

УДК 524.5

О точечном взрыве в неоднородной среде с плоскостью симметрии

И. Г. Коваленко

Рассмотрена задача о распространении ударной волны (УВ) от точечного взрыва в среде с экспоненциальным распределением плотности и плоскостью симметрии. В приближении Компанейца получены решения, описывающие эволюцию УВ в форме расширяющейся «восьмерки». В случае взрыва над плоскостью симметрии возможно образование торондальных структур вещества повышенной плотности, которые можно наблюдать в рентгеновском диапазоне. Показано, что часть энергии взрыва, идущая на генерацию УВ в плоскости Галактики, не превышает 10^{-7} для волн, проходящих расстояния $r \geq 1$ кпк.

ON THE POINT EXPLOSION IN THE NONUNIFORM MEDIUM WITH A SYMMETRY PLANE, by Kovalenko I. G.—The problem of propagation of a shock wave from a point explosion in the medium with exponential density distribution and with a symmetry plane is considered. Using the Kompaneets method the solutions of 8-shaped expanding shock envelope are obtained. In case of explosion above the symmetry plane a formation of toroidal structures of increased density is possible, which can be observed in X-rays. It is shown that a part of energy which generates a shock wave in the galactic plane does not exceed 10^{-7} if the wave reaches $r \geq 1$ kpc.

Введение. Исследование динамики ударных волн в неоднородных средах требует, как правило, громоздких численных расчетов, которые еще больше усложняются при учете объемных потерь энергии, неизбежных в разреженном межзвездном газе. В этих условиях применение удачных адекватных приближений не только упрощает численные модели, но и часто допускает возможность аналитического описания УВ. Такими приближениями являются, например, приближение Компанейца [3], приближение 1.5-мерной гидродинамики [1]. Их использование позволяет выявить многие качественные особенности динамики УВ.

При рассмотрении крупномасштабных ударных волн в межзвездной среде, возбуждаемых вспышками сверхновых или звездным ветром, обычно полагают, что выделение энергии происходит в плоскости Галактики (см., например, [12, 13]) или на достаточно больших расстояниях от нее, так что УВ не пересекает плоскости симметрии [10, 11]. Вместе с тем пересечение плоскости симметрии может сопровождаться качественно новыми эффектами, такими, например, как формирование структур, близких к торондальным, пересечение фронтов УВ, способное резко увеличивать плотность газа и тем самым инициировать звездообразование за фронтом, и т. д. Изучению такого рода явлений посвящена данная работа.

Постановка задачи. Основные уравнения. При изучении распространения ударных волн в гало обычно рассматривают гауссов или экспоненциальный законы распределения газа [13]. Эти законы оказываются принципиально разными: первое распределение — гладкое на плоскости симметрии; второе, взятое в виде $\exp(-|z|/z_0)$, — имеет скачок производной $\partial\rho/\partial z$ при $z=0$. Поскольку аналитическое решение для точечного взрыва в среде с гауссовым распределением плотности получить не удастся, мы используем модельный гладкий вид распределения $\rho \propto \text{ch}^{-2}(z/z_0)$.

Для описания распространения сильной адиабатической УВ от точечного взрыва применим приближенный метод [3]. Как и в [3], предполагаем, что давление распределено равномерно по всему объе-

му, ограниченному УВ. Тогда скорость фронта УВ определяется уравнением

$$u^2 = [\lambda (\gamma^2 - 1)/(2\rho(z))] [E/V(t)], \quad (1)$$

где E — энергия взрыва; $\rho(z)$ — невозмущенная плотность; V — объем, ограниченный УВ; γ — показатель адиабаты; λ — коэффициент, учиты-

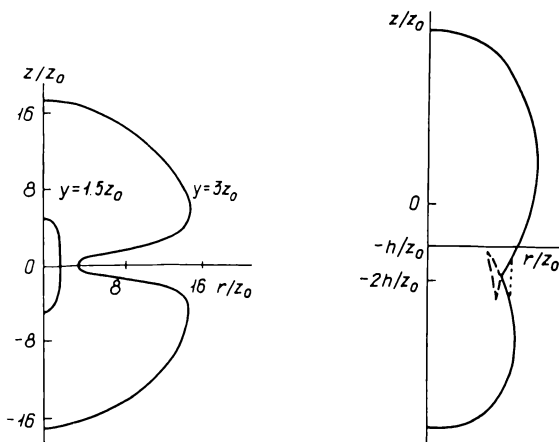


Рис. 1. Сечение фронта УВ в разные моменты времени для взрыва в атмосфере $\rho = \rho_0(\text{ch}^{-2}(z/z_0) + 0.01)$

Рис. 2. Сечение фронта УВ в среде $\rho = \rho_0 \exp(-|z+h|/z_0)$. Штриховой линией показаны участки УВ, движущиеся внутри полости, пунктирной — волна Маха

вающий отклонение давления вблизи фронта УВ от среднего по объему ($\lambda \approx 2 - 3$). Закон движения фронта определяется уравнением

$$(\partial r/\partial t)^2 = u^2 [1 + (\partial r/\partial z)^2]. \quad (2)$$

Удобно перейти к новому масштабу времени $y = \int_0^t V \sqrt{\frac{\lambda (\gamma^2 - 1) E}{2\rho_0 V(t)}} dt$,

тогда уравнение (2) примет вид

$$(\partial r/\partial y)^2 = \rho_0/\rho(z) [1 + (\partial r/\partial z)^2]. \quad (3)$$

Динамика фронта УВ. Рассмотрим вначале задачу о распространении сильной УВ от точечного взрыва в среде с распределением плотности $\rho = \rho_0(\text{ch}^{-2}(z/z_0) + \alpha)$, $\alpha = \text{const} \geq 0$. Уравнение (3) решается методом разделения переменных [3]. Вывод формул приведен в приложении, сечения фронта УВ для разных моментов времени представлены на рис. 1.

В момент времени $y/z_0 = \pi(1+\alpha)/2$ конфигурация оболочки переходит из овальной в тип «восьмерки». Полученное решение согласуется с результатами численных расчетов [13]. В случае $\alpha=0$ удается в явном виде выразить $r(z, y)$:

$$r/z_0 = \arcsin \sqrt{\sin^2(y/z_0) - \text{sh}^2(z/z_0) \cos^2(y/z_0)}. \quad (4)$$

В данном случае фронт УВ представляет собой вытягивающуюся, преимущественно в z -направлении, оболочку, причем верхняя точка фронта удаляется на бесконечность за конечное время $y = \pi z_0/2$. Это объясняется тем, что на больших z имеем $\rho \propto \exp(-2z/z_0)$, что соответствует известному эффекту «прорыва атмосферы» в среде с экспоненциальным распределением плотности [3].

Рассмотрим динамику УВ от точечного взрыва в среде $\rho = \rho_0[\exp(-|z+h|/z_0) + \alpha]$. Такой выбор функции распределения плот-

ности означает, что взрыв происходит на уровне $z=0$ на высоте h над плоскостью симметрии.

Решение представлено формулами (19)—(24) (см. приложение). По мере пересечения плоскости симметрии УВ устремляется в область пониженной плотности нижнего ($z < -h$) полупространства, стремясь расширяться как по координате z , так и по радиусу. При этом объем, ограниченный УВ, со временем образует полость типа «восьмерки».

Однако в момент образования перетяжки на фронте УВ (это происходит при $y/z_0 = 4 \sqrt{1 - \exp(-h/z_0) + 4\alpha \exp(h/(2z_0)) \operatorname{arccos} \exp(-h/(2z_0))}$) решение $r(z, y)$ становится многозначным, волна начинает самопересекаться (рис. 2), в отличие от случая $\rho = \rho_0 (\operatorname{ch}^{-2}(z/z_0) + \alpha)$, когда профиль фронта УВ в течение всего времени остается гладким. Самопересечение фронта возникает и в случае $\alpha = 0$, т. е. УВ образует оболочку типа «восьмерки», в то время как форма УВ от точечного взрыва в атмосфере $\rho = \rho_0 \operatorname{ch}^{-2}(z/z_0)$ вплоть до прорыва остается овальной. Если также допустить, что $h=0$, то решение $r(z, y)$ переходит в решение Компанейца, для $z < 0$ отраженное относительно плоскости симметрии

$$r/z_0 = 2 \operatorname{arccos} \{ \operatorname{ch}(z/2z_0) - [\exp(|z/(2z_0)|/2) |y/(2z_0)|]^2 \}. \quad (5)$$

Обсуждение. Появление самопересечения ударного фронта не будет неожиданным, если учесть, что уравнение (3) совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби, которое описывает распространение лучей звуковых волн в неоднородных средах в приближении геометрической акустики. Для геометрической акустики характерно возникновение особенностей звуковых волн при их отражении или преломлении [4]. Такие особенности, или каустики, проявляющиеся как самопересечения волнового фронта, приводят к повышенной интенсивности волны. С другой стороны, известны примеры самопересечения ударных волн при их рефракции в неоднородной среде [6, 7].

Данная задача представляет собой пример возникновения каустики после преломления ударной волны на границе раздела двух сред: $\rho \propto \exp[-(z+h)z_0]$ и $\rho \propto \exp[(z+h)/z_0]$. Однако следует отметить, что для тех участков фронта, которые движутся внутри ударной полости в возмущенной среде, приближение Компанейца нарушается. Для описания их движения необходимо знать распределение плотности за фронтом УВ. Можно лишь указать, что это будет расширяющееся внутрь полости торoidalное возмущение повышенной плотности, перераспределяющее вещество и энергию за фронтом. Этот вопрос требует отдельного детального анализа. В то же время приближение Компанейца остается справедливым для внешних участков УВ, пока размеры возмущения намного меньше размеров всей полости и его влиянием на динамику фронта УВ в целом можно пренебречь.

Кроме того, взаимодействие ударных волн под большими углами ($\leq 180^\circ$) должно быть нерегулярным [5] — перед изломом появится волна Маха, которая будет сглаживать линию фронта (рис. 2). Но и в этом случае области, прилегающие к фронту волны Маха, характеризуются более сильным увеличением плотности и давления, чем на самой УВ [5, 9]. Вещество в таком торе испытывает двукратное прохождение по нему ударной волны, а следовательно, плотность может значительно увеличиться (до 16 раз) по сравнению с невозмущенной. Такие кольцевые или торoidalные структуры повышенной плотности должны наблюдаться в рентгеновском и УФ-, а для очень сильных ударных волн — и в оптическом диапазонах. Используя для оценок закон излучения при свободно-свободных переходах, найдем отношение потока от возмущенных областей к фоновому потоку:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{фон}}} = \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{E}{2kT_0} - \frac{E}{2kT} \right) \frac{K_0 [E/(2kT)]}{K_0 [E/(2kT_0)]} \frac{\Delta H}{H}, \quad (6)$$

где ΔH — толщина тора на луче зрения; H — толщина слоя газа; n_0 и n , T_0 и T — концентрация и температура соответственно невозмущенного и возмущенного газа; K_0 — модифицированная функция Бесселя. Полагая $\Delta H = 10$ пк, $H = 5$ кпк, $T_0 = 10^6$ К, $T = 10^7$ К, $n/n_0 = 16$, для энергий $E = 3 - 300$ эВ найдем $\varepsilon/\varepsilon_{\text{фон}} = 0.25 - 12$. Аналогичный механизм образования сильно излучающих волокон газа в результате деформации ударного фронта в неоднородной среде предложен в [7] для объяснения природы волокнистых туманностей.

Оценим теперь скорость фронта УВ на уровне $z=0$ в случае взрыва в плоскости симметрии. Из (17) и (18) находим закон движения фронта в плоскости

$$r_0(y) = y/\sqrt{1+\alpha} \quad (7)$$

и уравнение для верхней точки фронта

$$y/z_0 = \text{arctg} [\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{1+\alpha} \text{ch}^2(z/z_0)] + \sqrt{\alpha} \text{arsh} [\sqrt{\alpha/(1+\alpha)} \text{sh}(z/z_0)]. \quad (8)$$

Отсюда для больших значений z/z_0 (точнее, для $\exp(z/z_0) \gg 2/\sqrt{\alpha}$, что соответствует стадии расширения оболочки в виде хорошо сформировавшейся «восьмерки») с учетом, что $r_0 \approx y$, имеем асимптотический закон движения $z_2(r_0)$:

$$z_2 = [r_0 - (\pi z_0/2)]/\sqrt{\alpha}. \quad (9)$$

Объем, ограниченный фронтом УВ, на больших временах можно оценить как

$$V \approx 4\pi z_2^3/3. \quad (10)$$

Скорость фронта в плоскости симметрии совпадает со скоростью линии пересечения фронта с плоскостью (рис. 1) и определяется так:

$$v = (dr_0/dy)(dy/dt) = \sqrt{[\lambda(\gamma^2 - 1)E]/[2(1+\alpha)\rho_0 V]}, \quad (11)$$

или, с учетом (9) и (10),

$$v = \alpha^{3/4} (E/\rho_0)^{1/2} [r_0 - (\pi z_0/2)]^{-3/2}. \quad (12)$$

Здесь мы полагаем $\gamma = 5/3$, $\lambda = 3$. Из условия существования сильной ударной волны $v > c_s$, где c_s — скорость звука в окружающем газе, найдем максимальное расстояние, на которое может распространиться ударная волна

$$r_0 \leq \pi z_0/2 + 18\alpha^{1/2} E^{1/3} \rho_0^{-1/3} c_s^{-2/3}. \quad (13)$$

С распространением сильных ударных волн из центра Галактики связывалось образование кольцевых структур в диске Галактики [2]. Полагая $\alpha = 10^{-4}$, $z_0 = 200$ пк, находим, что для расстояний (проходимых УВ) порядка 1 кпк требуется энергия взрыва $E > 10^{47}$ Дж. Учет потерь энергии за фронтом УВ еще больше усилит ограничения на энерговыделение.

Представляет интерес оценка той части энергии, которая уходит на генерацию УВ в диске Галактики. Пусть H — толщина диска, тогда энергия вещества, движущегося за УВ в плоскости, равна

$$\Delta E = \rho \Delta V / (\gamma - 1) = \pi H r_0^2 \rho / (\gamma - 1), \quad (14)$$

где ΔV — объем, ограниченный УВ в диске. Используя (9) и (10), найдем

$$\Delta E/E = \Delta V/V = (3/4) \{H r_0^2 \alpha^{3/2} / [r_0 - (\pi z_0/2)]^3\}. \quad (15)$$

Для взрыва с энергией $E = 10^{47}$ Дж, $H = 50$ пк, $r_0 = 1$ кпк это отношение составляет 10^{-7} .

Автор благодарен С. А. Спичу и В. А. Кролю за полезное обсуждение, а также Ю. А. Щекиннову за помощь в работе.

Приложение

Уравнение (3) интегрируется стандартным методом:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \eta^{-1}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \pm \sqrt{(\rho(z)/\rho_0 \eta^{-2}) - 1}, \quad r = \eta^{-1} \left(y \pm \int_0^z \sqrt{(\rho(z)/\rho_0) - \eta^2} dz \right) + b(\eta),$$

$$y \pm \int_0^z \rho(z)/(\rho_0 \sqrt{(\rho(z)/\rho_0) - \eta^2}) dz + \frac{db}{d\eta^{-1}} = 0.$$

Рассмотрим вначале случай $\rho(z) = \rho_0 (\text{ch}^{-2}(z/z_0) + \alpha)$. На малых временах, пока $y/z_0 < \pi(1 + \alpha)/2$, движение фронта описывается решением с $b(\eta) = 0$

$$\begin{aligned} r/z_0 &= \pm [\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \arcsin [\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{(\eta^2 - \alpha)^{-1} - 1}], \\ y/z_0 &= \pm [\alpha/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \arcsin [\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{(\eta^2 - \alpha)^{-1} - 1}] \pm \\ &\quad \pm \arctg [\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{1 - (\eta^2 - \alpha) \text{ch}^2(z/z_0)}] \end{aligned} \quad (17)$$

в области $|z| \leq |z_2|$, где z_2 — положение верхней точки фронта. Верхний знак соответствует области $z > 0$, нижний — $z < 0$. Уровень z_2 определяется из (17) при подстановке $\eta^2 = 0$, на плоскости симметрии $\eta^2 = 1 + \alpha$. Для моментов времени $y/z_0 \geq \pi(1 + \alpha)/2$ областью определения (17) становится $|z_+| \leq |z| \leq |z_2|$, а в области $|z| \leq |z_+|$ появляется решение

$$\begin{aligned} r/z_0 &= \pm [\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] [\pi - \arcsin (\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{(\eta^2 - \alpha)^{-1} - 1})], \\ y/z_0 &= \pm [-\alpha/\sqrt{\eta^2 - \alpha} \arcsin (\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{(\eta^2 - \alpha)^{-1} - 1}) + \\ &\quad + \alpha\pi/\sqrt{\eta^2 - \alpha} - \arctg (\text{sh}(z/z_0)/\sqrt{1 - (\eta^2 - \alpha) \text{ch}^2(z/z_0)}) + \pi], \end{aligned} \quad (18)$$

которое автоматически «сшивается» с (17) на линиях $\pm z_+$ при $\eta^2 = \text{ch}^{-2}(z/z_0) + \alpha$. Здесь в (18) мы полагаем $b(\eta) = \pi\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha} - \pi/\eta - \alpha\pi/(\eta \sqrt{\eta^2 - \alpha})$, $1 + \alpha \geq \eta^2 \geq \text{ch}^{-2}(z/z_0) + \alpha$.

Интегрирование (16) в случае $\rho(z) = \rho_0 \left(\exp\left(-\frac{|z+h|}{z_0}\right) + \alpha \right)$ дает

$$\begin{aligned} r/z_0 &= \pm [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[\arccos \left(\exp\left(\frac{h}{2z_0}\right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \arccos \left(\exp\left(\frac{z+h}{2z_0}\right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$y/z_0 = \pm 2 \left[\sqrt{\exp\left(-\frac{h}{z_0}\right) + \alpha - \eta^2} - \sqrt{\exp\left(-\frac{z+h}{z_0}\right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0,$$

в областях $z_2 \geq z \geq z_+ > 0$, $0 \leq \eta^2 \leq \exp\left(-\frac{z+h}{z_0}\right) + \alpha$ (верхний знак решения) и $z_1 \leq z \leq z_- < 0$, $0 \leq \eta^2 \leq \exp\left(-\frac{h}{z_0}\right) + \alpha$ (нижний знак). В промежуточной области поверхность фронта описывается решением с

$$\begin{aligned} b(\eta) &= 4z_0\eta^{-1} \left[\sqrt{\eta^2 - \alpha} \arccos \left(\exp\left(\frac{h}{2z_0}\right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) - \sqrt{\exp\left(-\frac{h}{z_0}\right) + \alpha - \eta^2} \right]; \\ r/z_0 &= [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[\arccos \left(\exp\left(\frac{h}{2z_0}\right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \arccos \left(\exp\left(\frac{z+h}{2z_0}\right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$y/z_0 = 2 \left[\sqrt{\exp\left(-\frac{h}{z_0}\right) + \alpha - \eta^2} + \sqrt{\exp\left(-\frac{z+h}{z_0}\right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0,$$

$$z_- \leq z \leq z_+, \quad \exp\left(-\frac{h}{z_0}\right) + \alpha \geq \eta^2 \geq \exp\left(-\frac{z+h}{z_0}\right) + \alpha.$$

Формулы (19), (20) совпадают с известным решением [8] до тех пор, пока УВ находится в верхнем полупространстве. Для моментов $y/z_0 > 2[\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{\exp(-h/z_0) + \alpha}]$

когда z_1 пересекает плоскость симметрии, в области $z < -h$ появляется решение, описывающее преломленную УВ:

$$\begin{aligned} r/z_0 &= [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[-\arccos \left(\exp \left(\frac{h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) + \right. \\ &+ 2\arccos \sqrt{\eta^2 - \alpha} - \arccos \left(\exp \left(-\frac{z+h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \left. \right], \\ y/z_0 &= 2 \left[-\sqrt{\exp \left(-\frac{h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} + 2\sqrt{1 + \alpha - \eta^2} - \right. \\ &\left. - \sqrt{\exp \left(\frac{z+h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0, \end{aligned} \quad (21)$$

$0 \leq \eta^2 \leq \eta_0^2$, которое получается из (16) с учетом того, что интегралы вида $\int_0^z f(\rho/\rho_0) dz$

заменяются на $\int_0^{-h} f \left[\exp \left(-\frac{z+h}{z_0} \right) \right] dz + \int_{-h}^z f \left[\exp \left(\frac{z+h}{z_0} \right) \right] dz$, и «сшивается» с (19)

на плоскости симметрии при $\eta^2 = \eta_0^2$; $\eta_0(y)$ определяется из (19) при подстановке $z = -h$. Отраженная волна в данном приближении не учитывается. По мере того как линия z_- пересекает плоскость симметрии, в нижнем полупространстве имеем решение

$$\begin{aligned} r/z_0 &= [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[\arccos \left(\exp \left(\frac{h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) + \right. \\ &+ 2\arccos \sqrt{\eta^2 - \alpha} - \arccos \left(\exp \left(-\frac{z+h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \left. \right], \\ y/z_0 &= 2 \left[\sqrt{\exp \left(-\frac{h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} + 2\sqrt{1 + \alpha - \eta^2} - \right. \\ &\left. - \sqrt{\exp \left(\frac{z+h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0, \end{aligned} \quad (22)$$

«сшиваемое» с (20) при $\eta^2 = \eta_0^2$ и с (21) при $\eta^2 = \alpha + \exp(-h/z_0)$. Далее, в момент времени $y/z_0 = 4\sqrt{1 - \exp(-h/z_0)} + 4\alpha \exp(h/2z_0) \arccos \exp(-h/(2z_0))$ между решениями (22) и (21) дополнительно образуются решения

$$\begin{aligned} r/z_0 &= [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[\arccos \left(\exp \left(\frac{h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) + \right. \\ &+ 2\arccos \sqrt{\eta^2 - \alpha} + \arccos \left(\exp \left(-\frac{z+h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} y/z_0 &= 2 \left[\sqrt{\exp \left(-\frac{h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} + 2\sqrt{1 + \alpha - \eta^2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\exp \left(\frac{z+h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r/z_0 &= [2\eta/\sqrt{\eta^2 - \alpha}] \left[-\arccos \left(\exp \left(\frac{h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) + \right. \\ &+ 2\arccos \sqrt{\eta^2 - \alpha} + \arccos \left(\exp \left(-\frac{z+h}{2z_0} \right) \sqrt{\eta^2 - \alpha} \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} y/z_0 &= 2 \left[-\sqrt{\exp \left(-\frac{h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} + 2\sqrt{1 + \alpha - \eta^2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\exp \left(\frac{z+h}{z_0} \right) + \alpha - \eta^2} \right] + \alpha r/\eta z_0, \end{aligned}$$

причем (23) «сшивается» с (22), а (24) с (21) при $\eta^2 = \alpha + \exp[(z+h)/z_0]$, а (23) и (24) «сшиваются» между собой при $\eta^2 = \alpha + \exp(-h/z_0)$.

Окончание см. на с. 96

1. Бисноватый-Коган Г. С., Блишников С. И. Сферизация остатков несимметричного взрыва сверхновой в однородной среде // Астрон. журн.—1982.—59, вып. 5.— С. 876—887.
2. Колесник И. Г., Силич С. А., Фомин П. И. Активность галактических ядер и кольцевые структуры в нормальных галактиках // Письма в Астрон. журн.—1979.—5, № 11.— С. 567—570.
3. Компанец А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере // Докл. АН СССР.—1960.—130, № 5.— С. 1001—1003.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.—304 с.
5. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны.— М.: Изд-во иностр. лит., 1950.—426 с.
6. Островский Л. А., Пелиновский Е. П. Рефракция нелинейных морских волн в береговой зоне // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.—1975.—11, № 1.— С. 67—74.
7. Пикельнер С. Б. Спектрофотометрическое исследование механизма возбуждения волокнистых туманностей // Изв. Крым. астрофиз. обсерватории.—1954.—12.— С. 93—117.
8. Силич С. А., Фомин П. И. Точечный взрыв в экспоненциальной атмосфере с ненулевой асимптотой // Докл. АН СССР.—1983.—268, № 4.— С. 861—864.
9. Шиндяпин Г. П. Анализ течения за фронтом ударной волны при нелинейных взаимодействиях ударных волн // Аэродинамика.—1983. № 9/12.— С. 67—73.
10. Chevalier R. A., Gardner J. The evolution of supernova remnants. II. Models of an explosion in a plane-stratified medium // Astrophys. J.—1974.—192, N 2.— P. 457—463.
11. Falle S. A. E. G., Garlick A. R., Pidsley P. H. Strong explosions in plane-stratified media // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—1984.—208, N 4.— P. 925—939.
12. Kafatos M., Sofia S., Bruhweiler F., Gull T. The evolution of supernova remnants in different galactic environments, and its effects on supernova statistics // Astrophys. J.—1980.—242, N 1.— P. 294—305.
13. Sofue Y. Shock wave from a Galactic nucleus into a halo and intergalactic space // Publ. Astron. Soc. Jap. — 1984. — 36, N 3.— P. 539—550.