

УДК 523.34

Представление лунной топографии рядом сферических функций до 16-го порядка

И. М. Зазуляк, В. Е. Зингер, В. С. Кислюк

По наиболее полному составу гипсометрических данных выполнено разложение высот точек лунной поверхности в ряд по сферическим функциям до 16-го порядка и степени. Методом средней квадратичной коллокации сделан прогноз высот для регионов Луны, не обеспеченных данными наблюдений. Высоты близполюсных трапеций найдены по модели Билса и Феррари [13]. Фигура физической поверхности Луны представлена трехосным эллипсоидом. По данным модели (16×16) построена гипсометрическая карта Луны.

REPRESENTATION OF LUNAR TOPOGRAPHY BY SERIES OF SPHERICAL HARMONICS TO DEGREE 16, by Zazulyak P. M., Zinger V. E., Kislyuk V. S.— Using the existing hypsometric data the expansion of the lunar surface's heights into the series of spherical functions to degree and order 16 has been made. The method of mean quadratic collocation has been applied for the prognosis of heights of the regions of the Moon which have no observational data. The heights of near-polar trapezia have been found using the model [13]. The figure of physical surface of the Moon is presented with tri-axial ellipsoid. The hypsometric map of the Moon has been compiled.

В настоящее время для математического представления топографии Луны широко применяется разложение высот в ряд по сферическим функциям [2, 4, 12, 13]. Наиболее основательные исследования в этом направлении выполнили Билс и Феррари [13], которые для разложения лунного рельефа в ряд по сферическим функциям до 12-го порядка и степени использовали обширный объем топографических данных. Однако эти исследования нельзя считать исчерпывающими, так как использованный состав гипсометрических данных далеко не полный. Кроме того, из-за отсутствия высотных характеристик на обширные области (особенно на обратной стороне Луны), а также из-за неравноточности исходных данных при разложении в ряд по сферическим функциям приходится в той или иной мере прибегать к различным предположениям и гипотезам.

В нашей работе выполнено разложение высот лунной поверхности в ряд по шаровым функциям с максимально возможным использованием исходной информации. При этом для получения высот в регионах Луны, для которых нет данных наблюдений, использован метод средней квадратичной коллокации.

Для математического представления лунного рельефа привлечены данные, полученные с помощью наземных и космических средств. Их основные характеристики представлены в табл. 1 (здесь же приведены m_n — средние квадратичные ошибки высот). По сравнению с работой [13] данные табл. 1 отличаются тем, что здесь дополнительно использованы следующие материалы: сводный селеноцентрический каталог «Киев-4900» [3]; фотограмметрическая сеть, построенная по снимкам с КК «Аполлон-16» [16]; данные радиопрофилирования с КА «Луна-22» [11], а также профили Луны, построенные по снимкам с КА «Зонд-8» [9] и КК «Аполлон-11» [6]; кроме того, краевая зона представлена каталогом высот 960 точек [5], который построен в системе селеноцентрического каталога [1].

Абсолютные высоты точек лунной поверхности отсчитаны от стандартной сферы радиусом 1738.0 км. Веса назначались пропорционально дисперсиям высот в том или ином источнике. Все источники, перечисленные в табл. 1, содержат высоты, отсчитанные от центра масс Луны. Некоторое исключение составляет каталог [7], полученный из совместной обработки снимков с КА «Зонд-6» и «Зонд-8». Этот каталог содержит трехмерные координаты 68 точек восточного сектора обратной стороны Луны. В качестве опорного использовался каталог «Киев-2580» [1], система которого практически не отличается от системы селеноцентрического каталога «Киев-4900» [3]. Все же, учитывая, что область 68 точек расположена далеко за пределами исходной опорной сети, возможны деформации системы при распространении ее на обратное полушарие. Абсолютизация данных каталога [7] выполнена с помощью альтиметрических профилей, полученных с КК «Аполлон-15, -16, -17», которые пересекают область. Для абсолютизации высот точек каталога [7] вводились поправки (в километрах)

$$\Delta h = (1.54 \pm 0.21) + (2.65 \pm 0.23) X, \quad (1)$$

где X — координата, направленная к Земле.

Высоты точек лунной поверхности относительно сферы радиуса R_0 представлены в виде

$$h(\varphi, \lambda) = R_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (2)$$

где φ, λ — селенографические координаты точек лунной поверхности; $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ — нормированные гармонические коэффициенты; P_{nm} — нормированные присоединенные функции Лежандра.

Решение уравнений (2), составленных для n точек, методом наименьших квадратов дает $(N+1)^2 - 1$ коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$, где N — порядок усечения ряда (2).

Введем обозначения

$$\omega_k = h(\varphi_k, \lambda_k), \quad b_{ki} = R_0 P_{nm}(\sin \varphi_k) \cos m\lambda_k, \quad (3)$$

$$b'_{ki} = R_0 P_{nm}(\sin \varphi_k) \sin m\lambda_k, \quad v_i = [\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}],$$

где индекс i определяется порядком коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} .

Таблица 1. Краткая характеристика данных об абсолютных высотах на лунной поверхности

Номер п/п	Исходные данные	Число точек	m_h , км
1	Селенодезическая сеть [3]	2390	0.5—1.5
2	Фотограмметрия «Аполлон-15» [18]	330	0.4
3	Фотограмметрия «Аполлон-16» [16]	71	0.3—1.8
4	ЛА «Аполлон-15, -16, -17» [20]	550*	0.4
5	То же лунных морей [21]	332	0.4
6	Радиопрофилирование [11]	800*	0.4
7	Слежение с «Аполлон» [22]	31	0.4
8	Падение «Рейнджер» [19]	4	0.4
9	ЛЛЛ и РСДБ [14, 15]	7	0.4
10	Уточненные высоты [8]	78	0.5—0.7
11	Сеть «Зонд-6», «Зонд-8» [7]	68	0.4—1.3
12	Профиль по «Зонд-8» [9]	260*	0.8
13	Профиль по «Аполлон-11» [6]	85*	0.8
14	Краевая зона [5]	960	0.8

Примечание. ЛА — лазерная альтиметрия; ЛЛЛ — лазерная локация Луны; РСДБ — радионтерферометрия со сверхдлинной базой. Звездочкой отмечены измерения вдоль профиля.

С принятыми обозначениями система нормальных уравнений запишется в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{BV}, \quad (4)$$

а из ее решения получим вектор \mathbf{V} неизвестных коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm}

$$\mathbf{V} = (\mathbf{B}^T \mathbf{PB})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{PW}. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{P} — ковариационная матрица исходных величин h_k , которая обычно полагается диагональной [13]:

$$\mathbf{P} = [m_{h_1}^{-2}, m_{h_2}^{-2}, \dots, m_{h_n}^{-2}]. \quad (6)$$

Для математического представления рельефа поверхность Луны разделена меридианами и параллелями на 2522 ($5 \times 5^\circ$) трапеции (включая два полярных шаровых сегмента). Начало отсчета селенографических широт и долгот находится в центре одной из трапеций. По данным табл. 1 вычислены средневзвешенные значения h_k высот, отнесенные к центрам трапеций. Данными табл. 1 обеспечены 1268 трапеций (около 50.3 % лунной поверхности). Оценки высот 1136 трапеций (около 45 % лунной поверхности) получены методом средней квадратичной коллокации [10]. Для остальных 118 трапеций в близполярных районах на обратной стороне Луны высоты вычислены по модели Билса и Феррари [13].

Применение метода средней квадратичной коллокации для заполнения «пустых» мест на Луне правомочно, если исследуемое поле является реализацией некоторого случайного процесса. По-видимому, в определенном приближении можно говорить о случайном характере глобального поля рельефа Луны, являющегося результатом и отражением комплексной истории развития экзогенных и эндогенных процессов, формирующих и видоизменяющих лунную поверхность. Таким образом, поле рельефа Луны можно рассматривать как случайный процесс, но не относительно времени, как традиционно делается в теории вероятности и математической статистике, а относительно пространства. Другими словами, предполагается, что вариации топографии статистически однородны и изотропны.

В методе коллокации основную роль играют ковариационные функции, характеризующие определенные статистические свойства исследуемого поля. Для проверки гипотезы однородности поля рельефа Луны выполнено разделение его на регионы, стационарные по дисперсии, с применением алгоритма скользящей дисперсии. По вариациям дисперсий можно количественно судить об изменении статистических свойств поля от региона к региону. Для анализа использовались средние высоты для 1268 трапеций, обеспеченных гипсометрическими данными.

С помощью алгоритма скользящей дисперсии для каждой трапеции находились дисперсии топографии $D(h)$. Дальнейшее районирование выполнялось с помощью критерия Фишера, что позволило выделить четыре стационарных по дисперсии региона (км^2): 1) $D(h) > 6.8$; 2) $6.8 \geq D(h) > 2.0$; 3) $2.0 \geq D(h) > 0.5$; 4) $D(h) < 0.5$. Каждый из них имеет сложную мозаичную структуру, а первый, кроме того, состоит из двух отдельных блоков. Для каждого региона, стационарного по дисперсии, а также для всей Луны найдены соответствующие эмпирические ковариационные функции (ЭКФ) по формуле

$$C(\psi) = \left[\sum_{k=1}^n (h_i h_j \cos \varphi_i \cos \varphi_j)_h \right] / \left[\sum_{k=1}^n (\cos \varphi_i \cos \varphi_j)_h \right], \quad (7)$$

где n — общее количество попарных произведений; ψ — сферическое

расстояние между точками i и j , вычисляемое по формуле

$$\cos \psi_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j). \quad (8)$$

В выражении (7) величины $\cos \varphi_i$ и $\cos \varphi_j$ выступают в качестве весов для каждого участка, которые пропорциональны площади участка.

На практике, как правило, значение ковариации вычисляется не для конкретного расстояния ψ , а для некоторого интервала $[\psi_0, \psi_0 + \Delta\psi]$.

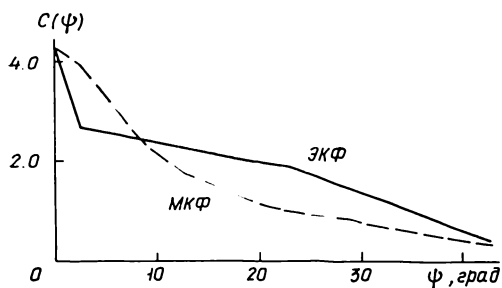
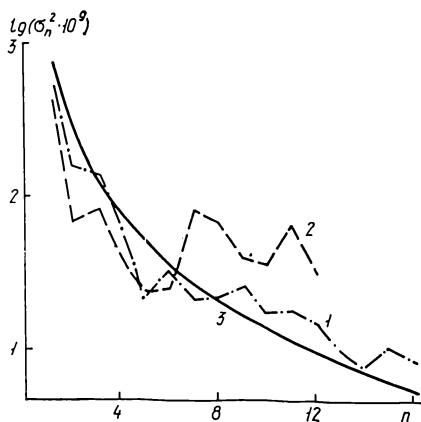


Рис. 1. Глобальная ковариационная функция рельефа Луны: ЭКФ — эмпирическая ковариационная функция (7); МКФ — модельная ковариационная функция (9)

Рис. 2. Порядковые дисперсии лунной топографии по данным: 1 — модели (16×16); 2 — модели Билса и Феррари [13]; 3 — эмпирической модели [17]



Поскольку в качестве исходной информации использовались значения высот, отнесенные к центрам ($5 \times 5^\circ$) трапеций, то $\Delta\psi$ принято равным 5° .

ЭКФ построены для каждого региона, стационарного по дисперсии, и, кроме того, ввиду сложной конфигурации регионов, отдельно для двух самых больших блоков, из которых состоит первый регион. При нахождении ковариаций из высот h_k каждой трапеции исключался «тренд», за который принимались средние арифметические значения высот для региона, стационарного по дисперсии. В качестве тренда для вывода глобальной ЭКФ принималось $h_{ср} = -0.71$ км. Глобальная ЭКФ показана на рис. 1.

Анализ ЭКФ позволил сделать следующие выводы: 1. Использование ковариационных функций, построенных для каждого из блоков первого региона для прогноза значений высот, малоэффективно. Оптимальный интервал, на который целесообразно выполнять прогноз с их использованием, составляет лишь около 4° , в то время как расстояние до прогнозируемых точек может достигать 25° и более. 2. Использование ковариационной функции, построенной для отдельного региона в целом, предпочтительнее. Однако, как и в первом случае, применение ее проблематично. Из-за сложной мозаичной структуры регионов, стационарных по дисперсии, практически нельзя сделать однозначный вывод относительно принадлежности той или иной прогнозируемой точки к конкретному региону.

В связи с этим в дальнейшем для оценок высот в прогнозируемых точках на основании ЭКФ (рис. 1) получена глобальная модельная ковариационная функция (МКФ), которая аппроксимировалась простым выражением

$$C(\psi) = C_0 / (1 + a^2 \psi^2)^n, \quad (9)$$

где C_0 — дисперсия поля рельефа; a и n — неизвестные параметры МКФ. Определение этих величин осуществлялось методом наименьших

квадратов для фиксированного значения n . В результате получены следующие значения: $C_0 = 4.27 \text{ км}^2$, $a = 0.17062$ (для фиксированного $n = 1/2$). Критерием оптимальности при выборе МКФ служил минимум средних квадратичных отклонений МКФ от ЭКФ. МКФ, найденная по формуле (9), показана на рис. 1.

Вычисления высот прогнозируемых точек и их оценка по методу средней квадратичной коллокации выполнялись по формулам из [10]:

$$\bar{h}_P = C_{Pi} (C_{ii} + D)^{-1} \bar{h}_i; \quad m_{h_P}^2 = C_0 - C_{Pi}^T (C_{ii} + D)^{-1} C_{Pi}, \quad (10)$$

где \bar{h}_P — значение прогнозируемой высоты в точке P ; C_{Pi} — ковариационная матрица известных \bar{h}_i и прогнозируемых \bar{h}_P значений высот;

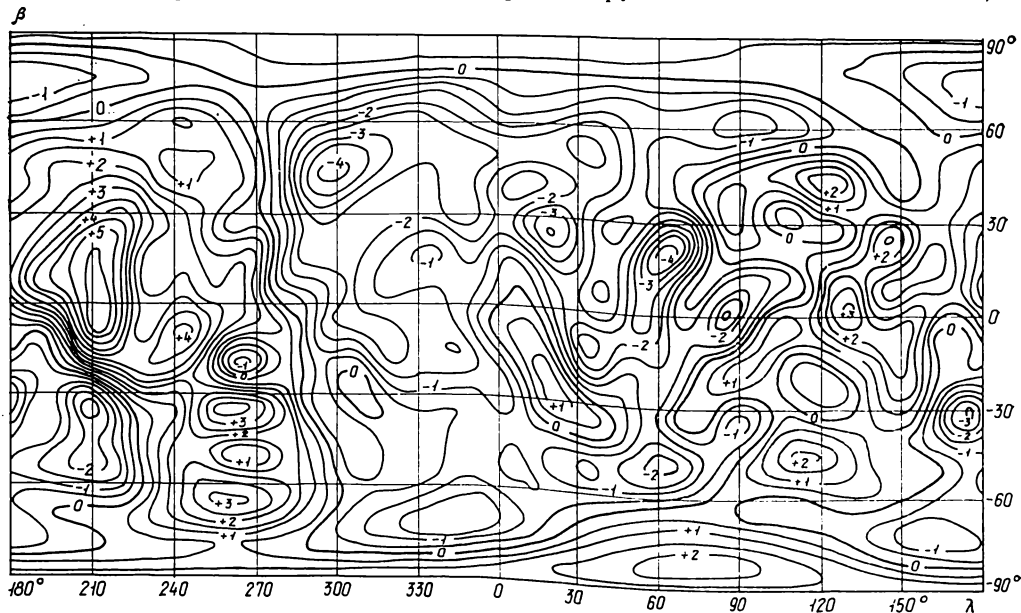


Рис. 3. Гипсометрическая карта Луны по данным модели (16×16). Изолинии проведены через 0.5 км

C_{ii} — ковариационная матрица известных значений высот; D — дисперсионная матрица; m_{h_P} — средняя квадратичная ошибка прогнозируемого значения высоты.

Таким образом, осуществлен прогноз высот для «пустых» мест на Луне. Причем максимальный радиус коллокации принимался равным 25° . Прогноз осуществлялся, если в область такого радиуса попадало не менее 15 точек с известными высотами. В остальных случаях (для 118 близполюсных трапеций на обратной стороне Луны) высоты вычислены по модели [13].

По всему массиву данных из решения уравнений (2) методом наименьших квадратов найдены коэффициенты разложения рельефа Луны в ряд по сферическим функциям до 16-го порядка и степени. Их нормированные значения приведены в табл. 2.

Некоторое представление о согласованности разных моделей фигуры физической поверхности Луны дает сравнение порядковых дисперсий

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \quad (11)$$

На рис. 2 показаны спектры лунной топографии по данным модели Билса и Феррари [13]; модели (16×16), полученной в данной работе;

Таблица 2. Значения нормированных гармонических коэффициентов разложения рельефа Луны

n	m	\bar{C}_{nm}	\bar{S}_{nm}	n	m	\bar{C}_{nm}	\bar{S}_{nm}
1	0	-0.8912E-04	—	11	0	0.1371E-05	—
	1	-0.6341E-03	-0.1992E-03		1	-0.7070E-05	0.4642E-04
2	0	-0.1308E-03	—		2	0.2562E-04	-0.1673E-04
	1	-0.3068E-03	0.4072E-04		3	-0.1190E-04	0.6060E-04
	2	-0.3483E-04	0.2032E-03		4	-0.7229E-05	0.3781E-05
3	0	-0.3456E-04	—		5	0.2414E-04	0.4358E-04
	1	0.9069E-04	0.6456E-04		6	0.4759E-05	0.4877E-04
	2	0.1436E-03	0.1115E-03		7	-0.1439E-04	0.4572E-04
	3	0.2829E-03	-0.3038E-04		8	0.2149E-04	0.1074E-04
4	0	0.1008E-03	—		9	0.1103E-04	-0.2496E-04
	1	0.8164E-04	0.3186E-04		10	0.1074E-04	0.2559E-04
	2	-0.1703E-03	-0.1918E-04	11	-0.3430E-04	0.3281E-04	
	3	-0.3747E-04	-0.1441E-03	12	0	0.6361E-05	—
4	-0.2457E-04	0.4689E-04	1		-0.3307E-05	-0.3377E-04	
5	0	0.2127E-04	—		2	-0.1327E-04	0.6847E-05
	1	-0.4337E-04	-0.4553E-04		3	-0.1350E-04	-0.9810E-05
	2	0.1759E-06	0.6718E-04		4	-0.2472E-04	-0.1253E-04
	3	0.3195E-04	0.6424E-04		5	-0.1834E-05	-0.1819E-04
	4	0.1131E-04	0.2389E-04		6	0.1023E-04	-0.4073E-05
6	5	0.7564E-04	-0.2585E-04		7	-0.2056E-04	0.3212E-04
	0	0.2473E-04	—		8	-0.8730E-05	-0.4766E-05
	1	0.5423E-04	-0.4763E-04		9	-0.1857E-04	0.6742E-04
	2	-0.1258E-04	0.9654E-05		10	-0.2434E-04	0.3567E-04
	3	0.1726E-04	-0.2149E-04		11	0.2113E-04	0.2039E-04
	4	0.2108E-04	-0.6123E-04	12	0.7419E-05	0.5318E-04	
7	5	-0.2907E-04	-0.9113E-04	13	0	-0.1386E-04	—
	6	-0.8484E-04	0.7408E-04		1	0.2620E-05	0.1010E-04
	0	0.1202E-04	—		2	-0.1780E-04	-0.2445E-04
	1	0.6068E-04	0.1240E-05		3	0.9403E-05	-0.7531E-05
	2	0.4814E-04	-0.5231E-04		4	-0.2220E-04	-0.3680E-05
	3	0.6497E-04	0.4319E-04		5	0.6365E-05	0.4891E-06
	4	-0.1406E-04	-0.2553E-04		6	-0.1696E-04	-0.1613E-04
5	-0.5235E-04	0.2785E-04	7		-0.1354E-04	-0.2735E-05	
8	6	-0.2410E-04	0.1416E-04		8	0.2382E-05	-0.2818E-04
	7	0.4052E-04	0.1182E-04		9	0.1042E-04	-0.2629E-04
	0	0.5437E-04	—		10	-0.9343E-05	-0.3008E-04
	1	-0.2049E-04	-0.1722E-05		11	-0.4415E-04	-0.3096E-05
	2	-0.3428E-04	0.4458E-04		12	0.1339E-04	-0.3284E-05
	3	-0.8685E-05	0.2711E-04	13	-0.3768E-04	-0.3931E-04	
	4	0.4985E-04	0.3910E-05	14	0	0.1982E-04	—
5	0.7747E-04	0.4759E-04	1		-0.2019E-04	-0.1140E-04	
6	-0.5651E-04	0.7200E-05	2		-0.2906E-05	-0.1821E-04	
7	0.3023E-05	0.3740E-05	3		0.3402E-04	0.1835E-04	
8	0.1548E-04	0.2209E-05	4		0.1259E-04	0.3478E-05	
9	0	0.2949E-05	—		5	0.1642E-04	0.4387E-04
	1	0.4266E-04	0.3719E-04		6	0.7707E-05	-0.8906E-05
	2	0.9086E-05	-0.5767E-04		7	0.3152E-04	0.2447E-05
	3	-0.1145E-04	0.3760E-05		8	0.2290E-05	0.7862E-05
	4	-0.2778E-05	0.6232E-05		9	-0.1420E-04	-0.5666E-05
	5	-0.4101E-04	-0.8384E-04		10	-0.5569E-05	0.9455E-05
	6	-0.5098E-05	-0.6481E-05		11	-0.3001E-04	-0.5583E-05
	7	-0.2499E-04	-0.2860E-04		12	-0.2089E-05	-0.9100E-05
	8	0.6521E-04	-0.5508E-04		13	0.5273E-05	-0.3241E-05
10	9	0.2171E-04	0.3302E-04	14	0.1128E-04	-0.5074E-05	
	0	-0.2999E-05	—	15	0	-0.1030E-04	—
	1	0.4252E-04	0.6836E-05		1	0.2852E-04	-0.2944E-05
	2	-0.4730E-04	0.3187E-04		2	0.7028E-05	0.1139E-04
	3	0.4047E-04	-0.3480E-05		3	0.6601E-05	-0.1398E-04
	4	0.4510E-05	-0.1688E-04		4	0.2830E-05	0.9899E-05
	5	-0.1865E-04	-0.3797E-04		5	0.6162E-06	-0.2631E-04
	6	0.3438E-04	0.3314E-04		6	0.3438E-04	-0.2056E-04
	7	0.1739E-04	0.2000E-04		7	0.1059E-04	-0.1582E-04
	8	0.4817E-04	0.2168E-04		8	0.8878E-05	-0.2227E-06
9	0.2143E-04	0.1992E-04	9		0.2021E-04	0.5044E-04	
10	0.4248E-04	0.2393E-05	10		-0.3813E-04	-0.1047E-06	
			11		0.3373E-04	-0.2067E-04	
			12	0.3815E-04	-0.4764E-05		

n	m	\bar{c}_{nm}	\bar{s}_{nm}	n	m	\bar{c}_{nm}	\bar{s}_{nm}
15	13	0.3589E-04	0.1365E-04	16	7	-0.9482E-06	-0.2214E-05
	14	-0.1980E-04	0.2085E-04		8	-0.7651E-05	0.2328E-04
	15	0.9208E-05	0.6675E-05		9	-0.1166E-04	-0.2546E-04
16	0	0.1770E-04	—	10	-0.1142E-04	-0.2491E-06	
	1	0.1531E-05	-0.9518E-05	11	0.7547E-05	-0.1558E-04	
	2	-0.2265E-04	0.5866E-05	12	-0.2930E-04	0.1556E-04	
	3	-0.2895E-04	0.1944E-06	13	0.5798E-06	0.1708E-04	
	4	-0.1025E-04	0.2463E-04	14	0.9165E-05	-0.1983E-04	
	5	0.8722E-05	0.3931E-05	15	0.6078E-05	0.2502E-04	
6	0.1501E-05	0.3954E-04	16	0.8182E-06	-0.1488E-04		

Примечание. $R_{\zeta} = 1737.572$ км.

Таблица 3. Параметры геометрической фигуры Луны

Параметры	Данная работа	Данная работа (неполное покрытие)	[13]
$n \times m$	16×16	6×6	12×12
R_{ζ}	1737.57	1737.36	1737.53
a	1738.77	1738.74	1738.43
b	1737.79	1737.31	1737.50
c	1735.15	1736.05	1736.66
ΔX	-1.91±0.03	-1.56±0.04	-1.82±0.05
ΔY	-0.60±0.03	-0.78±0.04	-0.44±0.04
ΔZ	-0.27±0.03	-0.51±0.08	-0.64±0.08
$a(\lambda, \beta)$	36° E, 24° S	54° E, 14° S	39° E, 14° S
$b(\lambda, \beta)$	110° E, 33° N	134° E, 33° N	119° E, 33° N
$c(\lambda, \beta)$	335° E, 47° N	342° E, 52° N	328° E, 54° N

Примечание. Величины R_{ζ} , a , b , c , ΔX , ΔY , ΔZ даны в километрах; модель (6×6) построена по данным табл. 1 без привлечения прогнозных значений высот; ($n \times m$) — порядок и степень разложения.

по эмпирической формуле [17]

$$\sigma_n^2 = 1.5 \cdot 10^{-6} / [n(n+1)]. \quad (12)$$

Сравнение спектров показывает, что топография Луны по данным, полученным в настоящей работе, в целом более гладкая, чем по модели Билса и Феррари [13], и в большей мере, чем последняя, подчиняется эмпирическому закону (12).

По результатам приведенного гармонического анализа построена гипсометрическая карта (рис. 3), а также найдены параметры трехосного эллипсоида, аппроксимирующего физическую поверхность Луны. В табл. 3 для полученной модели, а также для модели [13] приведены: R_{ζ} — средний радиус Луны; a , b , c — значения полуосей эллипсоида; ΔX , ΔY , ΔZ — смещения центра фигуры (эллипсоида) относительно центра масс Луны (ось X направлена в сторону Земли, ось Y дополняет систему до правой, ось Z направлена вдоль оси вращения Луны); $a(\lambda, \beta)$, $b(\lambda, \beta)$, $c(\lambda, \beta)$ — селенографические координаты направлений соответствующих осей.

Из табл. 3 следует, что в обоих случаях получается четко выраженный трехосный эллипсоид, аппроксимирующий фигуру физической поверхности Луны, причем ориентировка этих эллипсоидов практически одна и та же. Несколько различаются размеры эллипсоидов, а также

их центры. Эллипсоид, полученный в данной работе, более сжатый, чем по [13]. В значительной степени это объясняется привлечением дополнительных данных относительно краевой зоны [5] и обратной стороны Луны [6, 9], не учтенных в работе [13].

1. Гаврилов И. В., Кислюк В. С. Сводный каталог селеноцентрических положений 2580 базисных точек на Луне.— Киев : Наук. думка, 1970.—124 с.
2. Гаврилов И. В., Кислюк В. С., Белан В. И. Мегарельеф и фигура Луны по данным гармонического анализа высот лунной поверхности // Кинематика и физика небес. тел.— 1985.—1, № 2.— С. 24—29.
3. Гаврилов И. В., Кислюк В. С., Дума А. С. Сводная система селенодезических координат 4900 точек лунной поверхности.— Киев : Наук. думка, 1977.—172 с.
4. Дубровский А. С., Чиканов Ю. А. Гармонический анализ рельефа Луны // Астрон. вестн.— 1979.—13, № 3.— С. 82—86.
5. Дума А. С. Абсолютные высоты краевой зоны Луны в системе селенодезических опорных точек // Астрометрия и астрофизика.— 1973.— Вып. 20.— С. 55—68.
6. Дума А. С., Кислюк В. С. Профиль Луны по фотографиям, полученным с помощью КК «Аполлон-11» // Кинематика и физика небес. тел.— 1985.—1, № 1.— С. 49—54.
7. Зиман Я. Л., Красиков В. А., Родионов Б. Н. Селеноцентрическая система координат на восточный сектор обратной стороны Луны // Атлас обратной стороны Луны: В 3 ч.— М. : Наука, 1975.— Ч. 3.— С. 52—58.
8. Кислюк В. С. Об уточнении координаты ζ кратеров видимого полушария Луны по данным съемки КА «Зонд-8» // Космич. исслед.— 1975.—13, № 3.— С. 415—422.
9. Кислюк В. С. Профиль обратной стороны Луны по данным съемки КА «Зонд-8» // Астрометрия и астрофизика.— 1975.— Вып. 27.— С. 31—36.
10. Мориц Г. Современная физическая геодезия.— М. : Недра, 1983.—392 с.
11. Тюфлин Ю. С., Тимофеев Ю. С., Алексахин Е. П., Островский М. В. Некоторые результаты радиопрофилирования с автоматической станции «Луна-22» // Геодезия и картография.— 1979.— № 3.— С. 54—58.
12. Чуйкова Н. А. О представительности разложения геометрической фигуры по сферическим и выборочным функциям // Астрон. журн.— 1978.—55, вып. 3.— С. 617—627.
13. Bills B. G., Ferrari A. J. A harmonic analysis of lunar topography // Icarus.— 1977.— 31, N 2.— P. 244—259.
14. Calane O. Etude des mouvements libratoires lunaires et localisation des stations terrestres a partie des mesures laser de distances; These dokt. sci. phys. univ. Pierre et Marie Curie.— 1975.—152 p.
15. King R. W., Counselman C. C. III, Shapiro J. J. Lunar dynamics and selenodesy: results from analysis of VLBI and laser data // J. Geophys. Res.— 1976.—86, N 35.— P. 6251—6256.
16. Mohan S. N. New determinations of faj-side lunar radii from Apollo photography // Icarus.— 1979.—38, N 2.— P. 317—330.
17. Phillips R. J., Lambeck K. Gravity fields of the terrestrial planets: long-wavelength anomalies and tectonics // Rev. Geophys. and Space Phys.— 1980.—18, N 1.— P. 27—76.
18. Schirmerman L. A. The expanding Apollo control system // Appendix. Apollo-15 crater coordinates relatable to the Earth-based telescopic system.— St. Louis, Miss.: Def. Mapping Agency Aerospace Center, 1976.
19. Sjogren W. L. Estimate of four topocentric lunar radii // Measure of the Moon.— Dordrecht: Reidel, 1967.— P. 341—343.
20. Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R. Lunar shape via the Apollo laser altimeter // Science.— 1973.—179, N 4070.— P. 2775—2781.
21. Sjogren W. L., Wollenhaupt W. R. Lunar global figure from mare surface elevations // Moon.— 1976.—15, N 1/2.— P. 143—154.
22. Wollenhaupt W. R., Osburn R. K., Ransford G. A. Comments of the figure of the Moon from Apollo landmark tracking // Moon.— 1972.—5, N 1/2.— P. 149—157.

Львов. политехн. ин-т им. Ленин. комсомола,
 Глав. астрон. обсерватория АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 16.04.87,
 после доработки 01.06.87