УДК 524.3—64+524.3—85

К расчету поля излучения в сферической оболочке звезды

Ю. В. Александров

Методом В. В. Соболева получено в квадратурах приближенное решение уравнения переноса излучения в пылевой оболочке звезды со степенным законом распределения плотности.

ON THE CALCULATION OF THE RADIATION FIELD IN THE SPHERICAL STELLAR ENVELOPE, by Alexandrov Yu. V.— The approximate solution of transfer of radiation equation in the stellar envelope with a power law density distribution was obtained by Sobolev's method.

С развитием наблюдательных методов ИК-астрономии быстро увеличивается объем информации о пылевых оболочках звезд, изучение которых имеет несомненное космогоническое значение. Температурный режим в оболочке определяется, прежде всего, ее взаимодействием с излучением звезды. Для расчета поля излучения в звездной оболочке используются различные численные методы — обобщенный метод Эддингтона, трехпотоковое приближение, методы моментов и Монте-Карло (см. обзор [4]). Приведем приближенное решение этой задачи в квадратурах методом В. В. Соболева [2].

Рассмотрим сферически-симметричную оболочку с внутренним радиусом r_0, оптической толщиной τ_0, плотность в которой убывает по степенному закону с показателем n. Оптические свойства повсюду одинаковы, задаются вероятностью выживания кванта λ и индикатрисой рассеяния $\chi(\gamma)$. Коэффициент ослабления в соответствии с изложенным можно представить в виде $\alpha=(n-1)\tau_0 r_0^{n-1}/r^n$. Метод Соболева, как известно, состоит в том, что рассеяния высших порядков описываются приближенно индикатрисой $1+x_1\cos\gamma$, а рассеяние первого порядка точной индикатрисой $\chi(\gamma)$. Этот метод можно сочетать с соотношениями подобия [3]. С помощью таких соотношений сильно вытянутая индикатриса рассеяния заменяется линейной комбинацией индикатрисы, для которой решение может быть получено, и δ-функции. Так можно найти решение задачи для модели, достаточно хорошо описывающей реальную ситуацию.

Далее будем следовать работам [2] (решена задача для однородной оболочки) и [1] (решается задача о переносе излучения в сферической кометной атмосфере со степенным распределением плотности). Если ввести оптическую глубину $\tau=\tau_0(r_0/r)^{n-1}$ и перейти в уравнении переноса излучения от переменной r к переменной τ, то это уравнение принимает следующий вид:

$$\cos\theta\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\tau}+\frac{\sin\theta}{(n-1)\tau}\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\theta}=\mathcal{I}-S, \tag{1}$$

где $\mathcal{I}$ — интенсивность в направлении, образующем с радиусом угол θ, а функция источников

$$S=\lambda\left[J+x_1H\cos\theta+A(\tau/\tau_0)^{2/(n-1)}(1+x_1\cos\theta)\,e^{-(\tau_0-\tau)}\right]+(1-\lambda)B[T(\tau)]; \tag{2}$$

J — средняя по направлениям интенсивность; H — поток излучения; $A=E_0/(4\pi)$; E_0 — освещенность внутренней границы оболочки звездой; $B(T(\tau))$ — функция Планка, описывающая тепловое излучение оболочки при температуре $T(\tau)$. Умножая последовательно уравнение (1) на $\sin\theta\, d\theta$ и на $\cos\theta\,\sin\theta\, d\theta$ и интегрируя по полному телесному углу, получаем

$$\frac{\partial H}{d\tau}-\frac{2H}{(n-1)\tau}=(1-\lambda)(J-B)-\lambda A(\tau/\tau_0)^{2/(n-1)}e^{-(\tau_0-\tau)}; \tag{3}$$

$$\frac{dJ}{d\tau}=(3-\lambda x_1)H-\lambda x_1 A(\tau/\tau_0)^{2/(n-1)}e^{-(\tau_0-\tau)}. \tag{4}$$

Исключая поток H из соотношений (3) и (4), получаем дифференциальное уравнение для $J(\tau)$:

$$\frac{\partial^2 J}{d\tau^2}-\frac{2}{(n-1)\tau}\frac{dJ}{d\tau}-k^2J=D\tau^{2/(n-1)}e^{\tau}-k^2B(\tau), \tag{5}$$

где показатель диффузии квантов $k=\sqrt{(3-\lambda x_1)(1-\lambda)}$, а

$$D=-\lambda A\,[3+(1-\lambda)\,x_1]\,\tau_0^{-2/(n-1)}e^{-\tau_0}. \quad (6)$$

Общее решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$J=\tau^{\mu}\,[CI_{\mu}(k\tau)+C_1K_{\mu}(k\tau)], \quad (7)$$

где I_μ и K_μ — модифицированные функции Бесселя, а $\mu=0.5\,(n+1)/(n-1)$. Для определения постоянных C и C_1 имеем граничные условия $J=2H|_{\tau=0}$; $H|_{\tau=\tau_0}=0$. Первое условие дает $C_1=0$. Тогда, учитывая, что вронскиан функций $I_\mu(x)$ и $K_\mu(x)$ равен $1/x$, решение неоднородного уравнения (5) записываем следующим образом:

$$J(\tau)=\tau^{\mu}\left\{CI_{\mu}(k\tau)-D\left[I_{\mu}(k\tau)\int\limits_{\tau}^{\tau_0}\tau'^{\mu}K_{\mu}(k\tau')\,e^{\tau'}d\tau'+K_{\mu}(k\tau)\int\limits_{0}^{\tau}\tau'^{\mu}I_{\mu}(k\tau')e^{\tau'}d\tau'\right]\right\}. \quad (8)$$

Здесь и далее предполагается, что диапазоны, в которых сосредоточены излучение звезды и собственное излучение оболочки, практически не перекрываются, и собственным излучением можно пренебречь.

Из второго граничного условия находим, что

$$C=\left[kDK_{\mu-1}(k\tau_0)\int\limits_{0}^{\tau_0}\tau'^{\mu}I_{\mu}(k\tau')\,e^{\tau'}d\tau'-\lambda A\tau_0'^{-\mu}\right]/[kI_{\mu-1}(k\tau_0)]. \quad (9)$$

Если $n=2$, то $\mu=3/2$, и функции $I_{3/2}$ и $K_{3/2}$ выражаются через экспоненту и гиперболические функции, а интегралы в (8) могут быть найдены в конечном виде. В этом случае

$$J(\tau)=C\left(\tau\,\mathrm{ch}\,k\tau-\frac{\mathrm{sh}\,k\tau}{k}\right)+\frac{D}{1-k^2}\left\{\frac{2}{1-k^2}\,[\tau\,(e^{\tau}-k\,\mathrm{sh}\,k\tau)+\mathrm{ch}\,k\tau-e^{\tau}]-\tau^2e^{\tau}\right\}; \quad (10)$$

$$C=\left\{\frac{\tau_0D}{1-k^2}\left[(2+\tau_0)\,e^{\tau_0}-\frac{2}{1-k^2}\,(e^{\tau_0}-k^2\,\mathrm{ch}\,k\tau_0)\right]-\lambda Ax_1\right\}/(k\tau_0\,\mathrm{sh}\,k\tau_0).$$

Интегрируемыми являются также следующие случаи: $n=0$, $\mu=-1/2$ (однородная оболочка) [2]; $n=1/2$, $\mu=-3/2$; $n=\infty$, $\mu=1/2$. В последнем случае, описывающем геометрически тонкую оболочку, получим, что

$$J(\tau)=\frac{De^{\tau_0}-\lambda Ax_1(1-k^2)}{(1-k^2)\,\mathrm{ch}\,k\tau_0}\,\frac{\mathrm{sh}\,k\tau}{k}+\frac{D}{1-k^2}\,(1-e^{\tau}). \quad (11)$$

В силу линейности уравнения (5) и соответствующих уравнений в [1] можно суммировать их решения, и тем самым получить решение для оболочки, которая освещается не только своей центральной звездой, но и внешним плоскопараллельным потоком излучения. Например, другим компонентом звездной пары.

Распределение яркости $\mathcal{J}(\rho)\cdot 10^4$ по диску пылевой оболочки

ρ/r_0	τ_1/τ_0	τ_0 = 0.5, λ = 0.8	0.5, 0.9	0.5, 1.0	1, 0.8	1, 0.9	1, 1.0	3, 0.8	3, 0.9	3, 1.0
0	—	127	143	160	170	193	217	128	162	209
1	1	238	266	293	263	295	333	131	166	217
1.25	0.8	130	155	161	154	174	198	98	127	169
1.67	0.6	58	65	72	73	83	95	60	80	108
2.5	0.4	18	20	23	24	27	31	25	34	46
5.0	0.2	2	2	3	3	3	4	4	5	7

Соотношения (2), (4), (8) и (9) или (10) позволяют найти функцию источников $S(\tau, \theta)$. Интенсивность излучения, выходящего из оболочки вдоль линии визирования, определяемой расстоянием ρ от центра, будет теперь выражаться формулой (при $\rho \geqslant r_0$)

$$\mathcal{I}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau(\rho, s), \theta(\rho, s))\, e^{-T(\rho, s)} \alpha(\rho, s)\, ds, \tag{12}$$

где $s = \rho \operatorname{ctg} \theta$ и $r = \rho \operatorname{cosec} \theta$. Учитывая это и связь величин α и τ с радиусом r, а также выражение для оптического пути $T(\rho, s)$ от точки (ρ, s) до выхода из оболочки (см. [1]), получаем, что

$$\mathcal{I}(\tau_1) = (n-1)\,\tau_1 \int_0^{\pi} S(\tau_1 \sin^{n-1}\theta, \theta) \exp[-\tau_1 \sin^{n-1}\theta F_n(\theta)] \sin^{n-2}\theta d\theta, \tag{13}$$

где $\tau_1 = \tau_0/\rho^{n-1}$ — наибольшая оптическая глубина на линии визирования. Выражения для функций $F_n(\theta)$ найдены в [1].

В заключение приведены (таблица) распределения яркости по диску пылевой оболочки для ряда значений τ_0 и λ при $x_1 = 1$ в случае обратно квадратичного распределения плотности ($n = 2$) в единицах E_0.

1. *Александров Ю. В.* Перенос излучения в сферической кометной атмосфере // Кинематика и физика небес. тел.— 1988.—4, № 2.— С. 3—9.
2. *Соболев В. В.* О свечении сферической туманности // Астрон. журн.— 1960.—37, вып. 1— С. 3—8.
3. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет.— М. : Наука, 1972.—335 с.
4. *Yorke H. W.* Radiative processes in protostellar envelopes and their numerical simulation / Naissance et enfance etoiles: Les Houches Ec. été phys. thèor. sess. 41, 8 août.— 2 sept., 1983.— Amsterdam etc., 1985.— P. 645—692.

Астрон. обсерватория
Харьков. ун-та им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 18.01.88,
после доработки 07.04.88