+ = max(u-k,0)$, $(u-k)^- =$

$-min(u-k,0)$. Числа $H^{\pm},k$ таковы, что $\|(u-k)^{\pm}\|_{L_\infty(S_{R,\varrho})} \le H^{\pm} < \infty$. $\psi(H^{\pm},(u-k)^{\pm},\nu)=\psi((u-k)^{\pm})=\ln^{+}\left\{\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}-(u-k)^{\pm}+\nu}\right\}, \nu<min\{H^{\pm},1\}$.

Определение. Будем считать измеримую функцию $u(z,\tau):S_T\longrightarrow R$ принадлежащей классу $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T,\bar{M},C)$, если:
1) $u\in\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T)$,
2) $\|u\|_{L_{\infty,loc}(S_T)}<\bar{M}$,
3) для всех $S_{R,\varrho}\subset S_T$ и для всех $\xi(z,\tau)$, определенных выше, функции $(u-k)^{\pm}$ удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\underset{t_0-\varrho\le\tau\le t_0}{esssup}\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,\tau)dz+\int\int\limits_{S_{R,\varrho}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1}dzd\tau\le$$

$$\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz+ \tag{1.5}$$

$$+C_{1.5}\left\{\int\int\limits_{S_{R,\varrho}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}[(u-k)^{\pm}]^{\lambda+1}dzd\tau+\int\int\limits_{S_{R,\varrho}}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda}\xi_\tau dzd\tau\right\},$$

$$\underset{t_0-\varrho\le\tau\le t_0}{esssup}\int\limits_{B_R}\psi^2(H^{\pm},(u-k)^{\pm},\nu)\xi^{\lambda+1}(z,\tau)dz\le$$

$$\int\limits_{B_R}\psi^2(H^{\pm},(u-k)^{\pm},\nu)\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz+ \tag{1.6}$$

$$C_{1.6}\int\int\limits_{S_{R,\varrho}}\psi((u-k)^{\pm})|\psi_\tau|^{1-\lambda}|D_L\xi|^{\lambda+1}dzd\tau.$$

Утверждение 1.1. Если $u(z,\tau)$ – слабое решение уравнения (1.1), такое что $u\in L_{\infty,loc}(S_T)$, то $u\in\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T,\bar{M},C)$.

Доказательство утверждения 1.1. Введем усреднения Стеклова для функций $w\in\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T)$:

$$w_h(z,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{h}\int\limits_{\tau}^{\tau+h}w(z,s)ds, & \tau\in(t,T-h]\\ 0, & \tau>T-h,\tau\le t,\end{cases}$$

$$w_{\bar{h}}(z,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{h}\int\limits_{\tau-h}^{\tau}w(z,s)ds, & \tau\in(t+h,T]\\ 0, & \tau<t+h.\end{cases}$$

Стандартным образом легко доказать, что если u – решение (1.1), то оно удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R}\left\{\frac{\partial u_h}{\partial t}\varphi+(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\bar h}D_L\varphi\right\}dzd\tau=0 \tag{1.7}$$

для всех $\varphi\in C(t+h,T;\mathfrak{L}^0_{1,\lambda+1}(B_R))$ и $t+h<t_1<t_2<T-h$. Выберем как тестирующую функцию $\varphi=\pm(u-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}(z,\tau)$, $k\in R$, такую, что $\xi\in C(t_0-\varrho,t_0;\mathfrak{L}^0_{1,\lambda+1}(B_R))$. Тогда

$$\int_{B_R}\int_{t_0-\varrho}^{t'}\pm\frac{\partial u_h}{\partial t}(u_h-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}dzd\tau=\frac{1}{2}\int_{B_R}[(u_h-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t')dz-$$

$$\frac{1}{2}\int_{B_R}[(u_h-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz-\frac{\lambda+1}{2}\int\int_{S_{t'}}[(u_h-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda}\xi_{\tau}dzd\tau,$$

где $S_{t'}=B_R\times(t_0-\varrho,t']$, $t'\in(t_0-\varrho,t_0]$. Переходя к пределу при $h\to0$, получаем для $t'\in[t_0-\varrho,t_0]$

$$\int_{B_R}\int_{t_0-\varrho}^{t'}\pm\frac{\partial u_h}{\partial t}(u_h-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}dzd\tau\to$$

$$\frac{1}{2}\int_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t')dz-\frac{1}{2}\int_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz-$$

$$-\frac{\lambda+1}{2}\int\int_{S_{t'}}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda}\xi_{\tau}dzd\tau$$

$$\int\int_{S_{t'}}D_L[(u_h-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}]\pm(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\bar h}dzd\tau=$$

$$\pm\int\int_{S_{t'}}D_L(u_h-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\bar h}dzd\tau+$$

$$+(\lambda+1)\int\int_{S_{t'}}\pm(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\bar h}(u_h-k)^{\pm}D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}dzd\tau.$$

Переходя к пределу при $h\to0$, получаем для $t'\in[t_0-\varrho,t_0]$

$$\int\int_{S_{t'}}D_L[(u_h-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}]\pm(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\bar h}dzd\tau\to$$

$$\Big\{ \pm \int\int\limits_{S_{t'}} D_L(u-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}(|D_L u|^{\lambda-1}D_L u)dzd\tau +$$

$$+(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}} \pm (|D_L u|^{\lambda-1}D_L u)(u-k)^{\pm}D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}dzd\tau\Big\}.$$

Таким образом, после предельного перехода в (1.7) имеем тождество

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t')dz - \frac{1}{2}\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz-$$

$$-\frac{\lambda+1}{2}\int\int\limits_{S_{t'}}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda}\xi_{\tau}dzd\tau =$$

$$-\int\int\limits_{S_{t'}} D_L \pm (u-k)^{\pm}\xi^{\lambda+1}(|D_L u|^{\lambda-1}D_L u)dzd\tau-$$

$$-(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}} \pm (|D_L u|^{\lambda-1}D_L u)(u-k)^{\pm}D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}dzd\tau.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t')dz + \int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1}dzd\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{B_R}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda+1}(z,t_0-\varrho)dz + \frac{\lambda+1}{2}\int\int\limits_{S_{t'}}[(u-k)^{\pm}]^2\xi^{\lambda}\xi_{\tau}dzd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1}dzd\tau + C_{1.5}\int\int\limits_{S_{t'}}[(u-k)^{\pm}]^{\lambda+1}|D_L\xi|^{\lambda+1}dzd\tau.$$

Откуда следует (1.5). Для доказательства (1.6) возьмем в качестве тестирующей функции в (1.7) $\varphi = [\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\cdot\xi^{\lambda+1}(z)$, где $\xi(z)$ – срезающая функция на шаре B_R, которая равна нулю на ∂B_R. Очевидно, что $\varphi \in C(0,T;\mathfrak{L}^0_{1,\lambda+1}(B_R))$. Заметим, что $[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h} = 2\psi\cdot\psi'_u$, $\psi''_{uu} = (\psi'_u)^2$, $[\psi^2((u-k)^{\pm})]''_{uu} = (2\psi\cdot\psi'_u)'_u = 2(\psi'_u)^2 + 2\psi\cdot\psi''_{uu} = 2(1+\psi)(\psi'_u)^2$, откуда

$$[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]''_{u_h u_h} = 2\left(1+\ln^+\left(\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}-(u_h-k)^{\pm}+\nu}\right)\right)\left(\frac{H^{\pm}-(u_h-k)^{\pm}+\nu}{H^{\pm}}\right)^2$$

$$[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]''_{u_h u_h} \in L_{\infty,loc}(S_T).$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0-\varrho}^{t'}\int\limits_{B_R}\frac{\partial u_h}{\partial t}[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\cdot\xi^{\lambda+1}dzd\tau=\int\limits_{B_R}\psi^2((u_h-k)^{\pm}(t'))\xi^{\lambda+1}(z)dz-$$

$$\int\limits_{B_R}\psi^2((u_h-k)^{\pm}(t_0-\varrho))\xi^{\lambda+1}(z)dz.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, получим

$$\int\limits_{t_0-\varrho}^{t'}\int\limits_{B_R}\frac{\partial u_h}{\partial t}[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\cdot\xi^{\lambda+1}dzd\tau\overset{h\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\int\limits_{B_R}\psi^2(H^{\pm},(u-k)^{\pm}(t'),\nu)\xi^{\lambda+1}(z)dz-\int\limits_{B_R}\psi^2(H^{\pm},(u-k)^{\pm}(t_0-\varrho),\nu)\xi^{\lambda+1}(z)dz$$

при всех $t'\in[t_0-\varrho,t_0]$.

$$\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\tilde h}D_L\left([\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\cdot\xi^{\lambda+1}(z)\right)dzd\tau=$$

$$=\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\tilde h}D_L\left([\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\right)\cdot\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau+$$

$$(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)_{\tilde h}[\psi^2((u_h-k)^{\pm})]'_{u_h}\cdot D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}(z)dzd\tau\overset{h\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)D_L\left([\psi^2((u-k)^{\pm})]'_{u}\right)\cdot\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau+$$

$$(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)[\psi^2((u-k)^{\pm})]'_{u}\cdot D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}(z)dzd\tau=$$

$$\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}[\psi^2((u-k)^{\pm})]''_{uu}\cdot\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau+$$

$$+2(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}}(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)\psi((u-k)^{\pm})\cdot[\psi((u-k)^{\pm})]'_{u}\cdot D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}(z)dzd\tau.$$

Имеем

$$\int\limits_{B_R}\psi^2(t')\xi^{\lambda+1}(z)dz-\int\limits_{B_R}\psi^2(t_0-\varrho)\xi^{\lambda+1}(z)dz+$$

$$+2\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}(1+\psi)(\psi')^2\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau+$$

$$+2(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}}|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu\cdot\psi\psi' D_L\xi\cdot\xi^{\lambda}(z)dzd\tau=0.$$

Применяя неравенство Юнга для $p=(\lambda+1)/\lambda$ и $p'=\lambda+1$, получаем

$$\underset{t_0-\varrho\le\tau\le t'}{esssup}\int\limits_{B_R}\psi^2(\tau)\xi^{\lambda+1}(z)dz+2\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}(1+\psi)(\psi')^2\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau\le$$

$$\le 2(\lambda+1)\int\int\limits_{S_{t'}}|D_Lu|^{\lambda}\psi\psi'|D_L\xi|\xi^{\lambda}(z)dzd\tau+\int\limits_{B_R}\psi^2(t_0-\varrho)\xi^{\lambda+1}(z)dz\le$$

$$\le\int\limits_{B_R}\psi^2(t_0-\varrho)\xi^{\lambda+1}(z)dz+2\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}(1+\psi)(\psi')^2\xi^{\lambda+1}(z)dzd\tau+$$

$$2(\lambda+1)^{\frac{\lambda^2}{\lambda+1}}\int\int\limits_{S_{t'}}|D_L\xi|^{\lambda+1}\psi(\psi')^{1-\lambda}dzd\tau.$$

Отметим, что $(\psi')^{-1}=H^{\pm}-(u-k)^{\pm}+\nu\le H^{\pm}+\nu<\infty,\ \psi<ln(H^{\pm}/\nu),\ \psi'<1/\nu.$ Откуда следует, что (1.6) справедливо. Утверждение 1.1 доказано. □

2. Предварительные рассуждения. Обозначения. Пусть $\Omega\subset R^{N+M}$-произвольное ограниченное открытое множество в R^{N+M} с достаточно гладкой границей.

Определение. Определим пространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ для $1\le p<\infty$ как замыкание $C^{\infty}(\bar\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^{1,p}(\Omega)}=\left(\int\limits_{\Omega}\left(|D_Lf|^p+|f|^p\right)dxdy\right)^{\frac{1}{p}},$$

которая эквивалентна норме

$$\left(\int\limits_{\Omega}|D_Lf|^pdxdy\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{\Omega}|f|^rdxdy\right)^{\frac{1}{r}}$$

для $0<r\le p$.

Определение. Пространство $\mathfrak{L}^0_{1,p}(\Omega)$ – подпространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$, определим как замыкание $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$. Пространства $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ и $\mathfrak{L}^0_{1,p}(\Omega)$ включаются в класс пространств Карно-Каратеодори, для которых достаточно полно изучены теоремы вложения типа С.Л. Соболева и мультипликативные неравенства типа Ниренберга-Гальярдо. Читателя, интересующегося теорией пространств Карно-Каратеодори, мы отсылаем к обзорной работе [5], где можно найти дальнейшую литературу. Пускай $\alpha_0 \in (0,1)$ такое фиксированное число, что для постоянной $C_{2.9}$, зависящей только от параметров задачи

$$\begin{gathered}\alpha_0 \leq C_{2.9}^{-\frac{\lambda+1}{\lambda+1+Q}} 4^{-\frac{\lambda+1}{(\lambda+1+Q)^2}}, \\ l\text{-целая часть выражения} \frac{[(1-\frac{\alpha_0}{2})(1+\alpha_0)]^{\frac{1}{2}}}{2-[(1-\frac{\alpha_0}{2})(1+\alpha_0)]^{\frac{1}{2}}},\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$s_0 = \begin{cases} \lg_2(\frac{2\bar{M}}{\delta}) & , \text{ если} \lg_2(\frac{2\bar{M}}{\delta}) - \text{целое число}, \\ \text{целая часть от}\{\lg_2(\frac{2\bar{M}}{\delta}) + 1\} & , \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$s^* - \text{целая часть от } max \left([s_0 + l + 1], [1 + \frac{C_{4.4}^{\frac{1}{\lambda}}}{\alpha_0^{\frac{4}{\lambda}}}] \right). \tag{2.2}$$

Введем обозначения:

- $\mu^+ = \underset{S_R^{s^*}}{ess\ sup}\ u,\ \mu^- = \underset{S_R^{s^*}}{ess\ inf}\ u$, где $S_R^{s^*} = B_R \times \{t_0 - \left(\frac{2^{s^*}}{w}\right)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}, t_0\}$,
  $w:\ \underset{S_R^{s^*}}{ess\ osc}\ u = \mu^+ - \mu^- \leq w \leq 2\bar{M}$,
- $\theta_p = \left(\frac{2^p}{w}\right)^{\lambda-1}$, для любого натурального p, $\theta_0 = \left(\frac{2^{s_0}}{w}\right)^{\lambda-1}$, $\theta_* = \left(\frac{2^{s^*}}{w}\right)^{\lambda-1}$,
- $S_R^p(z,t) = B_R(z) \times \{t - \theta_p R^{\lambda+1}, t\}$,
- $A_n^{\pm}(\acute{z}) = \{z : (v(\acute{z}) - k_n)^{\pm} > 0,\ z \in B_{R_n}\},$ где $v(z,\acute{z}) = u(z, t + \theta\acute{z})$,
- $|A_n^{\pm}| = \int\limits_{-\rho^{\lambda+1}}^{0} mes\ A_n^{\pm}(\acute{z}) d\acute{z}$,
- $\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \equiv L_{\lambda+1}(t, T, \mathfrak{L}_{1,\lambda+1,loc}(R^{M+N})) \cap C((t,T), L_{2,loc}(R^{M+N}))$,

$$\mathfrak{V}^0_{\lambda+1,loc}(S_T) \equiv L_{\lambda+1}(t, T, \mathfrak{L}^0_{1,\lambda+1,loc}(R^{M+N})) \cap C((t,T), L_{2,loc}(R^{M+N})),$$

$$u(x,y,t) \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T),$$

$$\|u\|^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T)} = \sup_{\Omega_T \subset S_T} \left(\underset{t \leq \tau \leq T}{ess\ sup} \|u(\cdot,\tau)\|^{\lambda+1}_{L_{1,\lambda+1}(\Omega)} + \|D_L u\|^{\lambda+1}_{L_{1,\lambda+1}(\Omega_T)} \right),$$

$$\|u\|^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T)} = \|u\|^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}^0_{\lambda+1,loc}(S_T)},$$

- $\bar{t} : \bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1},\ \ \bar{t} \leq t_0$,
- $A^+_{k,R} = \{z \in B_R : (u(z) - k)^+ > 0\},\ \ k \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1. *(см. [5], теорема 1.15). Если* $u \in \mathfrak{L}_{1,1}(B_R)$, *то*

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}|u-u_B|^{\frac{Q}{Q-1}}dz\right)^{\frac{Q-1}{Q}} \leq C_{2.3}\frac{R}{|B_R|}\int\limits_{B_R}|D_L u|dz. \tag{2.3}$$

Следствие 2.2. *Если* $u \in \mathfrak{L}_{1,1}(B_R),\ l,k \in \mathbb{R},\ l > k$, *то*

$$(l-k)\ mes\ A^+_{l,R} \leq \frac{C_{2.4} mes^{\frac{Q+1}{Q}} B_R}{mes\ (B_R - A^+_{k,R})}\int\limits_{A^+_{k,R}-A^+_{l,R}}|D_L u|dz, \tag{2.4}$$

где $C_{2.4}$ *зависит только от однородной размерности пространства* Q.

Замечание 2.1. Чтобы из леммы 2.1 получить утверждение следствия 2.2 достаточно неравенство (2.1) применить к функции

$$w = \begin{cases} l-k, & u > l, \\ u-k, & k < u \leq l, \\ 0, & u \leq k, \end{cases}$$

и произвести элементарную оценку.

Лемма 2.3. *Если* $u \in \mathfrak{V}^0_{\lambda+1,loc}(S_T)$, *тогда для любого компакта* $\Omega_T \subset S_T$

$$||u||_{L_{q,r}(\Omega_T)} \leq C||u||_{\mathfrak{V}^0_{\lambda+1,loc}(\Omega_T)},$$

где r, q *таковы, что* $(1/r) + (Q/q(\lambda+1)) = Q/(\lambda+1)^2$ *, и могут принимать значения:*
если $Q = 1$, *то* $q \in (\lambda+1, \infty]$, $r \in [(\lambda+1)^2, \infty)$,
если $\lambda + 1 < Q$, *то* $q \in [\lambda+1, Q(\lambda+1)/(Q-\lambda-1)]$, $r \in [(\lambda+1), \infty]$,
если $Q \leq \lambda+1$, *то* $q \in [\lambda+1, \infty)$, $r \in ((\lambda+1)^2/Q, \infty]$.

Следствие 2.4. *Если* $u \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}}_{\lambda+1,loc}(S_T)$, *тогда для любого компакта* $\Omega_T \subset S_T$

$$||u||_{L_{\lambda+1,\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}}(\Omega_T)} \leq C||u||_{\overset{\circ}{\mathfrak{V}}_{\lambda+1,loc}(\Omega_T)}.$$

Следствие 2.5. *Если* $u \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}}_{\lambda+1,loc}(S_T)$, *тогда для любого компакта* $\Omega_T \subset S_T$

$$||u||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(\Omega_T)} \leq C_{2.5}\left(mes[\{u \neq 0\} \cap \Omega_T]\right)^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} ||u||^{\lambda+1}_{\overset{\circ}{\mathfrak{V}}_{\lambda+1,loc}(\Omega_T)}, \tag{2.5}$$

$$\text{где } C_{2.5} = C(\Omega_T, Q, \lambda) = C\left\{1 + \left(\frac{T^{Q/(\lambda+1)}}{mes\Omega}\right)^{\frac{1}{Q+\lambda+1}}\right\}.$$

В дальнейшем нам потребуется итерационная лемма.

Лемма 2.6. *(см. лемму 5.6. [8] при $b > 1$). Пусть последовательность $y_h, h = 0, 1, 2, ..$ неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_{h+1} \le cb^h y_h^{1+\varepsilon}, \quad h = 0, 1, 2, ..$$

с какими-либо положительными постоянными c, ε и $b > 1$. Тогда, если

$$y_0 \le \theta = c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}},$$

то $y_h \to 0$ при $h \to \infty$.

Лемма 2.7. *Пусть $\rho > 0$, $s_0 \le s \le s^*$ – произвольные постоянные. Если $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1}(S^s_\rho(x, \bar{t}))$, $\bar{t}$ – ограниченное в начале раздела произвольное число , верно неравенство (1.5), и если*

$$\int\limits_{\bar{t}-\theta\rho^{\lambda+1}}^{\bar{t}} mes\ \{z : (u - \mu^\pm \mp \frac{w}{2^s})^\pm > 0, z \in B_\rho\} d\tau \le C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}} \rho^{Q+\lambda+1}, \quad (2.7)$$

где $C_{2.9}$ будет определена в процессе доказательства леммы, тогда справедливо либо неравенство $\mu^- + \frac{w}{2^{s+1}} < u(z, t)$, либо $u(z, t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s+1}}$, соответственно, при $(z, t) \in S^s_{\rho/2}(x, \bar{t})$.

Доказательство леммы 2.7. Выберем $\rho_n = \rho/2 + \rho/2^{n+1}$, $\bar{\rho}_n = (\rho_n + \rho_{n+1})/2$, $\theta = (2^s/w)^{\lambda-1}$, $\xi(x, t)$ – гладкая срезающая функция, которая равна 0 вне $S^s_{\rho_n}$, и 1 на $S^s_{\bar{\rho}_n}$, $\xi(x, \bar{t} - \theta\rho_n^{\lambda+1}) = 0$, для всех $x \in B_{\rho_n}$, $|D_L\xi| \le 2^{n+1}/\rho_n$, $0 < \xi_t \le C_\xi 2^{n+1}/(\theta\rho_n^{\lambda+1}) = C_\xi 2^{n+1}/\rho_n^{\lambda+1}(w/2^s)^{\lambda-1}$для всех $x \in B_{\rho_n}, t \in (\bar{t} - \theta\rho_n^{\lambda+1}, \bar{t})$, $k_n = \mu^\pm \mp w/2^{s+1} \mp w/2^{s+n+1}$, $\bar{t} \le t_0$, $s_0 \le s \le s^*$, $n = 0, 1, 2, ..$ Тогда на $S_n = B_{\rho_n} \times [\bar{t} - \theta\rho_n^{\lambda+1}, \bar{t}]$ верно неравенство

$$\underset{\bar{t}-\theta\bar{\rho}_n^{\lambda+1} \le \tau \le t}{esssup} ||(u - k_n)^\pm||^2_{L_2(B_{\bar{\rho}_n})}(\tau) + ||D_L(u - k_n)^\pm||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(S_{\bar{\rho}_n})} \le$$

$$C_{1.5} C_\xi \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}} \left\{ \int\int\limits_{S_{\rho_n}} [(u - k_n)^\pm]^{\lambda+1} dz d\tau + \int\int\limits_{S_{\rho_n}} [(u - k_n)^\pm]^2 dz d\tau \right\}.$$

Также очевидно, что $(2^s/w)^{\lambda-1} ess\ sup \int_{B_{\bar{\rho}_n}} [(u - k_n)^\pm]^{\lambda+1} dz \le ess\ sup \int_{B_{\bar{\rho}_n}} [(u - k_n)^\pm]^2 dz$ и $||(u - k_n)^\pm|| \le w/2^{s_0} < \delta$. Обозначим $S_n = B_{\rho_n} \times (-\rho_n^{\lambda+1}, 0)$, $\bar{S}_n = B_{\bar{\rho}_n} \times (-\bar{\rho}_n^{\lambda+1}, 0)$. Сделав в последнем неравенстве замену $\tau = t + \acute{z}\theta$ и использовав введенные ранее обозначения и последние неравенства, получим

$$\theta \cdot \underset{-\theta\bar{\rho}_n^{\lambda+1} \le t \le 0}{esssup} ||(v - k_n)^\pm||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(B_{\bar{\rho}_n})}(\tau) + \theta \cdot ||D_L(u - k_n)^\pm||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le$$

$$C_{1.5}C_\xi \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\theta(\frac{w}{2^s})^{\lambda+1}\int\limits_{-\rho_n^{\lambda+1}}^{0} mes\ A^{\pm}_{k_n,\rho_n}(\acute{z})d\acute{z}.$$

Используя введенные ранее обозначения, получим

$$||(v-k_n)^{\pm}||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le C_{1.5}C_\xi \frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\left(\frac{w}{2^s}\right)^{\lambda+1}|A_n^{\pm}|. \tag{2.8}$$

Введем кусочно-гладкую срезающую функцию $\varphi_n(z)$, которая равна 1 на $B_{\rho_{n+1}}$, и 0 вне $B_{\bar{\rho}_n}$, $|D_L\varphi_n| \le 2^{n+1}/\rho_n$. Тогда $(v-k_n)^{\pm}\varphi_n \in \mathfrak{V}^0_{\lambda+1}(\bar{S}_n)$. Следствие 2.5 и неравенство (2.8) дают

$$||(v-k_n)^{\pm}||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(S_{n+1})} \le ||(v-k_n)^{\pm}||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le$$

$$\le C_{2.5}|A_n^{\pm}|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}||(v-k_n)^{\pm}\varphi_n||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}^0_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le C_{2.5}|A_n^{\pm}|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}C_{1.5}C_\xi\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\left(\frac{w}{2^s}\right)^{\lambda+1}|A_n^{\pm}|.$$

Так как $||(v-k_n)^{\pm}||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(S_{n+1})} \ge |k_n-k_{n+1}|^{\lambda+1}|A^{\pm}_{n+1}| \ge (w/2^s)^{\lambda+1}/2^{(\lambda+1)(n+1)}|A^{\pm}_{n+1}|$, имеем

$$\left(\frac{w}{2^s}\right)^{\lambda+1}\frac{1}{2^{(\lambda+1)(n+1)}}|A^{\pm}_{n+1}| \le C_{2.5}|A_n^{\pm}|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}C_{1.5}C_\xi\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\left(\frac{w}{2^s}\right)^{\lambda+1},$$

$$|A^{\pm}_{n+1}| \le C_{2.5}C_{1.5}C_\xi 2^{\lambda+1}\frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}|A_n^{\pm}|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} = C_{2.9}\frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}|A_n^{\pm}|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}. \tag{2.9}$$

Введем новое обозначение $Y_n = |A^{\pm}|/|S_n|$. Тогда

$$Y_{n+1} \le C_{2.9}4^{n(\lambda+1)}Y_n^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}\frac{|S_n|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}}{\rho_n^{\lambda+1}} = C_{2.9}4^{n(\lambda+1)}Y_n^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}.$$

Лемма 2.6 (см. лемму 5.6 [8] при $b>1$) позволяет утверждать, что если $Y_0 \le C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}}4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}}$, то $Y_n \to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, если

$$\int\limits_{\bar{t}-\theta\rho^{\lambda+1}}^{\bar{t}} mes\ \{z : (u-\mu^{\pm}\mp\frac{w}{2^s})^{\pm} > 0, z\in B_\rho\}d\tau \le C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}}4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}}\rho^{Q+\lambda+1},$$

то либо

$$\mu^- + \frac{w}{2^{s+1}} < u(z,t),$$

либо

$$u(z,t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s+1}},$$

соответственно, при $z\in B_{\frac{\rho}{2}}, t\in(\bar{t}-(2^s/w)^{\lambda-1}(\rho/2)^{\lambda+1},\bar{t})$. Что и требовалось доказать. □

Продолжение статьи будет издано позднее.

1. *Baouendi M.S.* Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés // Bull.Soc.Math.France. – 1967. – Вып.95 – P.45-87.
2. *Di Benedetto E.* On the Local Behaviour of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Measurable Coefficients // Ann. Sc. Norm. Pisa Cl.Sci.. – 1986. – Вып.13(3) – P.487-535.
3. *Franchi B., Lanconelli E.* Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres // Toronto: Rend. Sem. Mat. Univ. Politec., – 1984.
4. *Franchi B., Lanconelli E.* Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1983. – Вып.10(4) – P.523-541.
5. *Garofalo N., D.-M.Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the Existence of Minimal Surfaces // Comm. Pure Appl. Math. – 1996. – Вып.49 – P.1081-1144.
6. *Grushin V.V.* On a class of hypoelliptic operators // Math USSR Sbornik. – 1970. – Вып.12(3) – P.458-476.
7. *Kalashnikov A.S.* Some properties of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations // Russian Math. Surveys. – 1987. – Вып.42 – P.169-222.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`w9071981@yandex.ru`

Получено 26.03.08