

УДК 524.6-327

Исследование вращения Галактики методом максимального правдоподобия

И. В. Петровская

Для определения кинематических характеристик подсистемы нейтрального водорода в Галактике по всему профилю линии 21 см как в области галактической плоскости, так и вне ее предлагается использовать метод максимального правдоподобия. Вычисления, выполненные для внешней области галактической плоскости ($z=0, R>R_0$), не обнаруживают максимума кривой вращения вплоть до расстояния 20 кпк от центра Галактики.

INVESTIGATION OF GALACTIC ROTATION BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD, by Petrovskaya I. V.—The maximum likelihood method is proposed for investigation of the rotation law of the neutral hydrogen subsystem both for the galactic plane and for the regions outside this plane. The whole 21 cm line profile is used. The calculations of the rotation curve at the galactic plane beyond the solar circle ($z=0, R>>R_0$) gave no evidence for a turnover up to the distance of 20 kpc from the galactic centre.

Введение. Идея использования всего профиля линии Н I 21 см для исследования кинематических характеристик Галактики предложена в 1964 г. [1]. При этом применяется выведенное в [18] соотношение между оптической толщиной τ , плотностью N и градиентом лучевой скорости v нейтрального водорода в излучающей точке на луче зрения

$$\tau(v, l, b) = kN / |dv/dr|, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности; r — расстояние этой точки от наблюдателя (рис. 1), причем получаемая из наблюдений яркостная температура связана с оптической толщиной соотношением $\tau = -\ln(1 - T/126 \text{ K})$.

Примем строго круговую картину движения водородных облаков в плоскостях, параллельных плоскости симметрии Галактики $z=0$. Тогда лучевая скорость облаков в точке с координатами l, b равна

$$v = \Omega \sin l \cos b, \quad (2)$$

где

$$\Omega = R_0(\omega - \omega_0) \quad (3)$$

— функция Камма; ω_0 и R_0 — угловая скорость местного стандарта покоя и расстояние Солнца от центра Галактики соответственно; $\omega = \omega(R, z)$ — угловая скорость центроида водородных облаков в излучающей точке; R и z — галактоцентрические координаты этой точки. Для удобства будем выражать z в единицах R_0 , а вместо R введем также безразмерную величину $x = R/R_0$.

Исследование закона вращения в плоскости $z=0$. Рассмотрим случай, когда луч зрения лежит в галактической плоскости, т. е. $b=0$. Тогда (1) с учетом (2) и (3) принимает вид

$$\tau = kN / (|d\Omega/dx| \cdot |\sin l| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l}). \quad (4)$$

В наших предыдущих исследованиях [7, 8] выражение (4) заменялось системой n уравнений

$$\tau(\Omega, l_i) |\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i} y = 1, \quad (5)$$

где n — количество профилей в направлениях, пересекающих окружность радиуса x . Система (4) с неизвестным $y = |d\Omega/dx| / (kN)$, зави-

сящим только от x , решалась по способу наименьших квадратов для фиксированного $x = x_*$ и ряда значений Ω . За «наивероятнейшее» Ω , соответствующее расстоянию x_* , принималось такое $\Omega = \Omega_*$, при котором сумма квадратов остаточных погрешностей системы (5) минимальна.

Ввиду возможной зависимости неизвестного y от x в (5) этот метод может давать систематически смещенные результаты. Подобные эффекты могут возникать также вследствие невозможности изолировать получаемую из наблюдений величину $1/\tau_i$ в правой части (5) из-за

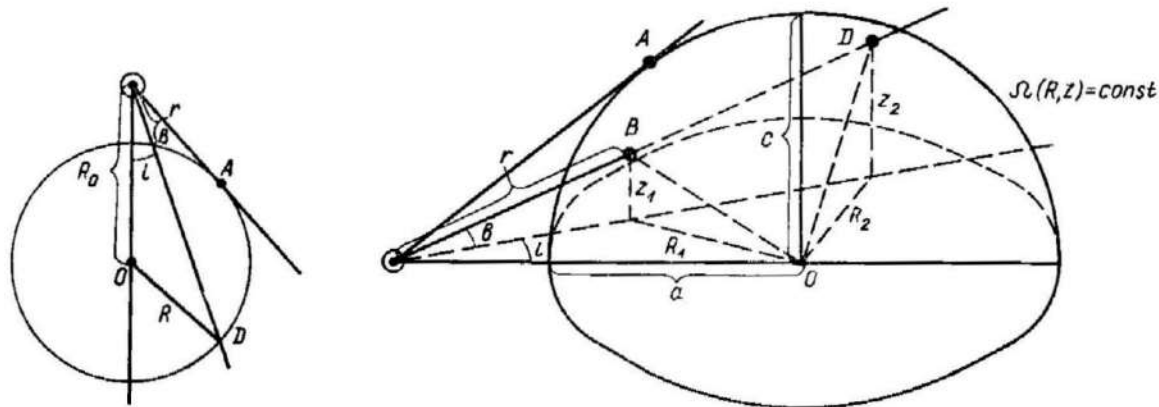


Рис. 1. Расположение излучающих точек в галактической плоскости на окружности радиуса R : O — центр Галактики; точки B и D посылают излучение одинаковой частоты; A — точка касания лучом зрения окружности радиуса R

Рис. 2. Расположение излучающих точек на поверхности равной угловой скорости: O — центр Галактики; точки B и D посылают излучение одинаковой частоты; A — точка касания лучом зрения поверхности равной угловой скорости

наличия большого числа малых интенсивностей. Поэтому в данной работе для определения закона вращения Галактики по профилям линии 21 см предлагается более строгий метод максимального правдоподобия.

Введем для плотности и градиента функции Камма степенную зависимость от расстояния до центра Галактики

$$N = k_1 x^{-\mu}; \quad |d\Omega/dx| = k_2 x^{-\rho-1} \quad (6)$$

и обозначение $\zeta = k k_1 / k_2$.

Предположим, что отклонения от круговых движений, флуктуации плотности и инструментальные погрешности вызывают флуктуации получаемой из наблюдений величины τ_i по закону Гаусса около теоретического значения

$$\tau = \zeta x^{\rho-\mu+1} / (|\sin l| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l}) \quad (7)$$

с плотностью вероятности

$$f_i(\tau_i, \zeta, x, \sigma^2) = [V \rho_i / (\sigma \sqrt{2\pi})] \exp[-\rho_i (\tau_i - \tau)^2 / (2\sigma^2)]. \quad (8)$$

В (4) и (7) ζ, x — параметры, оценки которых должны дать максимальное значение функции правдоподобия

$$L = (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n} (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \rho_i \left(\tau_i - \frac{\zeta x^{\rho-\mu+1}}{|\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i}} \right)^2 \right\}, \quad (9)$$

где ρ_i — вес i -го наблюдения. В соответствии с методом максимального правдоподобия эти оценки находим из условий

$$\partial \ln L / \partial \zeta = 0; \quad \partial \ln L / \partial x = 0 \quad (10)$$

(см., например, [4]). Первое из них дает

$$\zeta = \Sigma \frac{\rho_i \tau_i}{|\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i}} / \Sigma \frac{\rho_i x^{m+1}}{\sin^2 l_i (1 - x^{-2} \sin^2 l_i)}, \quad (11)$$

второе —

$$\Sigma \rho_i \left(\tau_i - \frac{\zeta x^{m+1}}{|\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i}} \right) \frac{|\sin l_i|}{(1 - x^{-2} \sin^2 l_i)^{3/2}} \equiv F = 0. \quad (12)$$

В (12) введена новая константа $m = \rho - \mu$.

Зафиксируем какое-нибудь значение функции Камма, например $\Omega = \Omega_1$. Предлагаемый метод заключается в оценке параметров ζ и x , соответствующих значению Ω_1 . Перебирая различные x , вычисляем для каждого из них $y = \zeta x^{m+1}$ по (11), а также значение функционала (12). То расстояние от центра Галактики $x = x_*$, при котором выполняется условие $F(x_*) = 0$, принимаем за истинное, соответствующее выбранному значению Ω_1 . Повторяя аналогичную процедуру для $\Omega = \Omega_2, \dots, \Omega = \Omega_h$, получаем зависимость Ω от x , дающую закон вращения Галактики

$$\Omega = \Omega(x). \quad (13)$$

Оценивая по сглаженной зависимости (13) показатель степени ρ в (6), который может в общем случае изменяться с изменением Ω , находим $\mu = \rho - m$, определив предварительно значение m по зависимости y от x . В отдаленных от центра областях Галактики случай $\rho = 1.5$ соответствует закону Кеплера, $\rho = 1$ — плоской кривой вращения ($\omega R \equiv \Theta = \text{const}$), $\rho = 1.2$ дает приблизительно кривую вращения Шмидта. При $\rho = 0$ получаем $\Omega \propto -\ln x$.

Параметр μ определяет характер убывания плотности $N \propto x^{-\mu}$ с удалением от центра Галактики и может, как и ρ , изменяться с изменением Ω .

Область $|z| \geq 0$. В [2] метод наименьших квадратов определения закона вращения Галактики по всему профилю линии 21 см обобщен на случай $z \neq 0$ для внешней области ($x > 1$). Изложенный выше метод, основанный на принципе максимального правдоподобия, может быть также легко обобщен на эту область. Однако при $x > 1$ и $|z| > 0$ на результаты существенно может повлиять искривление водородного слоя, которое тоже можно учесть. Это требует специального исследования параметров искривления слоя, что и предполагается сделать в дальнейшем. Поэтому ограничимся рассмотрением области $x < 1$, в которой эффект искривления слоя незначителен.

Метод определения закона вращения с использованием всего профиля линии 21 см в области $R < R_0$ ($x < 1$) вне плоскости $z = 0$ предложен в [5]. При этом сделано предположение, что поверхности равной угловой скорости $\Omega(R, z) = \text{const}$ представляют собой поверхности вращения второго порядка. Как показали вычисления [5, 6], их можно представить частями сфероидальных поверхностей с отношением полуосей c/a . Луч зрения пересекает каждую из этих поверхностей в двух точках, посылающих излучение с одинаковой частотой (рис. 2, точки B и D). При этом закон вращения $\Omega = \Omega(a)$ в плоскости $z = 0$ предполагается известным, и ставится задача — определить для каждого значения Ω сжатие соответствующего сфероида.

Как показано в [5], при изложенных выше предположениях выражение (1) для оптической толщины принимает вид

$$\tau = \frac{kN(a) [1 - (\alpha' + \beta) (z_1^2 + z_2^2)/2]}{|d\Omega/d(a^2)| \cdot |\sin l| \gamma \cos^2 b}, \quad (14)$$

где

$$\alpha = a^2/c^2, \quad \gamma^2 = a^2 - \sin^2 l - (1 - a^2) \alpha \text{tg}^2 b. \quad (15)$$

При выводе (14) ход плотности на поверхности $\Omega = \text{const}$ представлен в виде $N = N(\alpha) (1 - \beta z^2)$.

В работах [5, 6] выражение (14) сводилось к избыточной системе уравнений с двумя неизвестными (зависящими только от α), которая, подобно системе (5), решалась по способу наименьших квадратов при фиксированных Ω и α . Для определения α , соответствующего выбранному Ω , метод максимального правдоподобия также представляется более надежным.

Запишем (14) в виде

$$\tau = \frac{\zeta [1 - \eta (z_1^2 + z_2^2)]}{|\sin l_i| \gamma \cos^2 b} = \zeta (M_i - \eta P_i), \quad (16)$$

где

$$M_i = \frac{1}{\gamma_i |\sin l_i| \cos^2 b_i}; \quad P_i = \frac{z_1^2 + z_2^2}{\gamma_i |\sin l_i| \cos^2 b_i}. \quad (17)$$

Примем для получаемой из наблюдений величины τ_i гауссово распределение

$$f(\tau_i, \zeta, \alpha, \eta, \sigma^2) = [V \overline{p_i} / (\sigma \sqrt{2\pi})] \exp [(-p_i / (2\sigma^2)) (\tau_i - \tau)^2]. \quad (18)$$

Функция правдоподобия в этом случае имеет вид

$$L(\tau_1, \dots, \tau_n, \zeta, \alpha, \eta, \sigma^2) = (p_1, \dots, p_n)^{1/2} (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n}. \quad (19)$$

Условие $\partial \ln L / \partial \zeta = 0$ в первом приближении при $\eta \approx 0$ дает

$$\zeta_0 = \Sigma p_i \tau_i M_i / (\Sigma p_i M_i^2). \quad (20)$$

Из условия $\partial \ln L / \partial \eta = 0$ получаем

$$\eta = \Sigma p_i P_i (M_i - \tau_i / \zeta_0) / (\Sigma p_i P_i^2), \quad (21)$$

откуда вычисляем уточненное значение параметра ζ

$$\zeta_1 = \Sigma p_i \tau_i (M_i - \eta P_i) / [\Sigma p_i (M_i^2 - 2\eta M_i P_i)]. \quad (22)$$

Для определения параметра α , соответствующего выбранному $\Omega = \Omega_*$, получаем соотношение

$$F(\alpha) = \Sigma p_i [\tau_i - \zeta (M_i - \eta P_i)] (M_i - \eta P_i) \text{tg}^2 b_i / \gamma_i^2 = 0, \quad (23)$$

которое следует из условия $\partial \ln L / \partial \alpha = 0$. Вычисляя $F(\alpha)$ для $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, находим такое $\alpha = \alpha_*$, при котором $F(\alpha_*) = 0$. Повторяя эту процедуру для ряда значений Ω , находим зависимость $\alpha = \alpha(\Omega)$, которая вместе с известной ранее кривой вращения (13) для плоскости Галактики определяет угловую скорость $\Omega = \Omega(x, z)$.

Отметим, что параметры ζ и η можно оценить не последовательными приближениями, а сразу решением двух уравнений с двумя неизвестными, получаемых из одновременного рассмотрения соотношений $\partial \ln L / \partial \zeta = 0$, $\partial \ln L / \partial \eta = 0$. Однако первый путь представляется более удобным ввиду малости параметра η по сравнению с ζ .

Определение кривой вращения во внешней области галактической плоскости. Во внутренней по отношению к Солнцу области Галактики при приближении луча зрения к точке касания поверхности равной угловой скорости знаменатель в (1) неограниченно возрастает. В пространственном случае (14) этому соответствует направление, для которого

$$\gamma = 0 \quad (24)$$

(рис. 2, точка A), в плоском (4) — соотношение

$$x = \sin l \quad (25)$$

(рис. 1, точка А). В связи с необходимостью компенсации больших значений интенсивности возникает проблема введения весов $p_i \sim \tau_i^{-x}$, где x — константа, выбор которой остается несколько произвольным.

При $R > R_0$ ($x > 1$) задача упрощается, так как условия (24) и (25) в этом случае не выполняются ни при каких l и b , и можно положить $p_i \equiv 1$.

Закон вращения Галактики при $R > R_0$ мало изучен. Метод тангенциальных точек, соответствующих максимуму в профилях линии 21 см и соотношению (25), использовавшийся некоторыми авторами для

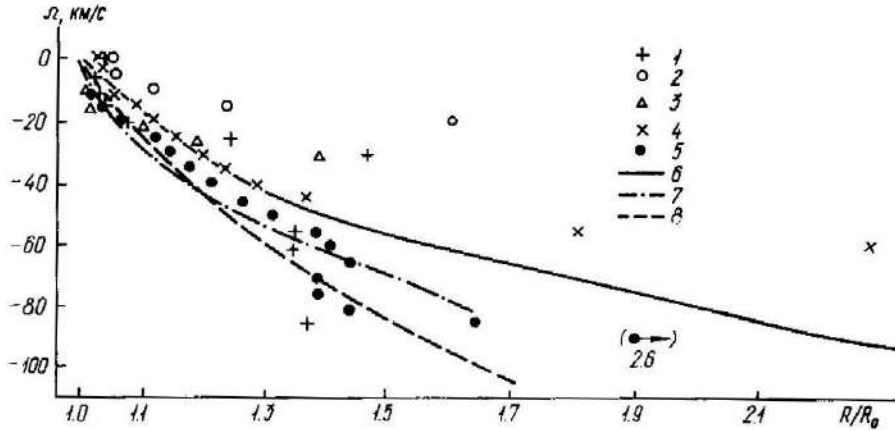


Рис. 3. Результаты, полученные методом максимального правдоподобия. 1, 2, 3, 4 — соответственно для I, II, III, IV квадрантов галактических долгот. Для сравнения приведены: 5 — результаты, полученные графическим методом [16]; 6 — сглаженная зависимость $\Omega = \Omega(x)$, проведенная по точкам 1—5; 7 — данные [9] по наблюдениям областей CO; 8 — зависимость функции Камма от x , соответствующая плоской кривой вращения $\Theta = \text{const}$

внутренних по отношению к Солнцу областей [13, 15, 17], при $R > R_0$ не применим. Наблюдения областей Н II, CO и OH относятся в основном к расстояниям $r < 6$ кпк от Солнца и, следовательно, не охватывают область $x > 1$ в I и IV квадрантах галактических долгот. Метод наименьших квадратов [8] дает для $x > 1.3$ ненадежные результаты. Поэтому исследование закона вращения методом максимального правдоподобия представляет особый интерес.

Соотношения (11) и (12) при $p_i \equiv 1$ ($x > 1$) принимают вид

$$y = \zeta x^{m+1} = \sum \frac{\tau_i}{|\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i}} / \sum \frac{1}{\sin^2 l_i (1 - x^{-2} \sin^2 l_i)}, \quad (26)$$

$$F \equiv \sum \left(\tau_i - \frac{y}{|\sin l_i| \sqrt{1 - x^{-2} \sin^2 l_i}} \right) \frac{|\sin l_i|}{(1 - x^{-2} \sin^2 l_i)^{3/2}} = 0. \quad (27)$$

При каждом фиксированном значении Ω вычисляем y по (26) и F по (27) для ряда значений x . Оценку параметра x , соответствующую выбранному Ω , находим из условия (27).

Наблюдаемый разброс значений Ω относительно средней зависимости позволяет судить о точности определяемой кривой вращения и является следствием различных инструментальных эффектов, а также отклонения истинных движений водородных облаков от строго круговой картины.

В таблице приведены результаты вычислений параметров x и y отдельно для I, II, III и IV квадрантов галактических долгот по (26) — (28) для значений $-100 \text{ км/с} \leq \Omega \leq 0$. Они представлены также на рис. 3. Там же даны результаты применения графического метода [16] ко всему профилю линии 21 см. Сглаженная зависимость Ω от x для $x > 1.3$ дает $d\Omega/dx = \text{const}$ и приблизительное постоянство плотности $N(x) = \text{const}$. При $x < 1.3$ происходит убывание плотности по закону

$N \propto x^{-2.4}$ и функции Камма $\Omega \propto (x^{-2.4} - 1)$. При вычислениях использованы результаты наблюдений H I в линии 21 см, опубликованные в [10] для I квадранта галактических долгот, [19] — для II и [14] — для III и IV квадрантов.

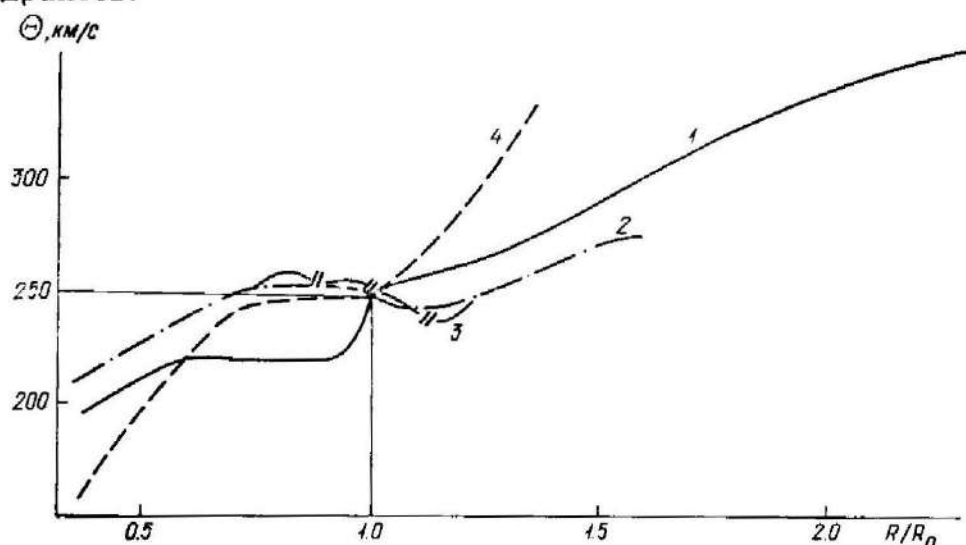


Рис. 4. Результаты определения кривой вращения в плоскости Галактики: 1 — кривая вращения, соответствующая сглаженной кривой $\Omega = \Omega(x)$ рис. 3, построенная методами максимального правдоподобия и графическим ($R > R_0$), при $R < R_0$ эта кривая получена по способу наименьших квадратов [7]; 2 — кривая вращения по облакам CO [9] ($R > R_0$) и тангенциальным точкам профилей линии 21 см ($R < R_0$) [11]; 3 — кривая вращения по областям H II [12]; 4 — кривая вращения по облакам OH [3]

На рис. 3 представлена для сравнения зависимость $\Omega = \Omega(x)$, соответствующая плоской кривой вращения $\Theta = \text{const}$, а также данные [9], полученные по областям CO, которые согласуются с нашими результатами.

Сглаженная кривая вращения $\Theta = \Theta(R)$ ($R_0 = 10$ кпк, $\omega_0 = 25$ км/(с·кпк)), построенная по данным таблицы и работы [16], приведена на рис. 4. Там же представлены кривые вращения, полученные

Оценки параметров x и y для различных значений Ω в каждом из четырех квадрантов галактических долгот

Ω	I		II		III		IV	
	x	y	x	y	x	y	x	y
0	1.04	0.38	1.05	0.22	—	—	1.03	0.39
—5	1.03	0.28	1.06	0.22	—	—	1.03	0.34
—10	1.03	0.20	1.12	0.23	1.02	0.17	1.06	0.32
—15	1.04	0.17	1.23	0.22	1.03	0.19	1.09	0.30
—20	1.08	0.16	1.60	0.20	1.11	0.23	1.12	0.29
—25	1.24	0.16	—	—	1.19	0.26	1.16	0.28
—30	1.47	0.16	—	—	1.39	0.27	1.20	0.28
—35	—	—	—	—	—	—	1.23	0.27
—40	—	—	—	—	—	—	1.29	0.26
—45	—	—	—	—	—	—	1.37	0.24
—50	—	—	—	—	—	—	—	—
—55	1.35	0.18	—	—	—	—	1.80	0.21
—60	1.35	0.19	—	—	—	—	2.28	0.19
—65	—	—	—	—	—	—	—	—
—70	—	—	—	—	—	—	—	—
—75	—	—	—	—	—	—	—	—
—80	—	—	—	—	—	—	—	—
—85	1.37	0.13	—	—	—	—	—	—
—90	—	—	—	—	—	—	—	—
—95	—	—	—	—	—	—	—	—
—100	—	—	—	—	—	—	—	—

разными авторами для внешней и внутренней областей Галактики: по результатам наблюдений областей Н II [12], СО [9, 11] и ОН [3], а также данные для внутренней области, определенные способом наименьших квадратов [7] по всему профилю линии 21 см [7] и по тангенциальным точкам [13, 15, 17].

Результаты, представленные на рисунках 3 и 4, не обнаруживают максимума кривой вращения при $R > R_0$ и свидетельствует о некотором увеличении линейной скорости с удалением от центра Галактики вплоть до $R = 2R_0$.

1. Агекян Т. А., Петровская И. В., Фесенко Б. И. Вращение Галактики по данным радионаблюдений // Астрон. журн.— 1964.—41, вып. 6.— С. 1027—1037.
2. Агекян Т. А., Петровская И. В., Фесенко Б. И. Определение изменения скорости вращения Галактики в z -направлении по профилям линии нейтрального водорода // Астрофизика.— 1965.—1, вып. 4.— С. 373—383.
3. Колесник И. Г., Юревич Л. В. Кривая вращения Галактики по наблюдениям гидроксила // Там же.— 1985.—22, вып. 3.— С. 461—472.
4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.— М.: Физматгиз, 1962.—349 с.
5. Петровская И. В. О вращении подсистемы нейтрального водорода во внутренних областях Галактики при $|z| \geq 0$ // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1970.— № 19.— С. 129—136.
6. Петровская И. В. О вращении подсистемы нейтрального водорода во внутренних областях Галактики // Тр. Астрон. обсерватории Ленингр. ун-та.— 1978.—34.— С. 109—127.
7. Петровская И. В. Кривая вращения подсистемы нейтрального водорода в Галактике // Письма в Астрон. журн.— 1979.—5, № 12.— С. 632—635.
8. Петровская И. В. Закон вращения подсистемы нейтрального водорода в плоскости Галактики // Тр. Астрон. обсерватории Ленингр. ун-та.— 1980.—36.— С. 97—109.
9. Blitz L. The rotation curve of the Galaxy to $R=16$ kiloparsecs // *Astrophys. J.*— 1979.—231, N 3.— P. L115—L119.
10. Burton W. B. Observations of neutral hydrogen in the galactic plane in the longitude interval of -6 to 120° // *Astron. and Astrophys. Suppl. Ser.*— 1970.—2, N 4.— P. 261—289.
11. Burton W. B., Gordon M. A. Carbon monoxide in the Galaxy. III // *Astron. and Astrophys.*— 1978.—63, N 12.— P. 7—27.
12. Georgelin Y. M., Georgelin Y. P. The spiral structure of our Galaxy determined from Н II regions // *Ibid.*— 1976.—49, N 1.— P. 57—79.
13. Kerr F. J. Galactic velocity models and the interpretation of 21-cm surveys // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*— 1962.—123, N 4.— P. 327—345.
14. Kerr F. J., Hindman J. V. Parkes hydrogen survey of the Milky Way. III // *Austral. J. Phys. Astrophys. Suppl. Ser.*— 1970.— N 18.— P. 1—8.
15. Kwee K., Muller G., Westerhout G. The rotation of the inner parts of the galactic system // *Bull. Astron. Inst. Neth.*— 1954.—12, N 458.— P. 211—222.
16. Petrovskaya I. V., Teerikorpi P. Rotation curve of the outer parts of our Galaxy from neutral hydrogen 21 cm line profiles // *Astron. and Astrophys.*— 1986.—163, N 1/2.— P. 39—42.
17. Shane N. W., Bieger-Smith G. P. The galactic rotation curve derived from observations of neutral hydrogen // *Bull. Astron. Inst. Neth.*— 1966.—18, N 4.— P. 263—292.
18. van de Hulst H. C., Muller C. A., Oort J. H. The spiral structure of the galactic system derived from the hydrogen emission at 21 cm wave-length // *Ibid.*— 1954.—12, N 452.— P. 117—149.
19. Weaver H., Williams D. R. W. The Berkely low-latitude survey of neutral hydrogen // *Astron. and Astrophys. Suppl. Ser.*— 1974.—17.— P. 1—250.