

УДК 52—64

Отражение и пропускание поляризованного света анизотропными атмосферами.

I. Основные уравнения и методика расчета

М. П. Мищенко

Рассмотрена задача расчета параметров Стокса излучения, отраженного и пропущенного анизотропными плоскопараллельными атмосферами, при общих предположениях о форме, размерах, показателе преломления и пространственной ориентации аэрозольных рассеивающих частиц. Получены уравнения инвариантного погружения для матриц отражения и пропускания поляризованного света вертикально-неоднородными атмосферами, а также нелинейное интегральное уравнение для матрицы отражения поляризованного света полубесконечной однородной атмосферой. Кратко описаны алгоритмы численного решения полученных уравнений, которые можно использовать при интерпретации поляриметрических наблюдений.

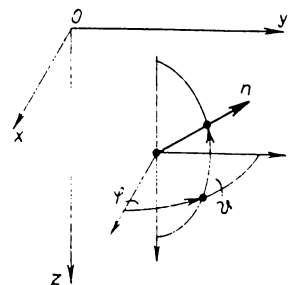
REFLECTION AND TRANSMISSION OF POLARIZED LIGHT BY ANISOTROPIC ATMOSPHERES. I. THE MAIN EQUATIONS AND NUMERICAL TECHNIQUES, by Mishchenko M. I.— Reflection and transmission of polarized light by anisotropic plane-parallel atmospheres are studied. The atmospheres are assumed to contain scattering particles of arbitrary shape, size, refractive index and spatial orientation. Invariant imbedding equations are obtained for the reflection and transmission matrices of a vertically inhomogeneous atmosphere. The nonlinear integral equation for the reflection matrix of a homogeneous semi-infinite atmosphere is also derived. Methods for the numerical solution of the equations are briefly discussed which may be used in the interpretation of polarimetric observations.

Введение. Известно, что заметная доля облачных частиц в атмосферах планет имеет несферическую форму и может характеризоваться некоторым выделенным направлением пространственной ориентации [3, 4, 25, 30, 31]. Таким образом, планетные атмосферы являются существенно анизотропными средами*. Однако до сих пор при интерпретации поляриметрических наблюдений планет с использованием строгой теории многократного рассеяния света широко (и почти исключительно) используют модель изотропной рассеивающей среды, состоящей из сферических частиц (см., например, [7, 14, 23, 26, 30]). Объясняется это как трудностями при расчете светорассеивающих свойств элементарного объема, состоящего из несферических частиц, так и отсутствием достаточно разработанной теории переноса поляризованного излучения в анизотропных средах и соответствующих численных методов, позволяющих получать результаты на современных ЭВМ при разумных затратах машинного времени.

Первая из названных проблем в настоящее время в значительной степени решена [12, 13, 20, 22, 29]; задача о переносе поляризованного излучения в ее аналитическом и численном аспектах решалась лишь в некоторых частных случаях анизотропии рассеивающей среды.

* Здесь и далее под анизотропными будем понимать монохроматически рассеивающие среды, состоящие из несферических частиц, характеризующихся некоторыми показателями преломления, формой и функциями распределения по размерам и направлениям пространственной ориентации. Такие важные астрофизические задачи, как перенос поляризованного излучения в магнитоактивной плазме и формирование поляризации в частотах спектральных линий при наличии магнитного поля, хорошо изучены (см., например, [5] и обзор [9]). Мы их не рассматриваем, поскольку они не связаны с оптикой планетных атмосфер.

Так, в [5] достаточно полно рассмотрено многократное рассеяние поляризованного света на несферических частицах, малых по сравнению с длиной волны (рэлеевское рассеяние). В [21] приведены численные результаты для плоскопараллельных аксиально-симметричных сред (эллипсоиды вращения с вертикально ориентированными осями), полученные путем решения векторного уравнения переноса излучения методом дискретных ординат. Наконец, в [8] решена задача о переносе поляризованного излучения в анизотропной среде, состоящей из полностью ориентированных бесконечных цилиндров, при падении внешнего излучения по нормали к осям цилиндров.



В отличие от перечисленных публикаций настоящая работа имеет более общий характер. В ней рассмотрена задача расчета параметров

Координаты в плоскопараллельной среде. Единичный вектор \mathbf{n} характеризует направление распространения света

Стокса излучения, отраженного и пропущенного произвольными плоскопараллельными горизонтально-однородными анизотропными атмосферами. Никаких ограничений на форму, размеры, показатель преломления аэрозольных частиц, их распределение по направлениям ориентации не накладывалось.

Основная цель первой части нашей работы — получить ряд уравнений для матриц отражения и пропускания, допускающих эффективное численное решение и, следовательно, непосредственно применимых при интерпретации поляриметрических наблюдений планетных атмосфер. Приведены основные известные факты, относящиеся к уравнению переноса монохроматического излучения в анизотропных рассеивающих средах; представлено формальное решение этого уравнения в задаче с параллельным внешним потоком. Затем получены уравнения инвариантного погружения для матриц отражения и пропускания поляризованного света вертикально-неоднородными атмосферами и нелинейное интегральное уравнение для матрицы отражения поляризованного света полубесконечной однородной атмосферой. Кратко описана методика численного решения полученных уравнений, использованная при разработке соответствующего комплекса программ для расчетов на ЭВМ. Полученные численные результаты будут представлены во второй части работы.

Уравнение переноса. Уравнение переноса монохроматического поляризованного излучения в анизотропной плоскопараллельной горизонтально-однородной среде имеет следующий вид [10]:

$$\mu \frac{d\vec{I}(z; \mathbf{n})}{dz} = \rho(z) \hat{\Lambda}(z; \mathbf{n}) \vec{I}(z; \mathbf{n}) + \rho(z) \int d\mathbf{n}' \hat{Z}(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{I}(z; \mathbf{n}'). \quad (1)$$

Здесь $\vec{I}(z; \mathbf{n})$ — четырехкомпонентный вектор-столбец Стокса; $\rho(z)$ — число частиц в единице объема; $\hat{\Lambda}(z; \mathbf{n})$ — матрица экстинкции размерности 4×4 ; $\hat{Z}(z; \mathbf{n}, \mathbf{n}')$ — фазовая матрица размерности 4×4 ; $\mathbf{n} = (\mu, \varphi)$ — единичный вектор, описывает направление распространения света; $\mu = \cos \vartheta$; $\int d\mathbf{n} [\dots] = \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi [\dots]$; отсчет величин z, ϑ, φ показан на рисунке. Предполагается, что в элементарном рассеивающем объеме матрица экстинкции и фазовая матрица усреднены по размерам, форме, направлениям пространственной ориентации и показателю преломления аэрозольных час-

тиц. Эффективный метод численного расчета фазовой матрицы и матрицы экстинкции для полидисперсных анизотропных сред описан в [27].

Существенное отличие уравнения (1) от векторного уравнения переноса для изотропных рассеивающих сред заключается в том, что матрица экстинкции $\hat{\Lambda}(z; \mathbf{n})$ в общем случае не представима в виде $\Lambda(z)\hat{E}$, где \hat{E} — единичная матрица размерности 4×4 . Поэтому вместо геометрической глубины z ввести оптическую глубину τ не удастся. Однако уравнение (1) можно упростить, если ввести новую переменную

$$t(z) = \int_0^z \rho(z') dz'. \quad (2)$$

При этом уравнение переноса преобразуется к виду

$$\mu \frac{d\vec{I}(t; \mathbf{n})}{dt} = \hat{\Lambda}(t; \mathbf{n}) \vec{I}(t; \mathbf{n}) + \int dn' \hat{Z}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \vec{I}(t; \mathbf{n}'). \quad (3)$$

В дальнейшем будем рассматривать именно уравнение (3) при стандартных граничных условиях.

Пусть на верхнюю границу среды в направлении $\mathbf{n}_0 = (\mu_0, \varphi_0)$, $\mu_0 > 0$ падает излучение, характеризуемое вектором Стокса $\vec{S} \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция. Представим вектор Стокса $\vec{I}(t; \mathbf{n})$ в виде суммы векторов Стокса когерентного (индекс c) и диффузного (индекс d) излучения:

$$\vec{I}(t; \mathbf{n}) = \vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) + \vec{I}_d(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\mu_0 \frac{d\vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0)}{dt} = \hat{\Lambda}(t; \mathbf{n}_0) \vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0), \quad \vec{I}_c(0; \mathbf{n}_0) = \vec{S}; \quad (5)$$

$$\mu \frac{d\vec{I}_d(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{dt} = \hat{\Lambda}(t; \mathbf{n}) \vec{I}_d(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + \vec{B}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad (6)$$

где четырехкомпонентный столбец (матричная функция источников)

$$\vec{B}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \int dn' \hat{Z}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \vec{I}_d(t; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \hat{Z}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0). \quad (7)$$

Атмосфера конечной толщины. Будем считать, что атмосфера имеет конечную толщину z_0 . Обозначим $t_0 = t(z_0)$ и запишем стандартные граничные условия (индекс d здесь и далее опускаем):

$$\vec{I}(0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \vec{0}, \quad \mu > 0; \quad \vec{I}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \vec{0}, \quad \mu < 0 \quad (8)$$

($\vec{0}$ — нулевой четырехкомпонентный столбец). Пусть матрица $\hat{X}(t; \mathbf{n})$ размерности 4×4 при $\mu \in [-1; +1]$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\hat{X}(t; \mathbf{n})}{dt} = \frac{1}{\mu} \hat{\Lambda}(t; \mathbf{n}) \hat{X}(t; \mathbf{n}), \quad \hat{X}(0; \mathbf{n}) = \hat{E}. \quad (9)$$

Тогда

$$\vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0) = \hat{X}(t; \mathbf{n}_0) \vec{S}; \quad (10)$$

$$\vec{I}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \int_0^t (dt'/\mu) \hat{X}(t; \mathbf{n}) \hat{X}^{-1}(t'; \mathbf{n}) \vec{B}(t'; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad \mu > 0; \quad (11)$$

$$\vec{I}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = - \int_t^{t_0} (dt'/\mu) \hat{X}(t; \mathbf{n}) \hat{X}^{-1}(t'; \mathbf{n}) \vec{B}(t'; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad \mu < 0. \quad (12)$$

Некоммутативность матричного умножения не позволяет в общем случае записать для матрицы $\hat{X}(t; \mathbf{n})$ достаточно простое аналитическое выражение (например, $\exp[\int_0^t dt' \hat{\Lambda}(t'; \mathbf{n})/\mu]$, где

$$\exp \hat{A} = \hat{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}^k/k! \quad (13)$$

— матричная экспонента). Для расчета матрицы $\hat{X}(t; \mathbf{n})$ на ЭВМ можно воспользоваться одним из известных методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [11]. Следует учитывать, что при малых μ задача Коши (9) становится «жесткой» [11].

Однородная атмосфера. В этом случае задача существенно упрощается. Действительно, предполагая, что светорассеивающие характеристики элементарного объема не изменяются с глубиной, получаем

$$\hat{X}(t; \mathbf{n}) = \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n})t/\mu]. \quad (14)$$

При численных расчетах более удобно выражение [2, гл. 11]

$$\hat{X}(t; \mathbf{n}) = \hat{\beta}(\mathbf{n}) \hat{\lambda}(t; \mathbf{n}) \hat{\beta}^{-1}(\mathbf{n}), \quad (15)$$

где (4×4) -матрица

$$\hat{\lambda}(t; \mathbf{n}) = \text{diag} \{ \exp[\lambda_1(\mathbf{n})t/\mu], \dots, \exp[\lambda_4(\mathbf{n})t/\mu] \}; \quad (16)$$

$\hat{\beta}(\mathbf{n})$ — матрица размерности 4×4 , столбцами которой являются векторы $\vec{\beta}_1(\mathbf{n}), \dots, \vec{\beta}_4(\mathbf{n})$; $\lambda_k(\mathbf{n})$ и $\vec{\beta}_k(\mathbf{n})$ — собственные числа и собственные векторы матрицы экстинкции

$$\{ \hat{\Lambda}(\mathbf{n}) - \lambda_k(\mathbf{n}) \hat{E} \} \vec{\beta}_k(\mathbf{n}) = \vec{0}, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (17)$$

Из (11), (12) и (14) получаем

$$\vec{I}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \int_0^t (dt'/\mu) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n})(t-t')/\mu] \vec{B}(t'; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad \mu > 0; \quad (18)$$

$$\vec{I}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = - \int_t^{t_0} (dt'/\mu) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n})(t-t')/\mu] \vec{B}(t'; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad \mu < 0. \quad (19)$$

В дальнейшем понадобятся формулы для вектора Стокса однократно рассеянного излучения, диффузно отраженного и пропущенного тонкой атмосферой. Подставляя в (18) и (19) выражение

$$\vec{B}^1(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \hat{Z}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \vec{I}_c(t; \mathbf{n}_0) = \hat{Z}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0)t/\mu_0] \vec{S}, \quad (20)$$

в котором индексом 1 отмечен вклад первого рассеяния, получаем при $t_0 \ll 1$ (пренебрегаем всеми степенями t_0 выше первой)

$$\vec{I}^1(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \approx \hat{Z}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) t_0 \vec{S}/\mu, \quad \mu > 0; \quad (21)$$

$$\vec{I}^1(0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \approx - \hat{Z}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) t_0 \vec{S}/\mu, \quad \mu < 0. \quad (22)$$

Уравнения инвариантного погружения. В дальнейшем будем считать, что $\mu \geq 0$. Введем следующие обозначения: $\mathbf{n} = (\mu, \varphi)$; $-\mathbf{n} = (-\mu, \varphi)$,

$\int_+ d\mathbf{n} [\dots] = \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi [\dots]$. Определим (4×4) -матрицу отражения поляризованного света произвольной вертикально-неоднородной атмосферой толщиной t_0 соотношением

$$\vec{I}(0; -\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \mu_0 \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \vec{S}. \quad (23)$$

Добавим сверху к исходной атмосфере слой толщиной $\Delta t_0 \ll 1$. Считая добавленный слой практически однородным и настолько тонким, что фотоны рассеиваются в нем не более одного раза (т. е. пренебрегая всеми степенями Δt_0 выше первой), а также принимая во внимание (21), (22) и приближенное равенство $\hat{X}(\Delta t_0; \mathbf{n}) \approx \hat{E} + \hat{\Lambda}(0; \mathbf{n})\Delta t_0/\mu$ (см. (13), (14)), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{dt_0} &= \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \hat{\Lambda}(0; \mathbf{n}_0)/\mu_0 + \hat{\Lambda}(0; -\mathbf{n}) \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)/\mu + \\ &+ \frac{\hat{Z}(0; -\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{\mu\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{Z}(0; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{Z}(0; -\mathbf{n}, -\mathbf{n}') \hat{R}(t_0; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \\ &+ \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \left[\int_{\mp} d\mathbf{n}'' \hat{Z}(0; \mathbf{n}', -\mathbf{n}'') \hat{R}(t_0; \mathbf{n}'', \mathbf{n}_0) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Это уравнение необходимо дополнить начальным условием $\hat{R}(0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \hat{R}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, где $\hat{R}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ — матрица отражения поляризованного света подстилающей поверхностью или лежащими ниже слоями атмосферы. Отметим, что при выводе уравнения (24) атмосфера наращивается новыми слоями в направлении снизу вверх. При этом в уравнение входят матрица экстинкции и фазовая матрица, соответствующие вновь добавляемому бесконечно тонкому слою, т. е. относящиеся к текущему значению $t=0$.

Определяя (4×4) -матрицу пропускания соотношением

$$\vec{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \mu_0 \hat{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \vec{S} \quad (25)$$

и проводя аналогичные выкладки (атмосфера по-прежнему наращивается в направлении снизу вверх), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{dt_0} &= \hat{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \hat{\Lambda}(0; \mathbf{n}_0)/\mu_0 + \frac{\hat{X}(t_0; \mathbf{n}) \hat{Z}(0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{\mu\mu_0} + \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{Z}(0; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \frac{1}{\mu} \hat{X}(t_0; \mathbf{n}) \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{Z}(0; \mathbf{n}, -\mathbf{n}') \times \\ &\times \hat{R}(t_0; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \int_{\mp} d\mathbf{n}' \hat{\Gamma}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \left[\int_{\mp} d\mathbf{n}'' \hat{Z}(0; \mathbf{n}', -\mathbf{n}'') \hat{R}(t_0; \mathbf{n}'', \mathbf{n}_0) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

при начальном условии $\hat{\Gamma}(0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \hat{0}$ ($\hat{0}$ — нулевая матрица размерности 4×4). Уравнения (24) и (26) называются уравнениями инвариантного погружения и являются соответствующими обобщениями соотношений инвариантности в форме Амбарцумяна [1, с. 209].

В частном случае изотропной рассеивающей среды

$$\hat{\Lambda}(t; \mathbf{n}) = -C_{\text{ext}}(\tau) \hat{E}; \quad (27)$$

$$\hat{X}(t; \mathbf{n}) = \exp(-\tau/\mu) \hat{E}, \quad (28)$$

где C_{ext} — сечение экстинкции,

$$\tau(t) = \int_0^t dt' C_{\text{ext}}(t') \quad (29)$$

— оптическая глубина. С учетом выражений (27)—(29) уравнения (24) и (26) упрощаются и приводятся к ранее полученному в [19, 28] виду.

После замены интегралов в правой части уравнения (24) суммами с использованием соответствующих квадратурных формул расчет матрицы отражения сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача относится к классу «жестких»; для ее численного решения можно, например, применить методы, описанные в [11].

Матрица отражения для однородного слоя может быть эффективно рассчитана с помощью описанного ниже специального многошагового метода типа «предсказание — уточнение» (аналогичный метод в скалярном изотропном случае впервые использован в [24]). Представим уравнение (24) в виде

$$\frac{d\hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)}{dt_0} = \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0)/\mu_0 + \hat{\Lambda}(-\mathbf{n}) \hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)/\mu + \hat{F}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0). \quad (30)$$

Считаем, что слой имеет толщину \tilde{t} . Разобьем весь промежуток интегрирования $[0; \tilde{t}]$ на подынтервалы $[0; t_1], \dots, [t_{p-1}; \tilde{t}]$ и обозначим $h_p = t_p - t_{p-1}$. Предположим, что значение $\hat{R}(t_{p-1}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ уже известно. Поскольку вся информация о «жесткости» задачи содержится в первых двух слагаемых правой части уравнения (30), то для нахождения $\hat{R}(t_p; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ воспользуемся формальным решением уравнения (30) в виде

$$\hat{R}(t_p; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \exp[\hat{\Lambda}(-\mathbf{n}) h_p/\mu] \hat{R}(t_{p-1}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0) h_p/\mu_0] + \int_{t_{p-1}}^{t_p} dt \exp[\hat{\Lambda}(-\mathbf{n})(t_p - t)/\mu] \hat{F}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0)(t_p - t)/\mu_0]. \quad (31)$$

Если аппроксимировать $\hat{F}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ полиномом по t степени L

$$\hat{F}(t; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \sum_{l=0}^L \frac{(t - t_{p-1})^l}{l! h_p^l} \hat{f}_l^p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \quad (32)$$

то с учетом (15), (16) интегрирование по t в правой части (31) можно выполнить аналитически и получить уточняющую формулу

$$\hat{R}(t_p; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \exp[\hat{\Lambda}(-\mathbf{n}) h_p/\mu] \hat{R}(t_{p-1}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \exp[\hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0) h_p/\mu_0] + \hat{\Phi}_p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \quad (33)$$

(выражение для $\hat{\Phi}_p$ мы не приводим ввиду его громоздкости).

Матрицы $\hat{f}_l^p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ находятся из последовательных значений $\hat{F}(t_i; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, $i = p, p-1, \dots, p-L$. Поэтому формула (33) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно $\hat{R}(t_p; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, которое решается методом простых итераций. При этом начальное значение (предсказание) для $\hat{R}(t_p; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ можно получить линейной или квадратичной экстраполяцией по уже вычисленным значениям $\hat{R}(t_i; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, $i = p-1, p-2, p-3$. Порядок метода L зависит от номера шага интегрирования. На первом шаге $L=1$, на последующих шагах можно положить $L=2$.

Численно решать уравнение (26) можно теми же методами, что и уравнение (24). При этом матрица отражения $\hat{R}(t_0; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ считается известной. Матрица $\hat{X}(t_0; \mathbf{n})$ находится численно из уравнения (9) в случае вертикально-неоднородной среды и из соотношения (15) в случае однородной среды.

Важное достоинство описанной схемы расчета матриц отражения и пропускания заключается в том, что нет необходимости параллельно

рассчитывать матрицы отражения и пропускания атмосферы при рассмотрении ее «снизу» (как этого требует, например, метод сложения слоев). В случае изотропной рассеивающей среды необходимость таких дополнительных расчетов устраняется путем использования соответствующих соотношений симметрии. В общем случае анизотропной среды записать аналогичные соотношения симметрии не представляется возможным.

Полубесконечная однородная атмосфера. В некоторых случаях при интерпретации наблюдений можно использовать простейшую модель атмосферы в виде однородного полубесконечного слоя. Считая, что фазовая матрица и матрица экстинкции не зависят от t , полагая в (24) $t_0 = \infty$ и приравнявая левую часть этого уравнения нулю, получаем следующее нелинейное интегральное уравнение для матрицы отражения:

$$\begin{aligned} & -\mu \hat{R}(\infty; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \hat{\Lambda}(\mathbf{n}_0) - \mu_0 \hat{\Lambda}(-\mathbf{n}) \hat{R}(\infty; \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \hat{Z}(-\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + \\ & + \mu \int_{+} d\mathbf{n}' \hat{R}(\infty; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{Z}(\mathbf{n}', \mathbf{n}_0) + \mu_0 \int_{+} d\mathbf{n}' \hat{Z}(-\mathbf{n}, -\mathbf{n}') \hat{R}(\infty; \mathbf{n}', \mathbf{n}_0) = \\ & = \mu \mu_0 \int_{+} d\mathbf{n}' \hat{R}(\infty; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \left[\int_{+} d\mathbf{n}'' \hat{Z}(\mathbf{n}', -\mathbf{n}'') \hat{R}(\infty; \mathbf{n}'', \mathbf{n}_0) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

В частном случае изотропной среды это уравнение приводится к хорошо известному уравнению Амбарцумяна, в скалярном случае — полученному в [1, с. 243], в векторном — в [18].

Для численного решения уравнения (34) используется метод последовательных приближений. При отличной от нуля мнимой части показателя преломления частиц итерационный процесс сходится достаточно быстро. При консервативном или почти консервативном рассеянии (частицы с нулевой или малой мнимой частью показателя преломления) для ускорения сходимости итераций требуется учет дополнительных линейных соотношений (аналогов известных соотношений ван де Хюлста — Соболева)

$$\vec{i}(k; -\mathbf{n}) = \int_{+} d\mathbf{n}' \hat{R}(\infty; \mathbf{n}, \mathbf{n}') \vec{i}(k; \mathbf{n}') \mu',$$

где $\vec{i}(k; \mathbf{n})$ — решения характеристического уравнения

$$-\vec{i}(k; \mathbf{n}) [k\mu + \hat{\Lambda}(\mathbf{n})] = \int d\mathbf{n}' \hat{Z}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \vec{i}(k; \mathbf{n}'), \quad \mu \in [-1; +1].$$

В частном случае изотропной среды вопросы, связанные с неединственностью решения уравнения Амбарцумяна и ускорением сходимости итерационного процесса, подробно изучены в [6, 15—17].

Заключение. Использование модели анизотропной рассеивающей среды при интерпретации поляриметрических наблюдений планетных атмосфер, как и других астрофизических объектов (например, облаков межзвездной пыли, пылевых оболочек звезд и др.), является актуальной задачей, вытекающей из практических потребностей астрофизики. В настоящей работе намечены конкретные пути решения этой задачи, основанные на численном решении уравнений (24), (26) и (34) для матриц отражения и пропускания. Накопленный к настоящему времени большой опыт численных расчетов в оптике планетных атмосфер (например, [6, 15, 17, 19, 24]) позволяет полагать, что именно такой способ расчета параметров Стокса отраженного и пропущенного излучения будет наиболее эффективным.

Автор признателен Э. Г. Яновицкому, О. И. Бугаенко, Х. Домке, Н. А. Силантьеву и рецензенту за обсуждение статьи и сделанные замечания.

1. Амбарцумян В. А. Научные труды.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960.— Т. 1.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1976.— 352 с.
3. Бугаенко О. И., Мороженко А. В. Ориентированные частицы в верхних слоях атмосферы Сатурна // Физика планетных атмосфер.— Киев: Наук. думка, 1981.
4. Волковицкий О. А., Павлова Л. Н., Петрушин А. Г. Оптические свойства кристаллических облаков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.— 200 с.
5. Долгинов А. Э., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А. Распространение и поляризация излучения в космической среде.— М.: Наука, 1979.— 424 с.
6. Коновалов Н. В. Асимптотические характеристики полей монохроматической радиации в задачах о неоднородном плоском слое больших оптических размеров. II. Расчет основных параметров и функций.— М., 1974.— 40 с.— (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 14).
7. Мищенко М. И. Интерпретация поляриметрических наблюдений Юпитера.— Киев, 1987.— 24 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-87-22Р).
8. Мищенко М. И. Перенос поляризованного излучения в среде, состоящей из полностью ориентированных сильно вытянутых частиц // Кинематика и физика небес. тел.— 1987.— 3, № 1.— С. 48—56.
9. Нагурнер Д. И. Поляризация излучения в спектральных линиях // Фотометрические и поляриметрические исследования небесных тел.— Киев: Наук. думка, 1985.— С. 118—128.
10. Розенберг Г. В. Вектор-параметр Стокса // Успехи физ. наук.— 1955.— 56, вып. 1.
11. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
12. Asano S., Yamamoto G. Light scattering by a spheroidal particle // Appl. Opt.— 1975.— 14, N 1.— P. 29—49.
13. Barber P., Yeh C. Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies // Ibid.— 14, N 12.— P. 2864—2872.
14. de Haan J. F. Effects of aerosols on the brightness and polarization of cloudless planetary atmospheres.— Amsterdam: Rodopi, 1987.— 219 p.
15. de Rooij W. A. Reflection and transmission of polarized light by planetary atmospheres.— Utrecht: Elinkwijk, 1985.— 241 p.
16. de Rooij W. A., Domke H. On the nonuniqueness of solutions for nonlinear integral equations in radiative transfer theory // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.— 1984.— 31, N 4.— P. 285—299.
17. Dlugach J. M., Yanovitskij E. G. The optical properties of Venus and the Jovian planets. II. Methods and results of calculations of the intensity of radiation diffusely reflected from semi-infinite homogeneous atmospheres // Icarus.— 1974.— 22, N 1.
18. Domke H. Transfer of polarized light in an isotropic medium. Biorthogonality and the solution of transfer problems in semi-infinite media // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.— 1975.— 15, N 7/8.— P. 681—694.
19. Hansen J. E., Travis L. D. Light scattering in planetary atmospheres // Space Sci. Revs.— 1974.— 16, N 4.— P. 527—610.
20. Holt A. R. The scattering of electromagnetic waves by single hydrometeors // Radio Sci.— 1982.— 17, N 5.— P. 929—945.
21. Ishimaru A., Lesselier D., Yeh C. Multiple scattering calculations for nonspherical particles based on the vector radiative transfer theory // Ibid.— 1984.— 19, N 5.— P. 1356—1366.
22. Oguchi T. Scattering from hydrometeors: a survey // Ibid.— 1981.— 16, N 5.— P. 691—730.
23. Santer R., Dollfus A. Optical reflectance polarimetry of Saturn's globe and rings. IV. Aerosols in the upper atmosphere of Saturn // Icarus.— 1981.— 48, N 3.— P. 496.
24. Sato M., Kawabata K., Hansen J. E. A fast invariant imbedding method for multiple scattering calculations and an application to equivalent widths of CO₂ lines on Venus // Astrophys. J.— 1977.— 216, N 3.— P. 947—962.
25. Smith P. H., Tomasko M. G. Photometry and polarimetry of Jupiter at large phase angles. II. Polarimetry of the South Tropical Zone, South Equatorial Belt, and the polar regions from the Pioneer 10 and 11 missions // Icarus.— 1984.— 58, N 1.
26. Tomasko M. G., Karkoschka E., Matrinek S. Observations of the limb darkening of Jupiter at ultraviolet wavelengths and constraints on the parameters and distribution of stratospheric aerosols // Ibid.— 1986.— 65, N 2/3.— P. 218—243.
27. Tsang L., Kong J. A., Shin R. T. Radiative transfer theory for active remote sensing of a layer of nonspherical particles // Radio Sci.— 1984.— 19, N 2.— P. 629—642.
28. Ueno S., Mukai S., Wang A. P. Invariant imbedding and Chandrasekhar's planetary problem of polarized light // Planets, stars and nebulae studied with photopolarimetry.— Tucson: Arizona Univ. press, 1974.— P. 582—592.
29. Waterman P. C. Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering // Phys. Rev.— 1971.— 3D, N 4.— P. 825—839.
30. West R. A., Lane A. L., Hart H. et al. Voyager 2 photopolarimeter observations of Titan // J. Geophys. Res.— 1983.— 88, N A11.— P. 8699—8708.
31. West R. A., Strobel D. F., Tomasko M. G. Clouds, aerosols, and photochemistry in the Jovian atmosphere // Icarus.— 1986.— 65, N 2/3.— P. 161—217.