КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 4 № 5 1988

УДК 523.34

Метод хорд в задаче объединения селенодезических каталогов

Р. А. Кащеев

Предложен новый метод совместного уравнивания селенодезических каталогов, заключающийся в построении жесткой пространственной фигуры из лунных хорд, параметры которых можно вычислить по каталожным данным.

THE METHOD OF CHORDS IN THE SELENODETIC CATALOGUES UNIFICATION PROBLEM, by Kashcheev R. A.— A new method of incorporate adjustment of all kinds of the lunar points' position catalogues is suggested. The solution consists in construction of three-dimensional solid polyhedrons where the chords have been calculated by different earth-ground and space selenodetic catalogue data.

Введение. Один из способов повышения точности установления системы координат на Луне и определения положения опорных точек лунной поверхности — построение сводного каталога на основе совместной обработки независимых селенодезических каталогов, полученных по наблюдениям с Земли и с орбиты ИСЛ. Рассмотрим один из возможных подходов к решению данной задачи. Для этого воспользуемся методом «искусственных измерений», широко применяемым в космической геодезии для объединения разнородных наблюдательных данных при уравнивании обширных пространственных сетей [1].

Уравнения поправок «искусственных измерений». Рассмотрим на поверхности Луны две точки i и j, прямоугольные координаты которых ξ_i, η_i, ζ_i и ξ_j, η_j, ζ_j известны в системе некоторого s-го селенодезического каталога. Длину хорды — отрезка прямой, стягивающего эти точки,— обозначим D_{ij}, а углы, характеризующие ориентацию ее относительно задаваемых каталогом плоскостей экватора и нулевого меридиана,— соответственно Φ_{ij} и Λ_{ij}. Тогда

$$D_{ij} = \sqrt{\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2 + \Delta\zeta^2}; \qquad (1)$$

$$\Phi_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\Delta\eta/\sqrt{\Delta\xi^2 + \Delta\zeta^2}\right); \qquad (2)$$

$$\Lambda_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\Delta\xi/\Delta\zeta\right), \qquad (3)$$

где $\Delta\xi = \xi_i - \xi_j$; $\Delta\eta = \eta_i - \eta_j$; $\Delta\zeta = \zeta_i - \zeta_j$.

Вычисленные по координатам из s-го каталога расстояние D_{ij} и углы Φ_{ij}, Λ_{ij} в соответствии с методом «искусственных измерений» далее будем рассматривать как измеренные значения. Запишем для каждого вида «измерений» уравнения поправок, линеаризуя соотношения (1) — (3) относительно неизвестных поправок координат точек i и j: с весом p_D —

$$\frac{\Delta\xi}{D_{ij}}(d\xi_i - d\xi_j) + \frac{\Delta\eta}{D_{ij}}(d\eta_i - d\eta_j) + \frac{\Delta\zeta}{D_{ij}}(d\zeta_i - d\zeta_j) + (D^0_{ij} - D_{ij}) = v_D; \qquad (4)$$

с весом p_Φ —

$$-\frac{\sin\Phi_{ij}\sin\Lambda_{ij}}{D_{ij}}(d\xi_i - d\xi_j) - \frac{\sin\Phi_{ij}\cos\Lambda_{ij}}{D_{ij}}(d\zeta_i - d\zeta_j) +$$

$$+\frac{\cos\Phi_{ij}}{D_{ij}}(d\eta_i-d\eta_j)+(\Phi^0_{ij}-\Phi_{ij})=v_\Phi; \qquad (5)$$

с весом p_Λ —

$$\frac{\cos\Lambda_{ij}(d\xi_i-d\xi_j)-\sin\Lambda_{ij}(d\zeta_i-d\zeta_j)}{D_{ij}\cos\Phi_{ij}}+(\Lambda^0_{ij}-\Lambda_{ij})=v_\Lambda. \qquad (6)$$

Линеаризация проводится в окрестности некоторого приближенно известного решения (каталога), по которому вычисляются коэффициенты уравнений поправок (4) — (6) и входящие в свободные члены величины D^0_{ij}, Φ^0_{ij}, Λ^0_{ij}. Веса «измерений» вычислим по формулам

$$p_D=\frac{\mu^2}{m^2(D)}; \quad p_\Phi=\frac{\mu^2}{m^2(\Phi)}; \quad p_\Lambda=\frac{\mu^2}{m^2(\Lambda)}, \qquad (7)$$

в каждом случае μ — ошибка единицы веса.

Из соотношений (1) — (3) получим формулы для вычисления ошибок $m^2(D)$, $m^2(\Phi)$, $m^2(\Lambda)$ по заданным каталожным ошибкам координат точек. Предполагая координаты ξ_i, η_i, ζ_i каждой рассматриваемой i-й точки независимыми, получаем для средних квадратичных ошибок «измерений»:

$$m^2(D)=\frac{1}{D_{ij}}\{\Delta\xi^2[m^2(\xi_i)+m^2(\xi_j)]+\Delta\eta^2[m^2(\eta_i)+m^2(\eta_j)]+$$
$$+\Delta\zeta^2[m^2(\zeta_i)+m^2(\zeta_j)]\}; \qquad (8)$$

$$m^2(\Phi)=\frac{\Delta\xi^2+\Delta\zeta^2}{D^4_{ij}}[m^2(\eta_i)+m^2(\eta_j)]+$$
$$+\frac{\Delta\eta^2}{D^4_{ij}(\Delta\xi^2+\Delta\zeta^2)}\{\Delta\xi^2[m^2(\xi_i)+m^2(\xi_j)]+\Delta\zeta^2[m^2(\zeta_i)+m^2(\zeta_j)]\}; \qquad (9)$$

$$m^2(\Lambda)\cos^2\Phi_{ij}=\frac{\Delta\xi^2[m^2(\zeta_i)+m^2(\zeta_j)]+\Delta\zeta^2[m^2(\xi_i)+m^2(\xi_j)]}{D^2_{ij}(\Delta\xi^2+\Delta\zeta^2)}. \qquad (10)$$

Здесь $m(\xi_i)$, $m(\eta_i)$, $m(\zeta_i)$ и $m(\xi_j)$, $m(\eta_j)$, $m(\zeta_j)$ — ошибки координат точек i и j соответственно.

Выбор вида «измерений». Сформулируем задачу: на основе совместного уравнивания данных S каталогов, имеющихся в нашем распоряжении, построить новый, сводный каталог положений точек лунной поверхности. Один из каталогов (обозначим его нулевым индексом) выберем в качестве уточняемого, остальные — обеспечивающих новую «измерительную» информацию, которая улучшает первоначальные сведения.

Рассмотрим в качестве «измерений» только длины лунных хорд (1), стягивающих точки поверхности Луны. Вычисленные для конкретной пары точек i и j по различным каталогам величины D_{ij} инвариантны к несовпадению центров и различиям в ориентации базисных осей каталожных координатных систем. Тем самым за счет выбора вида «измерений» исключается влияние несовпадения центров и рассогласования координатных осей, что устраняет основное препятствие совместного уравнивания различных селенодезических каталогов. Взаимными деформациями сетей в рамках данной работы можно пренебречь.

Оценивание искомых параметров. В матричной форме запишем систему условных уравнений вида (4) для сети из K хорд, стягивающих N точек с уточняемыми (по S имеющимся каталогам) координатами:

$$\mathbf{AX}+\mathbf{L}_D=\mathbf{v}_D, \qquad (11)$$

где $\mathbf{X}$ — $3N$-мерный вектор-столбец искомых поправок координат точек; $K = \sum_{s=1}^{S} K_s$ — число условных уравнений системы (11); K_s — число «измеренных» длин хорд, вычисленных по данным s-го каталога; $\mathbf{L}_D$ — K-мерный вектор-столбец свободных членов; $\mathbf{A}$ — $(K\times 3N)$-мерная матрица, вычисляемая по приближенным координатам точек уточняемого каталога; $\mathbf{v}_D$ — K-мерный вектор-столбец поправок в «измеренные» длины хорд.

Поскольку «измеренные» длины хорд, пересекающихся в одной точке, нельзя считать независимыми, то при решении системы (11) необходимо использовать метод наименьших квадратов для зависимых величин, в котором оценка $\mathbf{X}'$ вектора неизвестных определяется из

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{L}_D, \tag{12}$$

где $\mathbf{Q}$ — корреляционная матрица ошибок «измерений» размерности $(K\times K)$. Полагая каталоги независимыми между собой, получаем следующую диагонально-блочную структуру матрицы:

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}\,[\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_S]. \tag{13}$$

Диагональные блоки этой матрицы $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_S$ — суть корреляционные матрицы ошибок «измерений» каждого из S каталогов.

Рассмотрим некоторую s-ю матрицу этого ряда ($s=1, 2, \ldots, S$). Размерность ее $(K_s\times K_s)$, диагональные элементы равны $1/p_D(k)$, где $p_D(k)$ — вес соответствующей «измеренной» длины k-й хорды. Недиагональный элемент q_{kl} матрицы $\mathbf{Q}_s$ определяется из следующих соображений. Если k- и l-е хорды не имеют общей вершины, то $q_{kl}=0$. В противном случае координаты общей вершины используются при вычислении длины обеих хорд, что вызывает корреляцию этих «измерений». Тогда

$$q_{kl} = r^D_{kl}\,[p_D(k)\,p_D(l)]^{-1/2}, \tag{14}$$

где r^D_{kl} — коэффициент корреляции длин k- и l-й хорд, имеющих общую вершину; $p_D(k)$, $p_D(l)$ — веса «измерений».

Формулу для вычисления коэффициента корреляции $r^D{}_{kl}$ запишем в следующем виде:

$$r^D_{kl} = [D_k D_l \sqrt{m^2(D_k)\,m^2(D_l)}\,]^{-1}\times$$
$$\times\,[\Delta\zeta_k\Delta\zeta_l m^2(\zeta) + \Delta\xi_k\Delta\xi_l m^2(\xi) + \Delta\eta_k\Delta\eta_l m^2(\eta)], \tag{15}$$

где $\Delta\xi_k$, $\Delta\eta_k$, $\Delta\zeta_k$ — разности координат точек k-й хорды; $\Delta\xi_l$, $\Delta\eta_l$, $\Delta\zeta_l$ — разности координат точек l-й хорды; $m(D_k)$, $m(D_l)$ — вычисляемые по формуле (8) ошибки «измерения» длин хорд; $m(\xi)$, $m(\eta)$, $m(\zeta)$ — задаваемые каталогом ошибки координат точки, являющейся общей вершиной для k- и l-й хорд.

Оценка точности результатов. Точность решения характеризуется матрицей $\mu^2\mathbf{N}^{-1}$, в которой μ — ошибка единицы веса, определяемая из выражения

$$\mu^2 = \mathbf{v}_D^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}_D/R \tag{16}$$

(R — число избыточных «измерений» в сети), а $\mathbf{N}^{-1}$ — обратная матрица нормальных уравнений.

Ошибка положения конкретного i-го пункта может характеризоваться величиной

$$m^2(i) = \mu^2 Sp\mathbf{W}_i = \mu^2(\mathrm{w}_{\xi\xi} + \mathrm{w}_{\eta\eta} + \mathrm{w}_{\zeta\zeta}), \tag{17}$$

где $\mathbf{W}_i$ — диагональная подматрица матрицы $\mathbf{N}^{-1}$, соответствующая вектору неизвестных поправок в координаты i-го пункта; $\mathrm{w}_{\xi\xi}$, $\mathrm{w}_{\eta\eta}$, $\mathrm{w}_{\zeta\zeta}$ — ее диагональные элементы.

Значения ошибок координат пункта по осям ξ, η, ζ определяются по формулам

$$m^2(\xi_i) = \mu^2 w_{\xi\xi};\ m^2(\eta_i) = \mu^2 w_{\eta\eta};\ m^2(\zeta_i) = \mu^2 w_{\zeta\zeta}. \tag{18}$$

Таким образом, в результате совместного уравнивания совокупности разных каталогов получаем новый сводный каталог опорных точек на поверхности Луны, реализующий новую лунную систему координат.

1. *Бойко Е. Г., Кленицкий Б. М., Ландис И. М., Устинов Г. А.* Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей.— М. : Недра, 1977.— 376 с.

Казан. ун-т
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию 25.05.87,
после доработки 22.01.88

РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 528.2:523.3/4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗЕМЛИ, ЛУНЫ И ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ. I. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ / Каменский К. К., Кислюк В. С., Яцкив Я. С.

(Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-88-86Р)

Обсуждаются некоторые аспекты методологии планетодинамики. Рассмотрены системы координат, применяемые в планетной динамике, дана классификация фигур планет. Обобщены современные значения параметров топографических и гравитационных фигур Земли, Луны и планет земной группы, рассмотрены некоторые особенности геометрических и динамических характеристик небесных тел.