УДК 523.98

Стохастический метод описания эволюции активных областей на Солнце

О. В. Чумак, З. Н. Чумак

Предложен метод описания эволюции активных областей (АО) на Солнце, заключающийся в том, что получаемые из наблюдений параметры (координаты пятен, скорости их перемещения и др.) рассматриваются как случайные величины, являющиеся реализацией некоторого случайного процесса. Для получения эволюционного уравнения применен известный в кинетической теории метод моментов и, для случая марковских процессов, построено соответствующее приближение Фоккера — Планка. Рассмотрены некоторые вопросы прогнозирования явлений в АО, обсуждается проблема выбора репрезентативных переменных.

A STOCHASTIC METHOD FOR DESCRIBING THE EVOLUTION OF ACTIVE SOLAR REGIONS, by Chumak O. V., Chumak Z. N.— The method is proposed which consists in that the parameters obtained directly from observations spots coordinates, velocities, etc. are considered as stochastic process values. In order to obtain an evolution equation the method of moments is used and the Fokker — Planck approximation is obtained. Some problems of forecasting the phenomena in active regions are considered. A choice of representative variables is discussed.

Основные уравнения. В работе [3] показано, что разного масштаба явления солнечной активности можно описать на основе теории марковских процессов. В данной работе попытаемся применить эту теорию для разработки метода описания эволюции АО.

Пусть $f(g_i, t)$ — функция распределения, т. е. нормированная вероятность обнаружения изображающей точки в момент времени t в заданном элементарном объеме $d\Omega$ фазового пространства параметров g_i, характеризующих такую активную область. Иными словами,

$$\int f(g_i, t)\, d\Omega = 1. \tag{1}$$

Знание функции распределения позволяет вычислить для любого момента времени t наиболее вероятные значения параметров g_i, ожидаемую степень отклонения индивидуальных величин параметров от их средних значений, степень асимметрии этих отклонений и пр. по соответствующим формулам

$$\bar{g}_i = \int g_i f(g_k, t)\, d\Omega; \qquad \overline{\Delta g_i \Delta g_j} = \int (g-\bar{g})_i (g-\bar{g})_j f(g_k, t)\, d\Omega; \tag{2}$$

$$\overline{\Delta g_i \Delta g_j \Delta g_l} = \int (g-\bar{g})_i (g-\bar{g})_j (g-\bar{g})_l f(g_k, t)\, d\Omega$$

и т. д.

Таким образом, если выбор параметров g_i достаточно представителен, то знание функции $f(g_i, t)$ позволяет описать систему в любой заданный момент времени t с любой заданной степенью точности. И наоборот, если известны моменты распределения, т. е. левые части формул (2), то по ним можно найти функцию распределения. В случае марковских процессов эта связь в первом приближении описывается уравнением Фоккера — Планка [2]:

$$\frac{\partial f(g_i, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial g_i}\left\{\frac{d\bar{g}_i}{dt} f(g_i, t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g_k}\left[\frac{d}{dt}(\overline{\Delta g_i \Delta g_k}) f(g_k, t)\right]\right\}. \tag{3}$$

Если выбор переменных g_i удается осуществить так, что моменты $\bar{g}_i$ и $\overline{\Delta g_i \Delta g_k}$ оказываются только функциями времени, и зависимостью их от g_i

можно пренебречь, то уравнение (3) приобретает более простой вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} d_{ik}(t) \frac{\partial^2 f}{\partial g_i \partial g_k} - a_i(t) \frac{\partial f}{\partial g_i}, \tag{4}$$

где тензор второго ранга $d_{ik}(t) = \frac{d}{dt}(\overline{\Delta g_i \Delta g_k})$ описывает диффузию в фазовом пространстве, а вектор $a_i(t) = \frac{d\bar{g}_i}{dt}$ соответственно является коэффициентом сноса.

Уравнения (3) и (4) можно использовать для прогнозов свойств активных областей разной заблаговременности. Осуществляется это следующим образом. Проводим выбор репрезентативных параметров g_i. По начальной серии наблюдений в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots \ldots, t_n$ определяем значения выбранных параметров g_i^k на каждый момент времени t_k. Затем из этих величин находим средние по ансамблю значения первых двух моментов также на каждый момент времени наблюдения t_k. По этой начальной выборке численным дифференцированием по времени определяем временны́е ряды значений коэффициентов сноса и диффузии. Затем подбираем по возможности простые, но достаточно точные аналитические формулы, аппроксимирующие эти коэффициенты как функции времени, и если необходимо, то и координат g_i. Полученные выражения подставляем в уравнения (4) или (3), решаемые тем или иным способом на заданном интервале времени Δt (Δt — заблаговременность прогноза). Полученное выражение для функции распределения $f(g_i, t)$ подставляем в формулы (2) и после вычисления квадратур получаем описание АО на заданном временно́м интервале с нужной степенью точности.

Поскольку в методе используются не сами переменные, а их моменты, надлежащим образом усредненные по ансамблю выборки, то по терминологии статистической физики его следует отнести к «мезоскопическому» уровню описания.

Выбор переменных. Конкретный выбор рабочих формул, полученных из общих выражений (2)—(4), существенно зависит от числа переменных и длительности интервала времени, на котором необходимо получить прогноз. При относительно небольшой заблаговременности можно ограничиться простыми приближенными решениями уравнений (3), (4) (например, через степенные ряды); для более длительных интервалов времени потребуются более точные аналитические или численные решения.

Вид рабочих формул будет тем проще, чем меньше число используемых переменных. В идеальном случае желательно найти один параметр, два первых момента которого оказались бы достаточно информативными для реализации прогноза. Выбрать такой параметр сложно. В настоящее время при прогнозировании, как правило, используют большое количество физических параметров, характеризующих активную область. Сопоставляя данный набор величин параметров с соответствующими наборами в ранее наблюдавшихся ситуациях, можно предсказать ту или иную заблаговременность. В ряде случаев оправдываемость таких прогнозов довольно высока [4]. Получается парадоксальная ситуация: для построения количественного метода прогноза требуется как можно меньшее число параметров, с другой стороны, чем большим числом параметров мы располагаем, тем более точный прогноз можем дать.

Решение может быть следующим. Если прогнозируемое явление носит скачкообразный характер в результате плавного изменения параметров, которыми мы характеризуем АО, то такое явление можно рассматривать как «катастрофу». В этом случае, основываясь на одном из вариантов известной в теории катастроф леммы Морса (лемма расщепления) [5], можно утверждать, что для изучения явления достаточно знать поведение лишь небольшого числа параметров. Однако вопрос о том, содержатся ли эти значимые параметры в числе наблюдаемых или же они являются комбинацией непосредственно измеряемых величин, остается открытым. Здесь может оказаться полезным следующий прием. Каждому параметру, характеризующему АО, ставим в соответствие индекс его чувствительности к прогнозируемому явлению. Таким индексом может быть, например, среднее статистическое по многим наблюдениям значение модуля производной по времени в момент t, предшествующий прогнозируемому явлению на величину заблаговременности прогноза Δt.

Составляем затем произведение параметров (безразмерных) с индексами чувствительности, большими или равными единице. Полученный мультипликативный параметр будет обладать максимальным индексом чувствительности, и можно предположить, что его первые два момента, вычисленные по формулам (2)—(4), будут иметь необходимую, с точки зрения прогноза, степень информативности.

На практике прогноз осложняется еще и тем, что часто на момент его составления по разным причинам доступны далеко не все значения параметров. На наш взгляд, введение мультипликативного параметра позволяет избежать и этой трудности, поскольку произведение даже небольшого числа умеренно чувствительных параметров в итоге может обладать достаточно высокой чувствительностью.

«Мезоскопические» переменные. Для иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим следующую ситуацию: имеем только прямые снимки фотосферы; требуется прогнозировать развитие АО с заблаговременностью от нескольких часов до нескольких суток.

Описываемый метод является общим, и с его помощью можно построить рабочие формулы для любого другого наблюдательного материала и для прогнозов иного характера и другой заблаговременности.

Пусть в нашем распоряжении имеется N снимков, полученных в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$. В рассматриваемой АО содержится n_p пятен одной полярности и n_f пятен противоположной полярности, так что общее их число равно $n = n_p + n_f$. Через s_i обозначим площадь в миллионных долях полусферы (м. д. п.), а через λ_i и φ_i — кэрингтоновскую долготу и широту i-го пятна соответственно. Полагаем, что это — вся доступная нам информация по АО.

Иными словами, на каждый момент времени мы характеризуем активную область набором $(3n+2)$, а именно $(n_p, n_f, s_i, \lambda_i, \varphi_i)$ первичных микроскопических параметров, получаемых непосредственно из наблюдений.

Перейдем к построению из этих первичных параметров переменных промежуточного (мезоскопического) уровня описания. Через s_p и s_f обозначим суммарную площадь пятен полярности соответственно p и f на каждый момент времени t, т. е.

$$s_p = \sum_{i=1}^{n_p} s_i, \quad s_f = \sum_{i=1}^{n_f} s_i, \tag{5}$$

где в первом случае суммирование проводится по p пятнам, во втором — по f. Полная площадь пятен s в группе равна

$$s = s_p + s_f. \tag{6}$$

Предположим, что s_p и s_f пропорциональны величинам потоков магнитного поля p и f полярности, а s — полному магнитному потоку активной области. Введем средние взвешенные по площадям значения координат p и f пятен

$$\bar{\lambda}_p = \frac{1}{s_p}\sum_{i=1}^{n_p}\lambda_i s_i, \qquad \bar{\varphi}_p = \frac{1}{s_p}\sum_{i=1}^{n_p}\varphi_i s_i; \tag{7}$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{1}{s_f}\sum_{i=1}^{n_f}\lambda_i s_i, \qquad \bar{\varphi}_f = \frac{1}{s_f}\sum_{i=1}^{n_f}\varphi_i s_i. \tag{8}$$

Суммирование в формулах (7) проводится по p пятнам, а в формулах (8) — по f.

Координаты «центра тяжести» всей активной области равны

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{s}(s_p\bar{\lambda}_p + s_f\bar{\lambda}_f), \qquad \bar{\varphi} = \frac{1}{s}(s_p\bar{\varphi}_p + s_f\bar{\varphi}_f). \tag{9}$$

Квадрат расстояния между подсистемами p и f пятен определим так:

$$l^2 = [(\bar{\lambda}_f - \bar{\lambda}_p)^2 + (\bar{\varphi}_f - \bar{\varphi}_p)^2]. \tag{10}$$

Тогда безразмерная величина

$$\gamma = \alpha s/l^2 \tag{11}$$

характеризует среднее значение градиента магнитного поля в группе на данный момент времени. Этот параметр уже может представлять некоторый практический интерес.

Коэффициент α в формуле (11) можно рассматривать как фактор, переводящий м. д. п., в которых измеряется величина s, и дуговые градусы, в которых выражается величина l, в одну систему единиц так, чтобы величина γ была безразмерной. В этом случае

$$\alpha = 0.1266/2\pi. \tag{12}$$

С другой стороны, α можно рассматривать как коэффициент пропорциональности между магнитным потоком F_H и площадью пятна, выраженной в м. д. п., т. е. величиной, равной потоку, проходящему через 1 м. д. п. пятна. В этом случае произведение αs характеризует полный поток (по модулю) всей активной области, а величина γ имеет смысл магнитного дипольного момента АО.

Рассмотрим вторые моменты, т. е. дисперсию координат пятен в активной области. Интересующие нас величины определим по формулам

$$\overline{\Delta\lambda_p^2} = d^p_{\lambda\lambda} = \frac{1}{s_p}\sum_{i=1}^{n_p}(\bar{\lambda}_p - \lambda_i)^2 s_i; \qquad \overline{\Delta\varphi_p^2} = d^p_{\varphi\varphi} = \frac{1}{s_p}\sum_{i=1}^{n_p}(\bar{\varphi}_p - \varphi_i)^2 s_i;$$

$$\overline{\Delta\lambda_p\Delta\varphi_p} = d^p_{\lambda\varphi} = d^p_{\varphi\lambda} = \frac{1}{s_p}\sum_{i=1}^{n_p}(\bar{\lambda}_p - \lambda_i)(\bar{\varphi}_p - \varphi_i)\, s_i. \tag{13}$$

Величины d^p_{jk} составляют симметричный тензор второго ранга и характеризуют среднее взвешенное по площади пятен значение квадрата протяженности подсистемы p пятен в направлении λ, аналогичную величину в направлении φ и величину асимметрии площади, занимаемой подсистемой p пятен соответственно.

Аналогично определяется тензор второго ранга d^f_{jk}. Тогда для составляющих тензора d_{jk}, характеризующего всю активную область, имеем

$$\overline{\Delta\lambda^2} = d_{\lambda\lambda} = \frac{1}{s}(s_p\overline{\Delta\lambda_p^2} + s_f\overline{\Delta\lambda_f^2}); \qquad \overline{\Delta\varphi^2} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{s}(s_p\overline{\Delta\varphi_p^2} + s_f\overline{\Delta\varphi_f^2});$$

$$\overline{\Delta\lambda\Delta\varphi} = d_{\lambda\varphi} = d_{\varphi\lambda} = \frac{1}{s}(s_p\overline{\Delta\lambda_p\Delta\varphi_p} + s_f\,\overline{\Delta\lambda_f\Delta\varphi_f}). \tag{14}$$

Полученные моменты второго порядка представляют практический интерес и позволяют определить дополнительные величины, характеризующие активную область. Обозначим через D_p, D_f, D определители тензоров d^p_{jk},d^f_{jk}, d_{jk}; тогда три безразмерных параметра

$$h_p = \alpha s/\sqrt{D_p}; \qquad h_f = \alpha s/\sqrt{D_f}; \qquad h = \alpha s/\sqrt{D} \tag{15}$$

должны быть пропорциональны плотности магнитного потока полярности p, f и интегрального потока всей активной области, поскольку предполагаем, что величины s_p, s_f и s пропорциональны соответствующим величинам потоков, а значения $D^{1/2}$, $D_p^{1/2}$, $D_f^{1/2}$ пропорциональны площадям всей АО и соответствующих подсистем.

Следующие три безразмерных параметра

$$r_s = s_p/s_f; \qquad r_h = h_p/h_f; \qquad r_l = \sqrt{D}/l^2 \tag{16}$$

являются индикаторами степени дисбаланса магнитного поля АО: r_s — по потокам, r_h — по средней плотности потоков; параметр r_l характеризует степень сложности группы, т. е. степень взаимопроникновения полей противоположного знака. Чем больше это отношение, тем более сложна АО, тем более перепутанными могут быть в ней области с полями противоположного знака, т. е. тем сложнее ее нейтральная линия.

Семь параметров формул (11), (15) и (16), по существу, определяют величину и характер магнитного поля АО. Однако имеющиеся у нас наблюдательные данные позволяют получить также определенную информацию и о характере движений в АО, которые, по-видимому, играют важную роль в ее эволюции. Внешними индикаторами этих движений являются лучевые скорости, а также вид перемещений и степень организации движений (например, существование и количество отдельных кинематических элементов) пятен в АО. Поскольку лучевые скорости нам условно недоступны, то опишем кинематику пятен. Каждому интервалу времени $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ ставим в соответствие компоненты скорости $\vartheta_{\lambda i}$ и $\vartheta_{\varphi i}$ i-го пятна по правилу: $\vartheta_{\lambda i} = \Delta\lambda_i/\Delta t_k$, $\vartheta_{\varphi i} = \Delta\varphi_i/\Delta t_k$. При дальнейшем анализе будем исходить из гипотезы о том, что кинематика пятен в АО может быть достаточно слабо связанной с выше введенными характеристиками магнитного поля; таким образом, скорости пятен можно не связывать с их полярностью. В пространстве скоростей пятна организуются в подсистемы, по-видимому, по иному принципу [1]. Здесь мы предложим несколько отличное от имеющегося в литературе и, на наш взгляд, более четкое определение понятия кинематического элемента (КЭ) активной области, а также параметров, характеризующих эти подсистемы. Особое внимание мы уделяем этому, сравнительно новому в физике солнечной активности понятию, поскольку полагаем, что число подсистем такого рода и их свойства могут быть существенно ответственны за эволюцию АО. Весьма вероятно, что каждый из таких КЭ может быть отождествлен с отдельным «всплывающим потоком». Итак, для некоторого момента времени t_k строим диаграмму ϑ_λ, ϑ_φ. Каждое пятно рассматриваемой АО на такой диаграмме представлено точкой, которую назовем изображающей. Если на нескольких диаграммах с разностью эпох около 1^h облако изображающих точек распадается на отдельные (одни и те же) группы, то такие группы изображающих точек будем называть кинематическими элементами данной АО. В зависимости от количества таких элементов АО является одноэлементной, двухэлементной и т. д.

Каждый КЭ охарактеризуем его первыми двумя моментами по ϑ_λ и ϑ_φ, которые определим следующим образом. Первые моменты

$$\bar{\vartheta}_{\lambda e} = \frac{1}{m_e}\sum_{i=1}^{m_e} \vartheta_{\lambda i}; \qquad \bar{\vartheta}_{\varphi e} = \frac{1}{m_e}\sum_{i=1}^{m_e} \vartheta_{\varphi i}, \tag{17}$$

где m_e — число изображающих точек в данном КЭ, индекс e принимает значения 0, 1, 2, ... и обозначает номер КЭ.

Аналогично для всей АО имеем

$$\bar{\vartheta}_\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_{\lambda i}; \qquad \bar{\vartheta}_\varphi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_{\varphi i}. \tag{18}$$

Вторые моменты как для отдельного КЭ, так и для всей области представляют собой симметричные тензоры второго ранга, компоненты которых определим так:

$$(\overline{\Delta\vartheta_\lambda^2})_e = b^e_{\lambda\lambda} = \frac{1}{(m_e-1)}\sum_{i=1}^{m_e}(\bar{\vartheta}_{\lambda e}-\vartheta_{\lambda i})^2; \qquad (\overline{\Delta\vartheta_\varphi^2})_e = b^e_{\varphi\varphi} =$$

$$= \frac{1}{(m_e-1)}\sum_{i=1}^{m_e}(\bar{\vartheta}_{\varphi e}-\vartheta_{\lambda i})^2; \tag{19}$$

$$(\overline{\Delta\vartheta_\lambda\Delta\vartheta_\varphi})_e = b^e_{\lambda\varphi} = b^e_{\varphi\lambda} = \frac{1}{(m_e-1)}\sum_{i=1}^{m_e}(\bar{\vartheta}_{\lambda e}-\vartheta_{\lambda i})(\bar{\vartheta}_{\varphi e}-\vartheta_{\varphi i}).$$

Для всей АО эти величины будут записываться без индекса e, и суммирование проводится по всем n точкам, изображающим АО в пространстве скоростей.

Интенсивность движений КЭ характеризуем величиной

$$\overline{\vartheta_e^2} = \sum_{i=1}^{e}(\overline{\vartheta_{\lambda e}^2}+\overline{\vartheta_{\varphi e}^2}), \tag{20}$$

а всей АО

$$\overline{\vartheta^2} = B^{1/2}, \tag{21}$$

где B — значение определителя тензора b_{jk}. Эта величина представляет собой дисперсию скоростей пятен в АО и является в некотором смысле аналогом «температуры», если пятна рассматривать как частицы некоего «газа». Она может иметь важное теоретическое и практическое значение, поскольку $\overline{\vartheta^2}$ количественно характеризует суммарную энергию как упорядоченных движений КЭ в АО (гидродинамические потоки или макротурбулентность), так и случайных «броуновских» движений отдельных пятен.

В этом плане $\overline{\vartheta^2}$ можно рассматривать как хороший количественный индикатор энергии подфотосферных движений, видимым проявлением которых является движение пятен. Величина $\overline{\vartheta^2}$ и темп ее изменения со временем $\frac{d}{dt}\overline{\vartheta^2}$ могут оказаться такими параметрами, которые существенно характеризуют АО с точки зрения энергии, заключенной в подфотосферных гидродинамических движениях, а также скорости ее накопления $\left(\frac{d}{dt}\overline{\vartheta^2}>0\right)$ или уменьшения $\left(\frac{d}{dt}\overline{\vartheta^2}<0\right)$. Ясно, что уменьшение связано с переходом в другие виды энергии; например, в энергию магнитного поля путем кинематического вытягивания силовых линий, или тепловую энергию, получаемую в результате раскачки и последующей релаксации различных плазменных неустойчивостей. В практическом плане переменные $\overline{\vartheta^2}$ и $\frac{d}{dt}\overline{\vartheta^2}$ могут оказаться хорошими прогностическими параметрами, чувствительными, например, к вспышечной активности АО и моменту времени, когда эта активность должна реализоваться.

Введем еще одну безразмерную величину

$$\beta = \overline{\vartheta_e^2}/\overline{\vartheta^2}, \qquad (22)$$

пропорциональную отношению энергии, заключенной в упорядоченных движениях, ко всей энергии движений АО, и количественно характеризующую степень упорядоченности кинематики АО. Эта величина и ее производная по времени могут оказаться чувствительными к определенным фазам эволюции АО.

Обсуждение результатов. С помощью формул (7)—(22) введено значительное число параметров, описывающих АО на мезоскопическом уровне. Фазовое пространство этих параметров может быть неизотропным. В нем возможно, например, существование точек притяжения (атракторов) фазовых траекторий различного характера. Изучение свойств фазового пространства — важный этап, предшествующий введению искомых параметров, являющихся значимыми для описания различного рода явлений, наблюдаемых в активных областях.

Следует все же отметить, что определение параметров, оптимально характеризующих приближение АО к пороговой ситуации в ее эволюции, является лишь *первым этапом* проблемы прогнозирования. Она решается только с получением функции распределения $f(g_i, t)$ из уравнения Фоккера — Планка. Однако в процессе нахождения этой функции могут возникнуть определенные трудности, если, например, окажется, что зависимостью коэффициентов сноса и диффузии от координат нельзя пренебречь или (и) если задача окажется существенно неодномерной. Эти и другие вопросы предполагается рассмотреть в ходе реализации предлагаемого алгоритма по конкретным данным наблюдений.

В заключение авторы выражают благодарность В. Н. Ишкову за обсуждение работы и поддержку, В. В. Тельнюку-Адамчуку и сотрудникам группы прогнозирования АО КГУ за полезное обсуждение, Э. И. Могилевскому за ценные замечания, учтенные авторами.

1. *Бумба В.* Собственные движения, наблюдаемые в активных областях // Publ. Debrecen heliophys. observatory.— 1983.—5.— P. 47—69.
2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей.— М. : Физматгиз, 1961.—293 с.
3. *Могилевский Э. И.* Обоснование стохастичности краткосрочного прогноза солнечной активности: (Обзор) // Phys. sol.-terrestr.— 1981.— № 16.— P. 5—17.
4. *Степанян Н. Н.* Краткосрочные прогнозы свойств активных областей: (Обзор) // Ibid.— P. 71—81.
5. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения.— М. : Мир, 1980.—608 с.

Астрофиз. ин-т АН КазССР,
Алма-Ата

Поступила в редакцию 30.05.86,
после доработки 02.09.86

Новые книги

Мещеряков Г. А., Церклевич А. Л. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ, ФИГУРА И ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ МАРСА

Киев : Наук. думка, 1987 (I кв.).— 14. 6 л.— 2 р. 30 к.

В монографии впервые дается подробный обзор и обобщение астрономических и геофизических данных о планете, полученных с помощью космических аппаратов. Приведены модели гравитационного поля планеты, новые выводы параметров геометрической и гравитационной ее фигур, исследования изостатического состояния и модельных распределений плотности ее недр.

Для астрономов, геодезистов, геофизиков.