

УДК 531.38

©2008. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ДВУМЯ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

Изучено положение равновесия замкнутой системы n твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами, в предположении отсутствия внешних сил и моментов. Найдено новое решение уравнений равновесия системы, описывающее конфигурацию, в которой все оси симметрии тел расположены в одной плоскости и пересекаются в двух различных точках. Внешне эта конфигурация напоминает две соединенные восьмерки и названа авторами "двойная восьмерка". Рассмотрен частный случай, когда система состоит из пяти тел. Определены области геометрических параметров, для которых это решение существует.

Введение. В последнее время появилось значительное число публикаций, посвященных исследованию замкнутых стержневых систем. Это связано с одним из наиболее интересных приложений теории стержней, а именно, моделированию с их помощью молекул ДНК. Поиск равновесных состояний упругих стержней является одним из направлений исследования. Первыми равновесными состояниями, полученными в [1–4], были такие, в которых упругая ось стержня была расположена в плоскости и представляла собой окружность или "восьмерку". В 2000 году Е.Л. Старостин нашел еще одно равновесное состояние [5], которому соответствовала конфигурация с несколькими самопересечениями упругой оси в одной точке. Найденное решение было названо им решением типа "розы". Позднее он провел численный анализ этого решения [6].

В работах [7, 8] была предложена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, которая представляет собой систему n твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Упругий момент в шарнире был введен таким образом, чтобы при $n \rightarrow \infty$ он совпадал с моментом, определенным в теории упругих стержней. Использование таких упругих моментов в конечномерной модели позволяет моделировать с ее помощью большие прогибы и учитывать геометрическую нелинейность изучаемых объектов. Конечномерный подход дал возможность выписать известные решения в явном виде. Так, в [7, 8] получено решение, описывающее в конечномерном случае окружность и "восьмерку", а в [9, 10] определены условия существования конечномерной конфигурации и для решения типа "розы".

В настоящей работе получено новое решение, описывающее конфигурацию, в которой оси симметрии тел пересекаются в двух различных точках. Внешне эта конфигурация напоминает две соединенные восьмерки. Рассмотрен простейший пример, когда система состоит из пяти твердых тел. Выделены области параметров существования найденного решения.

1. Уравнения равновесия. Полагаем, что изучаемая система состоит из n гироскопов Лагранжа S_k , которые связаны в точках O_k ($k = \overline{1, n}$) пересечения их осей симметрии упругими сферическими шарнирами. Считаем, что на систему не

действуют внешние силы и моменты, и ее центр масс C неподвижен. Свяжем с ним неподвижную систему координат $CXYZ$, а с каждым телом S_k ($k = \overline{1, n}$) – подвижную систему координат $C_k X_k Y_k Z_k$, где C_k – центр масс тела S_k , а ось $C_k Y_k$ направлена вдоль его оси симметрии. Как и в [7, 8], определим положение системы координат, связанной с телом S_k , по отношению к неподвижной системе координат углами Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$. Тогда для замкнутых систем ($O_1 = O_{n+1}$) имеем

$$\sum_{k=1}^n h_k \sin \psi_k \sin \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \cos \psi_k \sin \theta_k = 0, \quad (1)$$

где $h_k = O_k O_{k+1}$.

Пусть \mathbf{R}_k и \mathbf{L}_k соответственно сила и момент силы, характеризующие действие тела S_{k-1} на S_k , а $-\mathbf{R}_{k+1}$ и $-\mathbf{L}_{k+1}$ – соответственно сила и момент силы действия тела S_{k+1} на S_k . Из условия замкнутости системы для введенных сил и моментов следует

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}; \quad \mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}. \quad (2)$$

Полагая далее сумму всех сил и моментов, действующих на тело S_k , равной нулю, получаем следующие уравнения равновесия:

$$\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1} = 0; \quad \mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} - \mathbf{h}_k \times \mathbf{R}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Поскольку в сферическом шарнире момент силы реакции равен нулю [11], то остаются только упругие моменты воздействия со стороны тел S_{k-1} и S_{k+1} на тело S_k . Определяя их как в [7, 8], имеем

$$\mathbf{L}_k = c_1^2 (\varkappa_k^1 \mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2 \mathbf{e}_k^2) + c_2^2 \varkappa_k^3 \mathbf{e}_k^3. \quad (4)$$

Здесь c_1^2, c_2^2 – соответственно изгибная и крутильная жесткости, \mathbf{e}_k^i ($k = \overline{1, n}; i = 1, 2, 3$) – орты связанной с телом S_k системы координат, \varkappa_k^i – компоненты дискретного аналога вектора Дарбу $\boldsymbol{\kappa}_k$ в точке O_k , который равен

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_{k-1}^i \times \mathbf{e}_k^i), \quad h = \min_k h_k. \quad (5)$$

Далее, как и в работах [1–9], будем считать, что оси тел находятся в одной плоскости и угол $\psi_k = 0$, $k = \overline{1, n}$. Кроме того, аналогично [7–9], считаем, что разность углов собственного вращения $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{const}$ (постоянное кручение). Проектируя в этом случае уравнения равновесия (3) с учетом (2), (4) на ось $C_k X_k \parallel CX$, получаем

$$\sin(\theta_{k+1} - \theta_k) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) = H_k (R_y \sin \theta_k - R_z \cos \theta_k), \quad (6)$$

где $H_k = \frac{h_k h}{c_1^2}$, $k = \overline{1, n}$; $\theta_1 = \theta_{n+1}$, $\theta_0 = \theta_n$; R_y, R_z – проекции вектора силы реакции \mathbf{R} соответственно на оси OY и OZ .

Условия замкнутости системы тел в плоском случае находим из уравнений (1), в которых $\psi_k = 0$. Имеем

$$\sum_{k=1}^n h_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \sin \theta_k = 0. \quad (7)$$

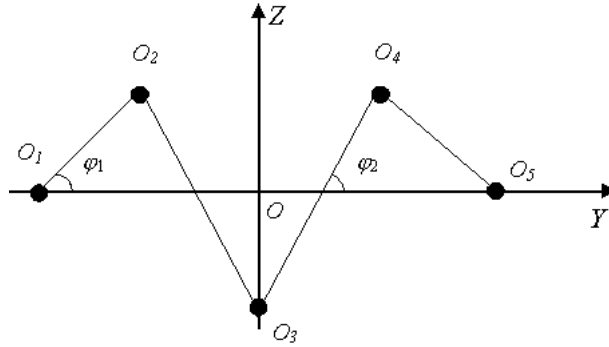


Рис. 1. "Двойная восьмерка".

Итак, наша задача найти решение системы (6), (7), описывающее конфигурацию, в которой оси симметрии тел пересекаются в двух разных точках.

2. Новое решение "двойная восьмерка". Рассмотрим конфигурацию, в которой существует самопересечение осей симметрии тел не в одной, а в двух точках. Одной из возможных симметричных конфигураций может служить фигура, представляющая из себя "двойную восьмерку". В простейшем случае она может быть представлена системой пяти тел, изображенной на рис. 1. Полагаем, что фигура симметрична относительно оси OZ .

В точках O_k ($k = \overline{1, 6}$; $O_6 = O_1$) пересечения осей симметрии тел S_k расположены упругие сферические шарниры. Считаем, что длины осей симметрии тел $O_k O_{k+1}$ равны

$$O_1 O_2 = O_4 O_5 = h_1; \quad O_2 O_3 = O_3 O_4 = h_2; \quad O_1 O_5 = h_3. \quad (8)$$

При этом углы θ_k между осями $O_k O_{k+1}$ и осью OY (см. рис. 1) равны

$$\theta_1 = -\theta_4 = \varphi_1; \quad \theta_2 = -\theta_3 = -\varphi_2; \quad \theta_5 = \pi. \quad (9)$$

Отметим, что φ_1 и φ_2 – острые углы.

Потребовав выполнения условий замкнутости (7), получим, что введенные углы φ_1, φ_2 должны удовлетворять уравнению

$$h_1 \cos \varphi_1 + h_2 \cos \varphi_2 = \frac{h_3}{2}. \quad (10)$$

Введем безразмерные параметры

$$a_1 = \frac{h_1}{h_2}; \quad a_2 = \frac{h_3}{2h_2}. \quad (11)$$

Тогда из (10) следует

$$\cos \varphi_2 = a_2 - a_1 \cos \varphi_1. \quad (12)$$

Учитывая, что φ_2 острый угол, из (12) получаем

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} < \cos \varphi_1 < \frac{a_2}{a_1}. \quad (13)$$

Так как φ_1 тоже острый угол и, следовательно, $0 < \cos \varphi_1 < 1$, то, с учетом (13), окончательно имеем

$$\max\left(\frac{a_2 - a_1}{a_1}, 0\right) < \cos \varphi_1 < \min\left(\frac{a_2}{a_1}, 1\right). \quad (14)$$

Отметим, что переменные φ_i, a_i ($i = 1, 2$) должны удовлетворять еще двум условиям, следующим из геометрии заданной конфигурации (см. рис. 1). Поскольку точка O_3 имеет координаты $(0, -z)$, то, очевидно, получаем

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} < \frac{1}{a_1}, \quad (15)$$

$$0 < a_2 < a_1 + 1. \quad (16)$$

Теперь определим значения сил реакций R_y, R_z и углов φ_1 и φ_2 , которые удовлетворяют уравнениям равновесия изучаемой системы. Подставляя (8), (9) в (6), получаем $R_z = 0$ и

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= H_1 R_y \sin \varphi_1, \\ \sin 2\varphi_2 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= -H_2 R_y \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (17)$$

После исключения R_y из (17), имеем

$$\frac{\sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin 2\varphi_2 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = -a_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \quad (18)$$

Введем дополнительный параметр p

$$\sin \varphi_2 = p \sin \varphi_1. \quad (19)$$

Из (15), (19) следует, что

$$p > a_1 > 0. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая, что $\sin \varphi_1 \neq 0$, получаем

$$\cos \varphi_1 = \frac{p(1 - a_2) + a_1 a_2 (2p + 1)}{(p - a_1)^2 + 2pa_1^2}. \quad (21)$$

Подстановка (21) в (14) с учетом (16), (20) позволяет выделить области изменения параметров a_1, a_2, p , в которых возможно выполнение неравенства (14). Имеем следующие четыре области:

$$I. \quad a_2 < \min(a_1, 1), \quad p > a_1 \left(1 + \frac{1}{a_2}\right);$$

$$II. a_1 < a_2 < 1, \quad p > p_{**};$$

$$III. 1 < a_2 < a_1, \quad a_1 \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) < p < p_2;$$

$$IV. \max(a_1, 1) < a_2 < a + 1 + 1, \quad p_{**} < p < p_2.$$

Здесь p_{**} и p_2 соответственно положительные корни уравнений

$$f_1(p) = p^2 + p[2a_1(a_1 - a_2 - 1) + a_2 - 1] + a_1(a_1 - a_2) = 0; \quad (22)$$

$$f_2(p) = p^2 - pa_1 \frac{2a_1 + a_2 - 1}{a_2 - 1} - \frac{a_1^2}{a_2 - 1} = 0. \quad (23)$$

Следует отметить, что в области III имеем $f_2 \left(a_1 + \frac{a_1}{a_2}\right) < 0$, поэтому $a_1 \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) < p_2$ в этой области. Учитывая далее, что параболы f_1 и f_2 пересекаются в точке $p_1 = -\frac{a_1 a_2}{2a_1 a_2 - a_2 + 1}$, а в области IV

$$p_1 < 0; \quad \frac{a_1^2}{a_2 - 1} > a_1(a_2 - a_1)$$

получаем, что в этой области $p_2 > p_{**}$.

Поскольку $\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2 = 1$, то из (12), (19) следует

$$\cos^2 \varphi_1 (a_1^2 - p^2) - 2a_1 a_2 \cos \varphi_1 + a_2^2 + p^2 - 1 = 0. \quad (24)$$

Исключая из (24) с помощью (21) $\cos \varphi_1$, получаем уравнение для определения параметра $p = p(a_1, a_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} F_6 = & p^6 + 4a_1(a_1 - 1)p^5 + [4a_1(1 - a_1)(a_1 - a_2)^2 + 2(4a_1^3 - 4a_1^2 + 2a_1 - \\ & - 1)(a_1 - a_2) - 2(2a_1^3 - a_1^2 - a_1 + 1)]p^4 + [-4a_1^2(a_1 - a_2)^2 + \\ & + 4a_1(2a_1^2 + 1)(a_1 - a_2) - 4a_1(a_1^2 + 2a_1 - 1)]p^3 + [-2a_1^2(a_1 - a_2) - \\ & - a_1^2(3a_1^2 - 10a_1 + 5)]p^2 + 4a_1^3(1 - a_1)p - a_1^4 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Численные исследования позволили выделить область существования решений этого уравнения с учетом выделенных интервалов I–IV. Она представлена на рис. 2.

Рассмотрим несколько частных случаев решения данной задачи.

3. Случай $a_1 = a_2$. Пусть $a_1 = a_2 = a$. При этом из (11) следует $2h_1 = h_3$, а из I–IV получаем следующие интервалы определения параметра p :

$$a) a < 1, \quad p > a_1 + 1; \quad b) a > 1, \quad a_1 + 1 < p < p_2, \quad (26)$$

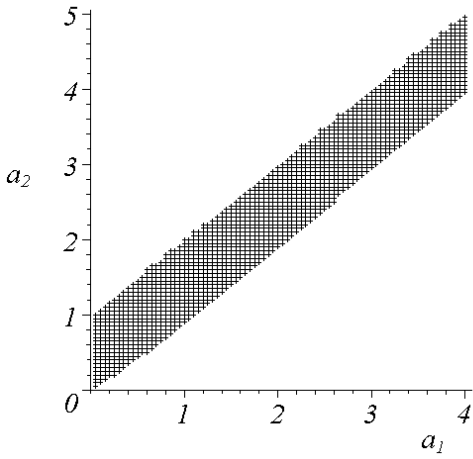


Рис. 2. Область существования решения.

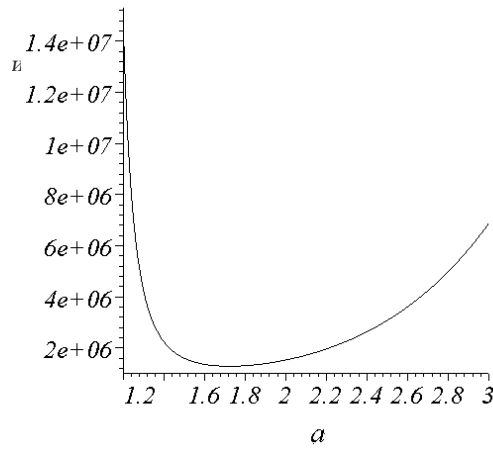


Рис. 3. Функция $F_6(p_2)$.

где $p_2 = \frac{a}{2(a-1)}(3a-1 + \sqrt{9a^2 - 2a - 3})$ (предельный случай $a = 1$ будет рассмотрен отдельно). На этих интервалах необходимо определить корни уравнения (25), которое принимает вид

$$F_6 = p^6 + 4a(a-1)p^5 - 2[a^3 + (a-1)(a^2-1)]p^4 - 4a[(a+1)(a-1) + 2a]p^3 - a^2[5(a-1)^2 - 2a^2]p^2 - 4(a-1)p - a^4 = 0. \quad (27)$$

Учитывая, что $F_6(\infty) > 0$ и $F_6(a+1) = -(2a^3 + 2a^2 + 1)^2 < 0$, получаем, что в области (26, a) уравнение (27) всегда имеет хотя бы один положительный корень $p \in (a+1, \infty)$

График функции $F_6(p_1)$ приведен на рис. 3. Он показывает, что в области (26, b) функция $F_6(p_2) > 0$, а поскольку, как было отмечено выше, $F_6(a+1) < 0$, то и в этой области существует положительный корень $p \in (a+1, p_2)$.

Рассмотрим предельный случай, когда $a = 1$ (при этом $h_1 = h_2$). Из (21) следует $\cos \varphi = \frac{2p+1}{(p+a)^2}$ и на интервале (20) определения параметра $p : p > 1$, имеем $0 < \cos \varphi < 1$. Уравнение (27) в этом случае представляется так

$$f_6 = p^6 - 2p^4 - 8p^3 + 2p^2 - 1 = 0$$

и имеет единственный корень в области $p \in (1, \infty)$, $p = 2$.

4. Случай $\varphi_1 = \varphi_2$. В заключение рассмотрим еще один частный случай $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. При этом из (12) следует

$$\cos \varphi = \frac{a_2}{a_1 + 1}. \quad (28)$$

Очевидно, что в области (16) выполнено неравенство $0 < \cos \varphi < 1$. Кроме того, из (18) получаем

$$\cos \varphi = \frac{1}{2(1 - 2a_1)}. \quad (29)$$

Тогда из (28), (29) следует

$$a_2 = \frac{a_1 + 1}{2(1 - a_1)}. \quad (30)$$

Из (16), (30) имеем $a_1 < 1/4$ или, с учетом (11), получаем $h_1 < 4h_2$.

Таким образом, на интервале $a_1 \in (0, 0.25)$, существует решение

$$\theta_1 = -\theta_2 = \theta_3 = -\theta_4 = \varphi, \quad \theta_5 = \pi,$$

где $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2(1-2a_2)}\right)$.

1. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P.213-226.
2. *Бенкэм Дж.* Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С.308-338.
3. *Starostin E.I.* Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – V.3. – 1996. – P.235-271.
4. *Кугушев Е.И., Пирогова Е.Е., Старостин Е.И.* Математическая модель образования трехмерной структуры ДНК. – 1997. – 24с. – (Препринт РАН ИПМ им. М.В. Келдыша, №77).
5. *Starostin E.I.* Equilibrium configurations of a thin elastic rod with self contacts // *Proc. of the 16th IMACS World Congress 2000, August 21-25*. – 2000.
6. *Starostin E.I.* Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, 362. – 2004. – P.1317-1334.
7. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // *Механика твердого тела*. – 2005. – Вып.35. – С.33-39.
8. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып.36. – С.94-103.
9. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия замкнутых систем с самопересечениями // Там же. – 2007. – Вып.37. – С.145-151.
10. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Равновесные конфигурации замкнутой системы твердых тел // Тезисы междунаро. конф. "Классические задачи динамики твердого тела" (9-13 июня, 2007, Донецк, Украина). – Донецк, 2007. – С.12-13.
11. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292с.