УДК 52-17

О границах неравенства Рао — Крамера для дисперсий оценок параметров распределения Пирсона VII типа

И. В. Джунь

На основании неравенства Рао — Крамера получены формулы, позволяющие вычислять дисперсии эффективных несмещенных оценок параметров распределения Пирсона VII типа (по известным σ и m) почти так же просто, как получают аналогичные дисперсии в случае нормального распределения ошибок наблюдений. Формулы существенно упрощают использование пирсоновского распределения в астрометрической практике.

RAO — CRAMER'S INEQUALITY LIMITS FOR THE DISPERSIONS OF ESTIMATIONS OF THE PARAMETERS OF PEARSON TYPE VII DISTRIBUTION, by Dzhun' I. V.— On the basis of Rao — Cramer's inequality the formulae for dispersions of estimations of the parameters of Pearson Type VII distribution are given. These formulae are suggested to be used for mathematical analysis of astronomical observations when the errors of these observations are subjected to Pearson's law of Type VII.

Распределение Пирсона VII типа, предложенное Джеффрисом для аппроксимации ошибок астрономических наблюдений [10], имеет плотность вероятности

$$y=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{2\pi(m-0.5)}\,\Gamma(m+0.5)\,\sigma}\left\{1+\frac{m^2(x-\lambda)^2}{2\,(m-0.5)^3\sigma^2}\right\}^{-m},\quad m>0.5,\quad \sigma>0, \tag{1}$$

где λ, σ, m — параметры распределения (1), несмещенные и эффективные оценки $\hat{\lambda}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{m}$ которых имеют дисперсии, обозначаемые нами в дальнейшем через σ^2_λ, σ^2_σ, σ^2_m соответственно. Без ущерба для общности полагаем также, что $\lambda=0$.

Распределение (1) довольно часто используется для аппроксимации ошибок измерений с положительным эксцессом [2—4, 9, 10]. Однако его применение связано с трудностями, из которых главная состоит в том, что ни в астрометрической, ни в математической литературе не приводятся аналитические выражения для вычисления значений σ^2_λ, σ^2_σ, σ^2_m

Для нормального закона дисперсии σ^2_a, σ^2_σ несмещенных эффективных оценок его параметров a и σ получают из следующих, хорошо известных соотношений:

$$\sigma^2_a=\sigma^2/n,\quad \sigma^2_\sigma=\sigma^2/2n, \tag{2}$$

где n — количество измерений. Аналогичных формул для дисперсий оценок параметров распределения Пирсона VII типа нет, во всяком случае в доступной нам литературе. Джеффрис [10] приводит лишь выражение для дисперсии σ^2_σ эффективной оценки параметра σ распределения (1). Формул для вычисления дисперсий σ^2_λ и σ^2_m Джеффрис в [10] не дает и предлагает вычислять их путем численного определения вторых частных производных от уравнений максимума правдоподобия (у. м. п.).

Чтобы получить аналитические выражения для дисперсий σ^2_λ, σ^2_σ, σ^2_m, воспользуемся неравенством Рао — Крамера [5,6] для несмещенных оценок параметров λ, σ, m:

$$\sigma_\alpha^{-2}\leqslant n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\ln y}{\partial\alpha}\right)^2 y\,dx, \tag{3}$$

где σ^2_α — дисперсия оцениваемого параметра α; n — число наблюдений; y — в данном случае плотность распределения Пирсона VII типа. Логарифмируя (1) и дифференцируя $\ln y$ по λ, σ, m, имеем

$$\frac{\partial\ln y}{\partial\lambda}=\frac{2Mm}{\sigma^2}\,\frac{x}{R_x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\ln y}{\partial\sigma}=\frac{2Mmx^2}{\sigma^3R_x}-\frac{1}{\sigma}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\ln y}{\partial m}=\psi(m+1)-\frac{1}{2\,(m-0.5)}-\psi\,(m+0.5)+\frac{m^2(m+1)}{2\,(m-0.5)^4\sigma^2}\,\frac{x^2}{R_x}-\ln R_x, \tag{6}$$

где $M = m^2/[2(m-0.5)^3]$; $R_x = 1 + Mx^2\sigma^{-2}$; $\psi(m+1)$, $\psi(m+0.5)$ — пси-функции Подставляя последовательно выражения (4)—(6) в (3) и интегрируя, используя табличные интегралы [1, с. 306] и [7, с. 505], получаем после довольно громоздких преобразований

$$\sigma_\lambda^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{n} \; \frac{(m-0.5)^2(m+1)}{m^3}, \tag{7}$$

$$\sigma_\sigma^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{2n} \; \frac{m+1}{m-0.5}, \tag{8}$$

$$\sigma_m^{-2} \leqslant n\left[\psi'(m-0.5) - \psi'(m) - \frac{m^2+0.5(m-1)}{2m^2(m-0.5)^2}\right], \tag{9}$$

где $\psi'(m-0.5)$, $\psi'(m)$ — тригамма-функции, которые легко получить по таблицам [8] используя (в случае необходимости) следующую рекуррентную формулу для полигамма-функций: $\psi^{(n)}(m+1) = \psi^{(n)}(m) + (-1)^n n!\, m^{-n-1}$.
Легко видеть, что при $m=\infty$ (закон Гаусса) формулы (7) и (8) идентичны выражениям (2).

Нижние границы неравенств (7)—(9) соответствуют оценкам максимального правдоподобия, предложенным Джеффрисом для распределения (1) в работе [10]. Относительно самого способа решения у.м.п., рассмотренного в [10], необходимо отметить, что при их решении требуется знание предварительной оценки m. Такая оценка заранее нам не известна. Джеффрис в работе [10] (после ряда оговорок, с учетом того обстоятельства, что анализируемые им две выборки имеют довольно большой объем — соответственно 4540 и 5014 наблюдений) применил для оценки параметра m метод моментов. Однако применение метода моментов для предварительной оценки параметра m не всегда возможно, так как этот метод имеет существенный недостаток теоретического плана. Чтобы показать его, найдем, учитывая табличный интеграл [1, с. 306], значения четных центральных моментов μ_ν порядка $\nu \geqslant 2$ для распределения Пирсона VII типа

$$\mu_\nu = \sigma^\nu \frac{2^{\nu/2}(m-0.5)^{3\nu/2}}{m^\nu} \prod_{k=1}^{\nu/2} \frac{k-0.5}{m-k-0.5}, \quad \nu = 2, 4, 6, \ldots \tag{10}$$

Вследствие симметрии распределения (1) все его нечетные центральные моменты $\mu_\nu = 0$.

Принадлежность распределения к тому или иному типу симметричных семейств Пирсона оценивается на основании соотношения

$$\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2, \tag{11}$$

где μ_4, μ_2 — значения четвертого и второго центральных моментов. Полагая в (10) $\nu=4$, $\nu=2$, имеем

$$\mu_4 = \sigma^4 3\,(m-0.5)^6/[m^4(m-1.5)(m-2.5)], \quad m > 2.5, \tag{12}$$

$$\mu_2 = \sigma^2(m-0.5)^3/[m^2(m-1.5)], \quad m > 1.5. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (11), получаем $\beta_2 = 3(m-1.5)/(m-2.5)$, откуда

$$m = (2.5\beta_2 - 4.5)/(\beta_2 - 3) = (3 + 2.5\varepsilon)/\varepsilon, \tag{14}$$

где ε — эксцесс распределения.

Если в выражении (14) вместо эксцесса ε подставить его выборочное значение

$$\hat\varepsilon = \hat\mu_4/\hat\mu_2^2 - 3 = \hat\beta_2 - 3, \tag{15}$$

где $\hat\mu_\nu = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar x)^\nu$; $\bar x = \frac{1}{n}\sum x_i$; x_i — совокупность наблюдений объема n, то из (14) следует, что оценка метода моментов для m есть

$$\hat m = (2.5\hat\beta_2 - 4.5)/(\hat\beta_2 - 3) = (3 + 2.5\hat\varepsilon)/\hat\varepsilon. \tag{16}$$

Казалось бы, использование выражения (16) позволяет очень просто найти оценку m по значению ε выборки. Однако необходимо отметить, что оценка (16) имеет существенные недостатки. Во-первых, из (12) следует, что $\mu_4 = \infty$, если $m = 2.5$, а в (13)

$\mu_2=\infty$, если $m=1.5$, и в общем центральные четные моменты μ_ν порядка ν для распределения (1) существуют только в случае, если $m>(\nu+1)/2$. Таким образом, из (12) со всей определенностью следует, что оценка (16) неприменима, если $m\leqslant2.5$. При $m=2.5$ для генеральной совокупности имеем $\mu_4=\infty$. В то же время значение $\hat{\mu}_4$ выборки всегда конечно, каков бы ни был закон распределения. Следовательно, если действительно $m<2.5$, то метод моментов всегда будет давать $\hat{m}>2.5$, т. е. прежде чем воспользоваться оценкой (16) необходимо выяснить справедливость неравенства $m>2.5$ для генеральной совокупности, однако соответствующего статистического критерия для проверки этого неравенства в настоящее время нет. Во-вторых, предположение $\varepsilon>0$ для генеральной совокупности вовсе не означает, что $\hat{\varepsilon}>0$ для конкретной выборки. Таким образом, используемая Джеффрисом [10] оценка (16) таит в себе существенные теоретические изъяны и не обладает удовлетворительными статистическими свойствами.

Для практических целей Джеффрис [10] рекомендует использовать распределение (1) с $m=4$, что близко к реальным оценкам m, полученным по разным рядам наблюдений. Поэтому при определении параметров распределения (1) из решения у.м.п. для предварительной оценки параметра m можно вообще не привлекать метод моментов, и положить в первом приближении $\hat{m}=4$, а вместо λ и σ^2 использовать выборочные значения первого и второго центральных моментов эмпирического распределения.

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.—1100 с.
2. *Джунь И. В.* Распределение Пирсона VII типа в ошибках наблюдений над колебаниями широт // Астрометрия и астрофизика.— 1969.— Вып. 2.— С. 101—115.
3. *Джунь И. В., Арнаутов Г. П., Стусь Ю. Ф., Щеглов С. Н.* Особенность закона распределения результатов баллистических измерений ускорения силы тяжести // Повторные гравиметрические наблюдения: вопросы теории и результаты.— М.: Нефтегеофизика, 1984.— С. 87—100.
4. *Джунь И. В., Славинская А. А.* Закон распределения остаточных погрешностей определения времени и широты на астролябии Данжона // Вращение и прилив. деформации Земли.— 1984.— Вып. 16.— С. 69—74.
5. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания.— М.: Наука, 1979.—528 с.
6. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.—648 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.—798 с.
8. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.—830 с.
9. *Харин А. С., Яцкив Я. С.* О законе распределения случайных ошибок наблюдений голосеевского каталога склонений звезд широтных программ // Тр. 18-й астрометр. конф. СССР.— Л.: Наука, 1972.— С. 130—133.
10. *Jeffreys H.* The law of error in the Greenwich variation of latitude observations // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.— 1939.—99.— P. 703—709.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва,
Ровно

Поступила в редакцию
30.03.87

УДК 523.33

Определение наклона лунного экватора к эклиптике по фотографическим наблюдениям Луны на фоне звезд

Р. Л. Семеренко

По данным фотографических позиционных наблюдений Луны одновременно со звездами определен наклон лунного экватора к эклиптике. Использованы две теории движения Луны: Брауна — Эккерта ($j=2$) и DE200/LE200.

THE DETERMINATION OF LUNAR EQUATOR-TO-ECLIPTIC INCLINATION FROM PHOTOGRAPHIC OBSERVATIONS OF THE MOON ON THE STELLAR BACKGROUND, by Semerenko R. L.— The lunar equator-to-ecliptic inclination has been determined