УДК 524.5

Неупругое рассеяние электронов на сильновозбужденных атомах

Н. Н. Ровенская

Аналитическими методами определены квазиклассические вероятности переходов, сечения и скорости неупругого рассеяния для асимптотических состояний ридберговских атомов ($n \gg 1$, $m/l \ll 1$, $m/l \sim 1$, $l/n \ll 1$, $l/n \sim 1$). Вычисленные эффективные столкновительные ширины линий позволяют интерпретировать наблюдаемое уширение декаметровых рекомбинационных линий в областях холодной космической плазмы.

INELASTIC ELECTRON SCATTERING ON STRONGLY-EXCITED ATOMS, by Rovenskaya N. I.— Semi-classical transition probabilities, the cross-sections and rates of the inelastic scattering are determined by analytic methods for some asymptotic states of Rydberg's atoms ($n \gg 1$, $m/l \ll 1$, $m/l \sim 1$, $l/n \ll 1$, $l/n \sim 1$). Calculated effective collision widths of lines allow the detectable broadening of decameter recombination lines from the cold cosmic plasma components to be interpreted.

Введение. Метод, близкий к классической теории возмущений, позволяет наиболее просто теоретически исследовать процесс неупругого рассеяния электронов на атомах в сильновозбужденных состояниях в области энергий свободного электрона $E/Ry \gg 2/n^2$. Общая схема квазиклассического подхода, учитывающего предельный переход при $E/Ry \gg 1$ к квантовой теории возмущений (метод Борна), разработана в [3] и развита для случая классически вырожденных систем в [5]. Борновское приближение хорошо объясняет экспериментально наблюдаемое уширение рекомбинационных линий [9] в областях горячего газа с температурой электронного компонента $T_e \approx 10^4$ К и $n = 100$ [1]. В интервале $2/n < E/Ry < 1$ при квазиклассическом подходе и дополнительных ограничениях энергий снизу, соответствующих предположению о мгновенности взаимодействия и исследованию квантовых состояний $m/l \sim 1$, $l/n \sim 1$, в работах [13, 14] найдены аналитические зависимости для сечений и скоростей столкновительных переходов. В области $2/n^2 \ll E/Ry < 2/n$ аналитическое определение квазиклассических вероятностей, сечений и скоростей столкновительных переходов отсутствует. Существующие численные результаты [11, 12] предлагаются как возможные аппроксимации, контролируемые приближением мгновенного взаимодействия. Однако эта область низкоэнергетических частиц представляет особый интерес в связи с наблюдениями декаметровых рекомбинационных линий [6, 7], формирующихся в холодной астрофизической плазме с $T_e \leqslant 100$ К и $n = 600$—700, а также с обнаружением метровых рекомбинационных линий с $T_e \leqslant 100$ К и $n = 500$—600 [4].

В настоящей работе проведено аналитическое исследование неупругого рассеяния электронов на ридберговских атомах для дипольного взаимодействия в пределах классической теории возмущений: $2/n^2 \ll E/Ry$, $n \gg 1$ — формулы (18), (20). Результаты представлены следующим образом: 1 — вычислены волновые функции атомных возмущенных состояний в зависимости от обобщенных координат и импульсов (n, l, m); 2 — получены квазиклассические вероятности переходов в приближениях для квантовых чисел: $m/l \ll 1$, $m/l \sim 1$, $l/n \ll 1$, $l/n \sim 1$; 3 — определены сечения и эффективные ширины линий, дополнительно представлены асимптотические результаты в квазиклассической области $2/n^2 \ll E/Ry \ll 2/n$ — формулы (16)—(18).

Волновые функции сильновозбужденных атомов при дипольном взаимодействии. Рассмотрим динамическую систему, состоящую из свободного электрона и сильновозбужденного атома. Для изолированного атома задача допускает разделение переменных, поскольку ридберговский атом — водородоподобный с квазиклассическими волновыми функциями $\psi_i \propto \exp(i S_i/\hbar)$, где функция действия S_i вычисляется методами классической механики. В переменных действие — фаза канонические уравнения для возмущенной системы имеют вид

$$\frac{\partial H_0}{\partial w_k} = 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial \mathcal{J}_1} = \omega(n), \quad \frac{\partial H_0}{\partial \mathcal{J}_2} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathcal{J}_3} = 0, \quad S_i = \sum_k \mathcal{J}_k w_k - E_i^{\text{ат}} t. \qquad (1)$$

Из условий квантования $\mathcal{J}_1 = \hbar n$, $\mathcal{J}_2 = \hbar l$, $\mathcal{J}_3 = \hbar m$; $\omega(n) = 2Ry/(\hbar n^3)$ — частота классического движения электрона в атоме. В первом порядке теории возмущений уравнение Гамильтона — Якоби записывается в виде [3]

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial t} + \omega \frac{\partial \Delta S}{\partial w_1} + V\left(w_k, \frac{\partial S_i}{\partial w_k}, t\right) = 0, \quad S = S_i + \Delta S, \qquad (2)$$

$V(t)$ — потенциал взаимодействия свободной частицы с ридберговским атомом. Решение уравнения (2) получаем методом Фурье

$$V(t) = \sum_{\varkappa} V_{\varkappa} \exp(i\varkappa \mathbf{w}), \qquad \Delta S = \sum_{\varkappa} a_{\varkappa} \exp(i\varkappa \mathbf{w}),$$

$$a_{\varkappa} = -\int_{-\infty}^{t} dt' V_{\varkappa}(t') \exp(i\varkappa_1 \omega t'), \qquad (3)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \equiv (\Delta n, \Delta l, \Delta m)$; $\varkappa$ — вектор виртуальных переходов. Область $\Delta S \ll n\hbar$ применимости формул (3) шире области $\Delta S \ll \hbar$ квантовой теории возмущений. В дипольном приближении $V(t) = ed(\rho \cos\theta + vt \sin\theta \cos\varphi)/[(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}]$ в системе координат, начало которой находится в ядре атома, ось z направлена в точку траектории внешней частицы, ближайшую к ядру. Здесь ρ, v — соответственно прицельное расстояние и скорость свободного электрона, d — дипольный момент атома. Запишем формулы, связывающие координаты r, θ и φ с переменными w_1, w_2 и w_3:

$$\begin{gathered} r = n^2(1 - \varepsilon\cos\xi); \qquad w_1 = \xi - \varepsilon \sin\xi; \qquad w_2 = -\arccos n^2(1-\varepsilon^2)/(\varepsilon r) + \\ + \arcsin(\cos\theta/\sin\gamma), \\ w_3 = \varphi - \arcsin(\operatorname{ctg}\theta \operatorname{ctg}\gamma); \qquad \cos\gamma = m/l; \qquad \varepsilon = (1 - l^2/n^2)^{1/2}, \end{gathered} \qquad (4)$$

где ε — эксцентриситет орбиты сильновозбужденного электрона.

Амплитуда нового атомного состояния $a_{\varkappa}$ определяется из решения (3) с учетом параметрических зависимостей от угловых переменных. Из условий ортогональности следует $\varkappa_2 = \pm 1$, $\varkappa_3 = 0, \pm 1$. Для $a_{\varkappa} \equiv a_{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}$ получаются формулы в виде $(\varkappa_1 > 0)$

$$a_{\varkappa_1, 1, \pm 1} = a^*_{\varkappa_1, -1, \mp 1} = \frac{l \pm m}{4l} \langle x + iy \rangle \left[-\frac{2e^2 b}{v} iK_0(b\rho)\right],$$

$$a_{\varkappa_1, 1, 0} = -a^*_{\varkappa_1, -1, 0} = \frac{\sqrt{l^2 - m^2}}{2l} \langle x + iy \rangle \left[-\frac{2e^2 b}{v} iK_1(b\rho)\right],$$

$$a_{\varkappa_1, -1, 1} = a^*_{\varkappa_1, 1, -1}, \qquad (5)$$

$$b = \frac{\varkappa_1 \omega \rho}{v}; \qquad \langle x \pm iy \rangle = \frac{n^2}{\varkappa_1}\left[\mathcal{J}'_{\varkappa_1}(\varkappa_1\varepsilon) \pm \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \mathcal{J}_{\varkappa_1}(\varkappa_1 \varepsilon)\right].$$

$K_0(b\rho)$, $K_1(b\rho)$ и $\mathcal{J}_{\varkappa_1}(\varkappa_1\varepsilon)$ — функции Макдональда и Бесселя. Для $\varkappa_1 < 0$ имеем $a_{-\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3} = a^*_{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}$. Приращенное в процессе рассеяния действие ΔS и волновая функция конечного состояния $\psi_f \propto \exp[i(S_i + \Delta S)/\hbar]$ определяются без дополнительных предположений о квантовых числах. Вероятности столкновительных переходов и другие физические величины вычисляются только в условиях асимптотически больших или малых значений параметров m/l и l/n. Приведем выражения для ΔS. Если траектория внешней частицы перпендикулярна или близка к перпендикулярной относительно плоскости орбиты ридберговского электрона, что означает $m/l \ll 1$, то

$$\Delta S = \sum_{\varkappa_1=1} \frac{2e^2b}{v} K_0(b\rho)\,[\langle x\rangle \cos(w_2 + w_3)\sin\varkappa_1 w_1 + \langle x\rangle \cos(w_2 - w_3)\sin\varkappa_1 w_1 + \langle y\rangle \sin(w_2 + w_3)\cos\varkappa_1 w_1 + \langle y\rangle \sin(w_2 - w_3)\cos\varkappa_1 w_1] - \frac{4e^2b}{v} K_1(b\rho)\,[\langle x\rangle \sin w_2 \cos\varkappa_1 w_1 + \langle y\rangle \cos w_2 \sin\varkappa_1 w_1]. \tag{6}$$

Для движения свободной частицы, параллельного плоскости орбиты, т. е. при $m/l \sim 1$, имеем

$$\Delta S = \sum_{\varkappa_1=1} \frac{4e^2b}{v} K_0(b\rho)\,[\langle x\rangle \cos(w_2 + w_3)\sin\varkappa_1 w_1 + \langle y\rangle \sin(w_2 + w_3)\cos\varkappa_1 w_1]. \tag{7}$$

Квазиклассические вероятности столкновительных переходов. Вероятность столкновительного перехода в зависимости от квантовых чисел начального (i) и конечного (f) состояний по определению [2]

$$W_{if} = \lim_{t\to\infty} \left| \int \psi_i \psi_f^* d\gamma \right|^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \int_0^{2\pi} d\mathbf{w} \exp\left[- i\mathbf{q}\mathbf{w} + (i/\hbar) \sum_{\varkappa} a_{\varkappa} \exp(i\varkappa \mathbf{w})\right] \right|^2. \tag{8}$$

Отбор по $\varkappa_2 = \pm 1$, $\varkappa_3 = 0, \pm 1$ упрощает сумму по $\varkappa$, и (8) точно интегрируется по w_2 и w_3 с помощью формул (5). Определение интеграла по w_1 с одновременным учетом всех гармоник по $\varkappa_1$ невозможно. Используется схема виртуальных переходов с фиксированной гармоникой $\varkappa_1 = \nu$. Из вычислений квазиклассических сечений рассеяния будет видно существование основного виртуального перехода ν. При расчете сечений или эффективных ширин уровней вероятность W_{if} усредняется по начальному и суммируется по конечному (q_2 и q_3) состояниям. Суммирование по q_2 и q_3 проводится непосредственно в шестимерном интеграле (8), $\sum_{q_2} \exp[iq_2(w_2' - w_2)] = 2\pi\delta(w_2' - w_2)$, тогда наличие δ-функций сведет интеграл (8) к четырехмерному. В случае $m/l \sim 1$, $l/n \sim 1$ для квазиклассической вероятности W_{if} с помощью (7) получим

$$W_{if}^{\Sigma} = \mathcal{J}_{q_2}^2(A),\quad q_1 = \nu q_2,\quad q_2 = q_3,\quad A = \frac{4e^2 a_0}{\hbar}\frac{\omega n^2}{v^2}\mathcal{J}_{\nu}'(\nu\varepsilon)\, K_0\left(\frac{\nu\omega\rho}{v}\right). \tag{9}$$

Для остальных асимптотик W_{if}^{Σ} оставлены в интегральной форме, индекс Σ означает суммирование по q_2 и q_3 под знаком интеграла.

При условии $m/l \sim 1$, $l/n \ll 1$ получаем

$$W_{if}^{\Sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dw\, \mathcal{J}^2_{-\frac{q_1}{\nu}}(A\sin w), \tag{10}$$

где $\mathcal{J}_{-\frac{q_1}{\nu}}(A\sin w)$ — функция Ангера [10].

В случае $m/l \ll 1$, $l/n \sim 1$ получим

$$W_{if}^{\Sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dw \mathcal{J}_{q_2}^2 (A \cos w - B), \quad q_1 = \nu q_2, \tag{11}$$

где $B = \dfrac{4e^2 a_0}{\hbar} \dfrac{\omega n^2}{v^2} \mathcal{J}'_\nu (\nu\varepsilon) K_1 \left(\dfrac{\nu \omega \rho}{v} \right)$.

Для $m/l \ll 1$, $l/n \ll 1$ вероятность запишется в виде

$$W_{if}^{\Sigma} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} dw \int_0^{\pi/2} dw' \mathcal{J}^2_{-\frac{q_1}{\nu}} (\sqrt{A^2 \sin^2 w \sin^2 w' + B^2 \cos^2 w}). \tag{12}$$

В формулах (10), (12) функции Ангера для $n \gg A$, $B > 1$ (квазиклассическое приближение) асимптотически представляются функцией Бесселя. При $A \ll 1$ формулы автоматически переходят в борновский предел заменой функций Бесселя асимптотической для малых аргументов, причем $q_2 = 1$, $q_1 = \nu$.

Квазиклассические сечения столкновительных переходов. Неупругое уширение сильновозбужденных уровней. Для определения столкновительного уширения рекомбинационных линий при неупругом рассеянии необходимо, во-первых, усреднить полученные вероятности W_{if}^{Σ} — формулы (9) — (12) — по прицельному расстоянию; во-вторых, результаты просуммировать по конечным состояниям (q_1) и усреднить по скоростям с максвелловским спектром свободных частиц. Скорость неупругих столкновительных переходов $\langle v\sigma_{if} \rangle^{\text{ст}}$ вычисляется по формуле

$$\langle v\sigma_{if} \rangle^{\text{ст}} = 8\pi^2 \left(\frac{m}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \int_{v_0}^{\infty} v^3 \exp \left(- \frac{m v^2}{2 k T_e} \right) dv \int_{\rho_0}^{\infty} \rho W_{if}^{\Sigma} (\rho, v)\, d\rho, \tag{13}$$

где σ_{if} — сечение неупругого рассеяния; v_0 — пороговая скорость; ρ_0 — нижний предел интегрирования порядка радиуса атома.

Конечный результат представим в виде формул для эффективных ширин рекомбинационных линий $\Delta\nu_L^{\text{ст}}$, возникающих при переходах между уровнями n и n':

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} = N_e \sum_{\Delta n} [\langle v\sigma_{if} (n) \rangle^{\text{ст}} + \langle v\sigma_{if} (n') \rangle^{\text{ст}}], \tag{14}$$

где N_e, T_e — концентрация и температура электронов плазмы. В формуле (14) подразумевается модель ударного приближения, в которой время свободного пробега $\tau \propto (N_e \sigma_{if} v_{eff})^{-1}$ намного больше времени взаимодействия $\tau_{\text{вз}} \propto \rho_{eff}/v_{eff} \propto 2/\omega$. В условиях космических облаков атомарного водорода критерий ударного уширения выполняется, оценки времен $\tau_{\text{вз}}$ и τ легко сделать после вычисления квазиклассического сечения σ_{if}, расчет которого рассмотрим ниже. Итак, эффективная ширина рекомбинационной линии состоит из суммы ширин уровней n и n' (14), в свою очередь определяющихся спектром переходов, т. е. суммой по Δn.

Сечения σ_{if} в окрестности квантовых чисел $m/l \sim 1$, $l/n \sim 1$ представляются в интегральной форме

$$\sigma_{if} = 2\pi \left(\frac{v}{\nu\omega} \right)^2 \int_{b_0}^{\infty} x \mathcal{J}_{q_2}^2 (a K_0 (x))\, dx,$$
$$x = \frac{\nu\omega\rho}{v}, \quad a = \frac{4e^2 a_0}{\hbar} \frac{\omega n^2}{v^2} \mathcal{J}'_\nu (\nu\varepsilon), \quad b_0 = \frac{\nu\omega\rho_0}{v}. \tag{15}$$

Подобно (15) определяются сечения для вероятностей W_{if}^{Σ} (10) — (12) с заменой порядка интегрирования по x и w. Зависимостью $\sigma_{if} \propto 1/\nu^2$ обусловлен выбор основной гармоники $\nu = 1$ из спектра виртуальных переходов. При этом упрощаются правила переходов (9), (11): $q_2=q_1$, функции Ангера становятся тождественными функциям Бесселя (10), (12).

Универсального решения, описывающего поведение квазиклассических сечений на энергетической оси $2/n^2 \ll E/Ry$, не существует. Характер столкновения сильно зависит от соотношения между энергиями связанной и свободной частиц $a \propto nE^{\text{ат}}/E$ и величины адиабатического параметра $x = \omega\rho/v$. Энергетическая ось разбивается на три части. В области $E/Ry \gg 1$ при любых значениях $\omega\rho/v$ функция Бесселя в (15) задается асимптотикой для малых аргументов, решение (15) соответствует борновскому приближению: $\sigma_{if}^{\text{Б}} \propto a^2 (v/\omega)^2$, $q_2 = q_1 = 1$. В интервале энергий внешнего электрона $2/n \leqslant E/Ry \leqslant 1$, ограничивающем значения a областью $0.5 \leqslant a \leqslant 1$, поведение квазиклассического сечения обусловлено малыми адиабатическими параметрами $b_0 < x \leqslant 0.5$, описывающими окрестность первого максимума функции $\mathcal{J}^2_{q_2}(aK_0(x))$ в (15) [10]. В этом случае решение, определяющееся мгновенным взаимодействием, можно представить зависимостью: $\sigma_{if}^{\text{мгн}} \propto a(v/\omega)^2$, $q_1 = q_2 = 1$. Подробнее вычисления обсуждаются при расчете сечений для квазиклассического интервала $2/n^2 \ll E/Ry \leqslant 2/n$, поскольку он включает окрестность $E/Ry \sim 2/n$. В асимптотической области низких энергий $2/n^2 \ll E/Ry \ll 2/n$ $(a \gg 1)$ поведение квазиклассического сечения обусловлено медленными движениями с $\omega\rho/v \gtrsim 2$. Тогда интеграл (15) вычисляется с помощью подстановки $K_0(x) \approx \sqrt{\pi/2x}\exp(-x)$ [10] с нижним пределом интегрирования $b_0 = 2$ [8]:

$$\sigma_{if} = 2\pi\left(\frac{v}{\omega}\right)^2\left[\frac{\mathcal{J}^2_{q_1}(g)}{q_1} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{J}^2_{q_1+k+1}(g)}{q_1} + 0\left(\frac{1}{4q_1^2}\right)\right], \tag{16}$$

где $g = \sqrt{\pi/4}\,a\exp(-2)$, $a = 2Ry/(nE)$.

Из формулы (16) следует, что максимум квазиклассического сечения σ_{if} достигается при соотношении параметров: $g \sim q_1+k+1$, т. е. эффективные адиабатические параметры x_{eff} в интеграле (15) определяются из условия $a\exp(-x_{eff})/\sqrt{x_{eff}} \sim q_1$. Поскольку исследуется область $a \gg 1$, то существенный вклад вносят адиабатические параметры $\omega\rho/v \gtrsim 2$ [10]. Формула (16) обобщается на случаи (10)—(12) с подстановкой зависимостей от w в аргументы функций Бесселя. Асимптотически точные выражения для усредненных по w сечений определяются через гипергеометрические функции. Равномерные асимптотические представления функций Бесселя позволяют выделить главную часть сечения по параметру $a \propto \omega n^2/v^2$, имеющую степенной вид. Поэтому суммирование по индексу k в (16) и усреднение по w в (10)—(12), (16), а также вычисление ширины уровня n (14) проводится в явном виде. Соответствующее формальное решение, представленное гипергеометрическими рядами, и приближенное степенное решение, аппроксимирующее эффективное уширение, приведены в приложении 1. Асимптотика эффективного уширения сильновозбужденных состояний в соответствии с приложением 1 и (14) имеет вид

$$\sum_{q_1}\sigma_{if} \propto g^{1/3}\ln(1+g)\left(\frac{v}{\omega}\right)^2, \quad g \gg 1. \tag{17}$$

В диапазоне более высоких энергий $0.12/n \leqslant E/Ry \leqslant 1/n$ становится существенной роль относительно быстрых движений. Громоздкий расчет, включающий равномерные асимптотические представления функций Бесселя в (15), а также разложения $K_0(\omega\rho/v)$ и $K_1(\omega\rho/v)$ [10], приведен в приложении 2. При этом решение, дополняющее асимптотику уширения (17), пропорционально $g^{1/3}(v/\omega)^2$. Из вычислений $\sum_{q_1}\sigma_{if}$ по (9)—(12), (15) (см. также приложения 1 и 2) следует, что при условиях $2/n^2 \ll E/Ry \leqslant$, $n \gg 1$ эффективные прицельные расстояния находятся в диапазоне $0.5 \leqslant \omega\rho_{eff}/v \leqslant 2$. Полученные формулы для $\sum\limits_{q_1} \sigma_{if}$ усредняются с максвелловским спектром свободных частиц (13). В результате, согласно (14), получаем

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} = 0.4\cdot 10^{-14} N_e T_e^{7/6} n^{17/3} \left[\ln\left(1 + \frac{2\cdot 10^4}{nT_e}\right) + 1.5\right] \quad \text{Гц},$$
$$2 \leqslant 1.6\cdot 10^5/(nT_e) \ll n. \tag{18}$$

В выражении (18) T_e задана в кельвинах. Эффективная ширина линии $\Delta\nu_L{}^{\text{ст}}$ (18) представлена уширением близко отстоящих друг от друга уровней $|n-n'| \ll n,\ n'$. Характерная скорость электронов плазмы при неупругом рассеянии определена методом Лапласа: $\tilde{v} = \sqrt{13\, kT_e/(3m)}$ (17). Степенное решение, аппроксимирующее квазиклассическое сечение σ_{if} в переходной области от мгновенного взаимодействия к адиабатически медленному $(2/n \leqslant E/Ry \leqslant 1)$, получено также с помощью равномерных асимптотических представлений функций Бесселя. Интегрирование (15) для этого случая проводится в окрестности $\omega\rho_{eff}/v \sim 0.5$ с соответствующей заменой функций $K_0(\omega\rho/v)$ и $K_1(\omega\rho/v)$ асимптотиками при малых аргументах [10]. Тогда квазиклассическое сечение имеет вид

$$\sigma_{if} = 0.13a\,(v/\omega)^2, \quad q_1 = 1, \quad 0.5 \leqslant a \leqslant 2. \tag{19}$$

Из усреднения по скоростям свободных электронов выражения (19) следует, что характерная скорость частиц при неупругих столкновениях (в данном случае) $\tilde{v} = \sqrt{3kT_e/m}$. После подстановки (19) в (14) получаем

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} = 0.8\cdot 10^{-11} N_e T_e^{1/2} n^5 \quad \text{Гц}, \quad 0.5 \leqslant \frac{1.6\cdot 10^5}{nT_e} \leqslant 2. \tag{20}$$

Неупругое столкновительное уширение в области $2/n^2 \ll E/Ry < 1$ описывается одинаково для разных асимптотических состояний ридберговского атома: $m/l \sim 1$, $m/l \ll 1$, $l/n \sim 1$, $l/n \ll 1$. Это утверждение следует из вычислений квазиклассических сечений с помощью формул (9)—(12), (15). Слабая зависимость сечений и ширин линий от магнитного и азимутального квантовых чисел обусловлена вкладом относительно больших эффективных прицельных расстояний ρ_{eff} при неупругом рассеянии.

В задаче о неупругих столкновениях в рамках классической теории возмущений нет выделенных направлений для оси квантования z. Поэтому зависимость от магнитного квантового числа m не существенна. Предполагая равноправность всех значений m, исследуем зависимость сечений σ_{if} от геометрии орбиты ридберговского электрона. Для скоростей переходов в асимптотической части решения формула имеет вид

$$\langle v\sigma_{if}\rangle^{\text{ст}} \propto q_1^{-1} g^{1/3}, \quad q_1 \sim g. \tag{21}$$

Решение (20) следует из (16), (13) с учетом равномерных представлений $\mathcal{J}^2_{q_1+k+1}(g)$ [10]. Параметр $g(\varepsilon) \sim \mathcal{J}_1'(\varepsilon)$ (15) с хорошей точностью аппроксимируется [10]:

$$g(\varepsilon) \sim 0.5\,(1 - 0.36\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{22}$$

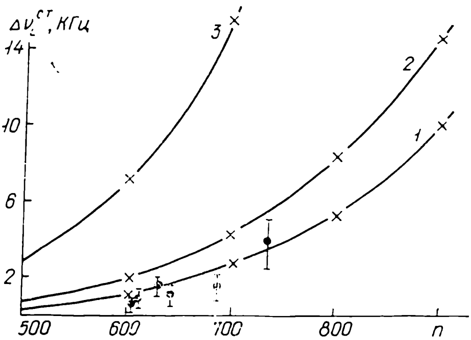
Тогда эффективное уширение с учетом следующего порядка разложения амплитуд возмущенных состояний по ε пропорционально усреднению по азимутальным квантовым числам начального состояния l и сумме по $q_1(\varepsilon)$ в (14), (20):

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} \propto \sum_{l}^{n-1} \sum_{q_1(\varepsilon)} \frac{2l+1}{n^2}\, \frac{g^{1/3}}{q_1}, \quad \varepsilon = \left(1 - \frac{l^2}{n^2}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Сумма (23) с подстановкой (22), учитывающей второй порядок разложения, пропорциональный ε^2, определяется большими азимутальными квантовыми числами $l \sim n$. Из вычислений получено, что вклад второго порядка разложения в сумму (23) равен 0.06. При $0.5 \leqslant 1.6 \times \times 10^5/(nT_e) \leqslant 2$, аналогично (23), по формулам (19), (22) вклад второго порядка разложения равен 0.2.

Итак, если асимптотически точные решения в области $2/n^2 \ll E/Ry \ll 2/n$, $n \gg 1$ выражаются через гипергеометрические функции (приложение 1), то степенные решения, определяющие квазиклассические величины σ_{if}, $\langle v\sigma_{if}\rangle^{\text{ст}}$ и $\Delta\nu_L^{\text{ст}}$ в области $2/n^2 \ll E/Ry \leqslant 1$, соответствуют равномерным аппроксимациям (17) — (20).

Обсуждение. В настоящей работе неупругое рассеяние электронов на сильновозбужденных атомах исследовано в пределах ограничений классической теории возмущений и дипольного взаимодействия. При дополнительных предположениях относительно кван-



Кривые *1*, *2*, *3* отражают следующие результаты: *1* — аналитический расчет по формуле (18); *2*, *3* — численные аппроксимации, предлагаемые соответственно в [12] и [11]. Вертикальные линии — экспериментальные данные с учетом ошибки измерений [6]

товых чисел ридберговских состояний m и l вероятности переходов, сечения рассеяния и ширины уровней определены аналитическими методами.

Необходимо отметить следующее: 1 — для всех асимптотик W_{if}^{Σ} — формулы (9) — (12) — основной виртуальный переход $\varkappa_1 = 1$; 2 — главная область интегрирования по адиабатическому параметру $\omega\rho/v$ перемещается в зависимости от $a \propto nE^{\text{ат}}/E$, для асимптотически больших значений a сечение обусловлено большими $\omega\rho/v \gtrsim 2$, для $a \sim 1$ в основном интегрируется окрестность $\omega\rho/v \sim 0.5$, в диапазоне $2 \leqslant a < 10$ поведение $W_{if}(\omega\rho/v)$ определяется интервалом $0.5 \leqslant \omega\rho/v \leqslant 2$. Интересно, что основной переход, определяющий уширение $\Delta\nu_L^{\text{ст}}$, зависит от соотношения энергий связанного и свободного электронов a: в области $a \gg 1$ имеем $q_1 \sim a$, в случае $0.5 < a < < 2$ основной переход $q_1 = 1$.

В работе представлена зависимость квазиклассических сечений от угловых моментов, возникающая в следующих порядках разложений амплитуд возмущенных состояний по ε.

В связи с другими теоретическими работами по рассеянию частиц на ридберговских атомах [2, 13, 14] отметим особую роль равномерных асимптотических представлений для построения характерных аналитических зависимостей в диапазоне энергий $2/n^2 \ll E/Ry \leqslant 1$. Ранее аналитические вероятности, сечения и скорости переходов были представлены в области $E/Ry \gg 1$ $(a \ll 1)$ [1] и окрестности $2/n < E/Ry < 1$, $a \leqslant 1$ [13]. В случае $a < 1$ основными становятся малые адиабатические параметры; при дополнительных ограничениях на квантовые числа ($l/n \sim \sim 1$, $m/l \sim 1$), найденные в [11, 12], аналитические решения позволяют провести интерполяцию в область $2/n^2 \ll E/Ry < 2/n$. Итак, решения в приближении мгновенного взаимодействия [2, 13] очень хорошо согласуются с предлагаемыми в нашей работе асимптотическими представлениями (9), (19), (20).

Аналитические зависимости сечений и ширин линий для адиабатически медленных взаимодействий в литературе отсутствовали. Существует численное решение, при котором квантовое состояние характеризуется главным квантовым числом n [11, 12]. Из сравнения численных аппроксимаций [11, 12] с аналитическими данными (18), (20) следует, что различие в результатах возрастает с понижением температуры и достигает максимума в асимптотической части (18). На рисунке изображены аналитические и численные данные в условиях $T_e=40$ К, $N_e=0.6$ см$^{-3}$, представляющие интерес для наблюдений декаметровых линий холодной плазмы; отмечены также экспериментальные данные. Электронная концентрация определена из сравнения экспериментальной ширины линии и зависимости (18) для $n=631$, $T_e=40$ К [6].

Автор признателен В. М. Конторовичу, И. Л. Бейгману, С. Я. Брауде, А. А. Коноваленко и Л. Г. Содину за многочисленные обсуждения работы.

Приложение 1

Формула (16) следует из подстановки асимптотики $K_0(x) \approx \sqrt{(\pi/2x)}\exp(-x) = y$ в области $x \gg 2$. При этом интеграл для асимптотической части сечения можно привести к известному [8]. Например, рассмотрим случай $m \sim l$, $l \sim n$ — (10), (15). Усреднение σ_{if} по угловой переменной ξ сведется к вычислению интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \mathcal{J}_p^2 (g \sin \xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{J}_p^2(gx)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

где из (16) p принимает значения или q_1, или q_1+k+1.

Точное значение

$$I(p) = \frac{g^{2p}\Gamma^2(p+1/2)}{\pi\Gamma(2p+1)\Gamma^2(p+1)}\, {}_2F_3\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2};\ 2p+1,\ p+1,\ p+1,\ -g^2\right).$$

Асимптотически точное решение для ширины линии имеет вид $\Delta\nu_L^{\text{ст}} \propto \sum_p I(p)$. Приближенное решение (17) следует из представления функции Бесселя в (15) тремя асимптотиками в областях: $gx \ll p$; $gx \sim p$; $gx \gg p$ [10]. После интегрирования асимптотик соответственно получаем: $I_1 = 2/[\pi^2 eg(2p+1)]$;

$$I_2 = 0.16\,(p^{1/3}/g);\quad I_3 = 2/(\pi^2 g)\,[\ln(g/2p)].$$

Основной вклад в эффективную ширину $\Delta\nu_L^{\text{ст}}$ вносит $I_2\,(g > 1)$:

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} \propto \sum_{q_1} \sigma_{if} \propto \sum_{p=1}^{\infty} I_2(p)\,[\psi(p+1)+\gamma],$$

где $\psi(p+1)$ — логарифмическая гамма-функция; $\gamma=0.5772$; $\psi(p+1)+\gamma \approx \ln(1+p)$. Просуммировав по индексу p, получим (17):

$$\Delta\nu_L^{\text{ст}} \propto g^{1/3}\ln(1+g)\,(v/\omega)^2.$$

Приложение 2

В формуле (15) рассматривается интервал $b_0 \leqslant x \leqslant 2$, в котором функции Макдональда представляем рядами [10]. Для случая $m \sim l$, $l \sim n$ интеграл (15) перепишем в виде

$$I = \int_0^{2-b_0} (2-\xi)\, \mathcal{J}_{q_1}^2 (aK_0(2-\xi))\, d\xi = \sum_{j=1}^{4} I_j,$$

где $x = 2-\xi$. Область интегрирования делится на четыре части, в каждой из которых $K_0(2-\xi)$ можно ограничить с точностью до 0.01 рядом, в котором ξ изменяется в пределах $0 \leqslant \xi \leqslant 0.5$. При этом в подынтегральные выражения сделаны следующие подстановки: для $I_1 : K_0(2-\xi) \approx 0.3\xi + 0.1 - 0.3\xi^2$; $I_2 : K_0(1.5-\xi) \approx 0.2 - 0.3\xi^2$; $I_3 : K_0(1-\xi) \approx 0.42 + 0.66\xi$; $I_4 : K_0(0.5-\xi) \approx -\ln(0.5-\xi_4)+0.11$, где $0 \leqslant \xi_4 \leqslant 0.5 - b_0$.

По аналогии с вычислениями асимптотик в приложении 1, изменив порядок интегрирования по ξ и суммирования по q_1, получаем $\sum_{q_1}\sum_{j=1}^{3} I_j \propto g^{1/3}$; для области I_4 результат не зависит от параметра g, т. е. $\sum_{q_1} I_4 = 0.08$. Аналогичные расчеты для других асимптотик по квантовым числам m/l и l/n с помощью формул (10)—(12), (15) проведены методом равномерно-асимптотических аппроксимаций. Из расчетов следует, что для этих случаев различие появляется только в численном коэффициенте с максимальным отклонением от формул (17), (18) в 1.25 раза.

1. *Бейгман И. Л.* Переходы между высоковозбужденными уровнями в борновском приближении // Физика атомных столкновений и спектроскопия плазмы.— М.: Наука, 1980.— С. 130—142.— (Тр. Физ. ин-та АН СССР; Т. 119).
2. *Бейгман И. Л.* Переходы между высоковозбужденными уровнями в квазиклассическом приближении // Там же.— С. 143—157.
3. *Бейгман И. Л., Вайнштейн Л. А., Собельман И. И.* О квазиклассическом приближении в теории неупругих столкновений высоковозбужденных атомов с заряженными частицами // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1969.—**57**, № 5.— С. 1703—1709.
4. *Ершов А. А., Илясов Ю. П., Лехт Е. Е. и др.* Низкочастотные радиолинии возбужденного углерода в направлении Кассиопеи А. Наблюдения на частотах 42.58 и 84 МГц // Письма в Астрон. журн.— 1984.—**10**, № 11.— С. 833—845.
5. *Казанцев А. П., Покровский В. Л.* Теория возмущений для высоковозбужденных состояний // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1983.—**85**, № 6.— С. 1917—1935.
6. *Коноваленко А. А.* Наблюдения рекомбинационных линий углерода на декаметровых волнах в направлении источника Кассиопея А // Письма в Астрон. журн.— 1984.—**10**, № 11.— С. 846—853.
7. *Коноваленко А. А., Содин Л. Г.* О линии поглощения 26.13 МГц в направлении Кассиопеи А // Там же.— 1981.—**7**, № 7.— С. 402—405.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.—750 с.
9. *Смирнов Г. Т., Сороченко Р. А., Панконин В.* Штарковское уширение рекомбинационных линий в туманности Ориона.— М., 1982.—24 с.— (Препринт / АН СССР. Физ. ин-т; № 204).
10. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.—830 с.
11. *Banks D., Percival I. C., Richards D.* More cross-sections for the excitation of highly excited atoms by electrons // Astrophys. Lett.— 1973.—**14**, N 3.— P. 162—163.
12. *Gee C. S., Percival I. C., Richards D.* Excitation of highly excited hydrogenic ions and atoms by charged particles // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.— 1976.—**175**, N 1.— P. 209—216.
13. *Percival I. C., Richards D.* Excitation of highly excited hydrogenic ions and atoms by charged particles // J. Phys. B: Atom. and Mol. Phys.— 1971.—**4**, N 6.— P. 918—939.
14. *Richards D.* Excitation of highly excited hydrogenic ions and atoms by charged particles // Ibid.— 1973.—**6**, N 5.— P. 823—836.

Радиоастрон. ин-т АН УССР,
Харьков

Поступила в редакцию
30.09.86