УДК 539.3

©2008. **А.В. Зенченков**

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПЕРФОРИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ С ПЛАСТИЧЕСКИМИ ЗОНАМИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ НА УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Построено аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании, при учете пластических зон, образующихся в результате концентрации напряжений вблизи полости. Постановка задачи моделирует массив горных пород, включающий пласт полезного ископаемого, ослабленный выработкой.

При расчетах напряженного состояния массив горных пород моделируется упругой средой. Значительная концентрация напряжений вблизи забоя очистной выработки, расположенной на глубине более трехсот метров, приводит к образованию пластической зоны. Модуль упругости горных пород на порядок и более превосходит модуль упругости угля. Поэтому пластическая зона сосредотачивается в области угольного пласта, прилегающей к обнаженной поверхности выработки, в то время как породы кровли и почвы остаются упругими.

Рассмотрим массив горных пород, ослабленный очистной выработкой, проведенной в пласте полезного ископаемого. Обозначим мощность разрабатываемого угольного пласта через $2h$, глубину его залегания через H.

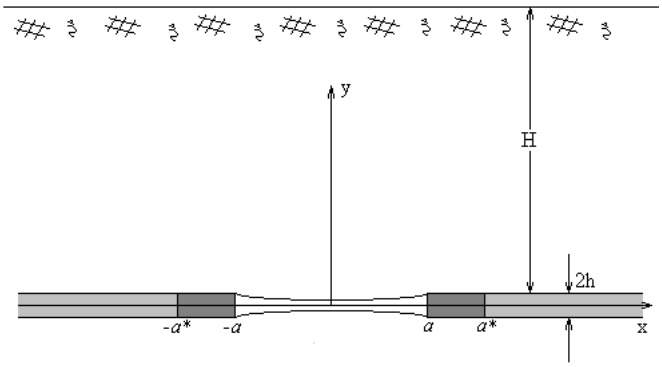

Рис. 1. Схема разработки пласта полезного ископаемого

В системе координат Oxy (рис.1) напряженное состояние ненарушенного массива имеет вид

$$\sigma_x^0 = -\lambda\gamma(H-y), \quad \sigma_y^0 = -\gamma(H-y), \quad \tau_{xy}^0 = 0. \tag{1}$$

Здесь λ – коэффициент бокового распора, γ – средний удельный вес горных пород.

Введем дополнительные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, обусловленные проведением выработки. Тогда полные напряжения $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau_{xy}^e$ в массиве с выработкой можно представить в виде сумм

$$\sigma_x^e = \sigma_x^0 + \sigma_x, \quad \sigma_y^e = \sigma_y^0 + \sigma_y, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}. \tag{2}$$

Для достаточно больших глубин при определении дополнительных напряжений можно пренебречь влиянием дневной поверхности. Тогда, в силу симметрии, достаточно рассмотреть задачу теории упругости о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости, лежащей на упругом слое, ослабленном выработкой.

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \tag{4}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты упругих деформаций.

Граничные условия запишем в виде

$$\begin{array}{ll} \sigma_y(x,0) = \gamma H, & x \in V; \\ \sigma_y(x,0) = \gamma H - f(x), & x \in V^* - V; \\ \sigma_y(x,0) = kv(x,0), & x \notin V^*; \\ \tau_{xy}(x,0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty). \end{array} \tag{5}$$

Здесь v – вертикальные смещения; V – область свободно зависающей кровли $|x| < a$; $(V^* - V)$ – призабойная пластическая зона $a < |x| < a^*$; a^* – неизвестная координата границы пластической зоны. Коэффициент k определяется формулой

$$k = \frac{(1-\nu_c)E_c}{h(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}, \tag{6}$$

где E_c, ν_c – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого основания.

В упругой трансверсально-изотропной полуплоскости перемещения с компонентами напряжений связаны обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты деформации β_{ij} выражаются формулами

$$\beta_{11} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_2^2}{E_1}, \quad \beta_{12} = \frac{\nu_2(1+\nu_1)}{E_1}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{G}. \tag{8}$$

Система диференциальных уравнений (1), (2), (4) сводится к уравнению [3]:

$$\beta_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0, \tag{9}$$

причем компоненты напряжения выражаются через функцию Φ следующим образом:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{10}$$

Согласно [2, 5] решение краевой задачи (3), (4), (5) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x,y)&=\int\limits_{V^*}G_x(x-\eta,y)\beta(\eta)d\eta,\\ \sigma_y(x,y)&=\int\limits_{V^*}G_y(x-\eta,y)\beta(\eta)d\eta,\\ \tau_{xy}(x,y)&=\int\limits_{V^*}G_{xy}(x-\eta,y)\beta(\eta)d\eta.\end{aligned} \tag{11}$$

Функция $\beta(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\beta(x)=p(x)+\int\limits_{V^*}\beta(\eta)G(x-\eta)d\eta, \tag{12}$$

где

$$p(x)=\begin{cases}\gamma H, & x\in V;\\ \gamma H-f(x), & x\in V^*-V.\end{cases} \tag{13}$$

При этом

$$\begin{aligned}G_x(x,y)&=\frac{1}{\pi}\frac{r_1r_2}{r_1-r_2}\left[\frac{r_1^2y}{x^2+r_1^2y^2}-\frac{r_2^2y}{x^2+r_2^2y^2}+\right.\\ &\left.+\kappa\Re\left(-r_1\widehat{Ei}(\kappa r_1y-i\kappa x)+r_2\widehat{Ei}(\kappa r_2y-i\kappa x)\right)\right],\\ G_y(x,y)&=\frac{1}{\pi}\frac{r_1r_2}{r_1-r_2}\left[\frac{y}{x^2+r_1^2y^2}-\frac{y}{x^2+r_2^2y^2}+\right.\\ &\left.+\kappa\Re\left(\frac{1}{r_1}\widehat{Ei}(\kappa r_1y-i\kappa x)-\frac{1}{r_2}\widehat{Ei}(\kappa r_2y-i\kappa x)\right)\right],\\ G_{xy}(x,y)&=\frac{1}{\pi}\frac{r_1r_2}{r_1-r_2}\left[-\frac{x}{x^2+r_1^2y^2}-\frac{x}{x^2+r_2^2y^2}+\right.\\ &\left.+\kappa\Im\left(\widehat{Ei}(\kappa r_1y-i\kappa x)+\widehat{Ei}(\kappa r_2y-i\kappa x)\right)\right].\\ G(x)&=\frac{\kappa}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin(\kappa x)-Si(\kappa x)\sin(\kappa x)-Ci(\kappa x)\cos(\kappa x)\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $Si(x)$ – интегральный синус, $Ci(x)$ – интегральный косинус,

$$\kappa = k\beta_{22}\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}, \quad \widehat{Ei}(x) = Ei(x)e^x, \quad Ei(x) = \int\limits_0^x \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

В решении (6)–(8) область V^* неизвестна. Определим её из условия непрерывности напряжений σ_y в граничном сечении пластической зоны. Для расчета нормальных напряжений на границе полуплоскости воспользуемся формулой

$$\sigma_y(x) = -\int\limits_{V^*} \beta(\eta)G(x-\eta)d\eta, \quad x \notin V^*. \tag{15}$$

Тогда в сечении $x = a^*$ должно выполняться условие

$$p(a^*) = -\int\limits_{V^*} \beta(\eta)G(a^*-\eta)d\eta.$$

Таким образом, найдем a^* методом последовательного приближения из уравнения

$$p(a^*_{n+1}) = -\int\limits_{-a^*_n}^{a^*_n} \beta_n(\eta)G(a^*_{n+1}-\eta)d\eta, \quad a_{n+1} \geq a_n, \tag{16}$$

где β_n определяется из уравнения

$$\beta_n(x) = p(x) + \int\limits_{-a^*_n}^{a^*_n} \beta_n(\eta)G(x-\eta)d\eta. \tag{17}$$

Так как последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена, значит $a_n \to a^*$.

Физико-механические свойства угля и горных пород таковы, что угольный пласт можно рассматривать как тонкий слой, зажатый между жесткими шероховатыми плитами. Значит, в качестве функции $f(x)$ можно взять известное решение Л.Прандтля для пластической полосы, сжимаемой плитами [4]

$$f(x) = \begin{cases} k_{\text{пл.}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-a}{h}\right), & a < x < a^*; \\ k_{\text{пл.}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x+a}{h}\right), & -a^* < x < -a. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $k_{\text{пл.}}$ – пластическая постоянная основания.

Результаты расчетов, приведенные на рис.2, получены при следующих численных значениях параметров: $E_1 = 1 \cdot 10^4$МПа, $E_2 = 1,5 \cdot 10^4$МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$, $G = 0,2 \cdot 10^4$МПа, $E_{\text{с}} = 1 \cdot 10^3$МПа, $\nu_{\text{с}} = 0,35$, $\gamma = 25$кПа/м, $H = 800$м, $h = 0,5$м, $2a = 60$м, $k = 3210$МПа/м, $\kappa = 0,6261$м$^{-1}$. Отношение $k_{\text{осн.}}/\gamma H = 0{,}1$ (кривая 1);

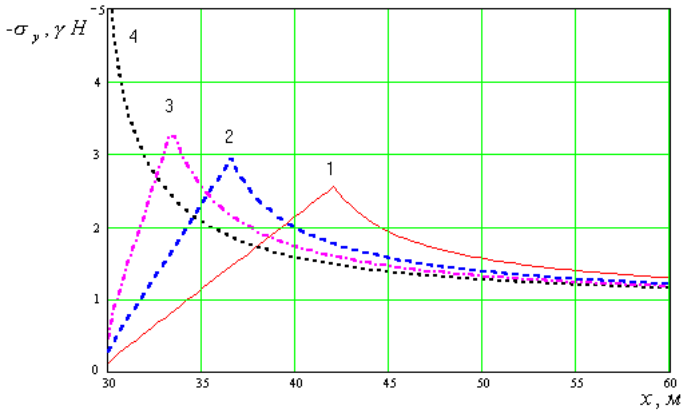

Рис. 2. Опорное давление в зависимости от параметра $k_{\text{уг.}}/\gamma H$: 1 – 0,1; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – пластическая зона отсутствует

0,2 (кривая 2); 0,4 (кривая 3); без пластической зоны (кривая 4). Из рисунка видно, что учет пластической зоны качественно изменяет характер эпюры нормального напряжения, действующего на угольный пласт. При возрастании пластической постоянной угля протяженность пластической зоны уменьшается, а максимум опорного давления увеличивается.

1. *Кавлакан М.В., Михайлов А.М.* О распределении давления на пласт при горизонтальной выработке // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1977. – №5. – С.48-53.
2. *Хапилова Н.С., Зенченков А.В.* Смешанная задача теории упругости для полуплоскости // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – Т.5. – С.165-172.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.:Наука, – 1977. – 415с.
4. *Хапилова Н.С.*Теория внезапного отжима угольного пласта. – Киев: Наук. думка, – 1992. – 232с.
5. *Зенченков А.В.* Распределение напряжений в трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – Т.9. – С.76-80.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
khapilova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.05.08