КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ТОМ 3 N 1 1987

УДК 521.95

Метод статистической оценки и контроля точности редукций, основанных на измерениях

А. В. Бахонский, П. Ф. Лазоренко

Изложен обобщенный статистический подход к вопросу о введении поправок в наблюдения, если эти поправки определены с большими ошибками. Первый опыт применения статистического способа к редукции за гнутие дал положительный результат, что послужило основанием для распространения метода на все редукции, определяемые по результатам измерений. Рассмотрено применение метода к обработке наблюдений на вертикальном круге.

METHOD OF STATISTICAL EVALUATING AND CHECKING PRECISION OF CORRECTIONS BASED ON MEASUREMENTS, by Bakhonskij A. V., Lazorenko P. F. — The paper deals with general statistical approach to the problem how to apply corrections to observations, when these corrections are determined with considerable errors. As the first test of this method it was applied to flexure and gave positive results. For this reason it may be recommended for all similar reductions. Application of the method to the processing of observations on vertical circle is presented.

Основные предположения. При обработке меридианных наблюдений часто вводятся поправки, найденные по отсчетам тех или иных измерительных устройств, установленных на самом телескопе или в павильоне. При этом вычисленное значение поправки β может отличаться от истинного значения $\beta_и$ не только вследствие ошибок измерений, имеющих характер случайных некоррелированных величин. В действительности на результат измерений всегда влияют некоторые, часто неизвестные факторы (помехи), которые не учитываются в формулах, используемых для вычисления редукций. Так, при оценке рефракции обычно берут температуру воздуха в павильоне, а учетом местных аномалий температуры пренебрегают. В другом случае, при определении угла наклона вертикальной оси инструмента предполагают, что смещение пузырьков уровней пропорционально этому углу. Неидеальность поверхности ампул при этом может рассматриваться как помеха. Представим поправку (редукцию), основанную на измерениях, в виде выражения

$$\beta = \beta_и + x, \tag{1}$$

где x — составляющая, которая включает в себя совместное влияние помех и случайных ошибок отсчета и имеет смысл ошибки определения редукции. Если в течение всего анализируемого периода наблюдений действует большая совокупность помех и они успевают многократно измениться по величине и знаку, то распределение ошибки x близко к нормальному с некоторым средним $\bar{x}$ и дисперсией $Dx=\sigma_x^2$. В большинстве случаев нормально распределенными можно считать совокупность величин β, $\beta_и$. Естественно допустить также, с учетом причинной независимости x и $\beta_и$, их некоррелированность: $\rho(x, \beta_и)=0$.

Оценка параметров. Изложенными допущениями воспользуемся для статистического определения основных характеристик всех параметров модели (1). Особый интерес представляет возможность получить новую, более точную, чем β, статистическую оценку $\hat{\beta}$ этой поправки (с точностью до константы). Согласно модели (1), между β и $\beta_и$ существует линейная корреляция. На этом основании запишем уравнение регрессии $\beta_и$ на β

$$\hat{\beta} = \bar{\beta}_и + k(\beta - \bar{\beta}) = k\beta + \beta_0, \tag{2}$$

где $k=D\beta_и/D\beta\leqslant 1$ — коэффициент регрессии, соответствующий наименьшей дисперсии разности $\hat{\beta} - \beta_и$; черта сверху обозначает среднее значение; $\beta_0 = \bar{\beta}_и - k\bar{\beta}$ введено для сокращения записи. Определенная так оценка $\hat{\beta}$ соответствует данному фиксированному значению β и имеет меньшее среднее квадратичное уклонение от истинной редукции $\beta_и$, чем само β. Численное значение коэффициента k подбирается так, чтобы поправка $\hat{\beta}(k)$ обеспечивала наилучшую внутреннюю сходимость наблюдений, т. е. наименьшее значение $\sigma(k)$. Так, в случае дифференциальных наблюдений склонений целесообразно определить k по минимуму функции

$$\sigma^2(k) = \sum_{i,j} (\delta_{i,j} - \delta_j)^2/(n_j - 1), \qquad 0 \leqslant k \leqslant 1, \tag{3}$$

где δ_j — среднее арифметическое склонение j-й звезды, вычисленное по n_j отдельным значениям $\delta_{i,j}$, $i=1, 2, \ldots, n_j$, в которые введена поправка $\beta(k)$. На данном этапе достаточно взять произвольное значение β_0 (например, нулевое), так как при вычислении $\sigma(k)$ эта константа исключается.

Определение константы β_0 представляет собой особую задачу, для решения которой необходимо или выполнить специальные исследования (как, например, в [2]), или принять допустимое в некоторых случаях предположение: $\bar{x}=0$, т. е. $\bar{\beta}_и=\bar{\beta}$, откуда $\beta_0=(1-k)\bar{\beta}$.

Следует отметить, что невозможность определения постоянной β_0 не означает необходимости безусловного отказа от применения статистического метода. Дело в том, что непосредственное использование редукции β основано на неявном допущении равенства $\beta=\beta_и$, по крайней мере с точностью до случайных ошибок. Последнее равносильно принятому предположению $\bar{x}=0$, достаточному для определения β_0 статистическим методом.

Более высокая эффективность применения статистической оценки поправки $\hat{\beta}$ заключается в том, что она чаще находится ближе к истинному значению $\beta_и$, чем исходная величина β (если β_0 надежно определено). Это следует из формул

$$D(\beta - \beta_и) = \sigma_x^2 = (1-k)\, D\beta, \tag{4}$$

$$D(\hat{\beta} - \beta_и) = k(1-k)\, D\beta, \tag{5}$$

откуда $D(\hat{\beta}-\beta_и)/D(\beta-\beta_и) = k = 1-(Dx/D\beta) \leqslant 1$. Таким образом, чем меньше число k (а ошибка x больше), тем выгоднее применение статистической оценки. При $Dx \gg D\beta_и$ получаем $k \approx 0$ и $\hat{\beta}=\beta_0$, т. е. наилучшая оценка поправки — константа. Все наблюдаемые изменения β фактически полностью обусловлены ошибками измерений и вариациями мешающего фактора. Здесь $D(\hat{\beta}-\beta_и) \ll D(\beta-\beta_и)$. В другом крайнем случае при малых x учет редукции выполняется обычным способом, так как $k=1$ и $\hat{\beta}=\beta+\beta_0$.

Учет редукции статистическим способом всегда дает улучшение внутренней сходимости наблюдений на величину

$$\Delta^2_{ст} = D\beta_и - D[\beta_и - k(\beta_и + x)] = k^2 D\beta \geqslant 0. \tag{6}$$

В противоположность этому ввод редукции $\beta=\beta_и+x$ в некоторых случаях приводит к снижению точности, так как полное исключение составляющей $\beta_и$ достигается ценой добавления новой ошибки x. Поэтому уменьшение дисперсии наблюдений при вводе редукции

$$\Delta^2_{кл} = D\beta_и - Dx = (2k-1)\, D\beta \tag{7}$$

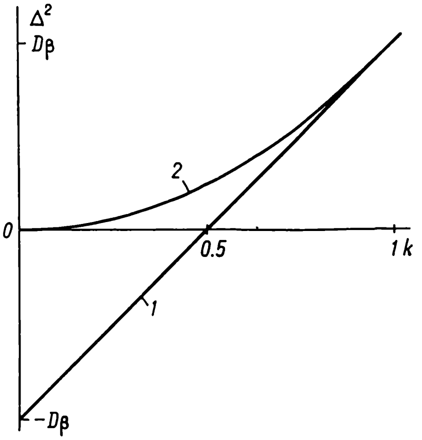
в зависимости от k может быть положительным или отрицательным, что соответствует повышению или снижению точности. Ухудшение точности происходит при $k<0.5$ или $Dx \gg D\beta_и$ (рисунок).

Модель (1) можно использовать для оценки точности редукции β. Оценка σ_x (4) выводится из самих наблюдений звезд и поэтому может служить независимым критерием точности измерений для вычисления β.

Преимущество метода статистической оценки и контроль точности найденных поправок практически проверялись при обработке наблюдений склонений звезд на вертикальном круге [2]. Основные характеристики параметров модели (1) для этих исследований приведены в таблице. Оказалось, в частности, что для гнутия оценка (2) уменьшила дисперсию ночных наблюдений в случайном отношении на $(0.25''\sin z)^2$, в то время как простой ввод гнутия не изменил дисперсию. При этом была устранена и систематическая ошибка в зенитных расстояниях, пропорциональная $\sin z$, с амплитудой 0.6″. Для контроля точности данный метод применялся для редукций за ошибки 2-минутных делений лимба и за наклон вертикальной оси инструмента, который определялся по отсчетам двух алидадных уровней. Видно, что ошибки делений лимба исключаются достаточно хорошо — точность редукции ±0.05″. Этого нельзя сказать о редукции за

Основные характеристики параметров модели (1)

Параметр	Среднее квадратичное значение параметра для редукции			
	Гнутие в горизонте		Наклон вертикальной оси	Ошибки делений лимба
	Ночью	Днем		
β	0.50″	0.56″	0.64″	0.14″
$x=\beta-\beta_и$	0.35	0.35	0.15	0.05
$\hat{\beta}-\beta_и$	0.25	0.27	0.14	0.05
$\Delta_{кл}$	0	0.27	0.61	0.12
$\Delta_{ст}$	0.25	0.35	0.61	0.12
Коэффициент k	0.5	0.62	0.948	0.87



Улучшение дисперсии наблюдений Δ^2 при двух способах учета редукции: полном вводе редукции (*1*) и использовании статистической оценки (*2*). Отрицательное значение Δ^2 соответствует снижению точности наблюдений (кривая *1* при $k<0.5$)

наклон вертикальной оси, ошибка которой σ_x достигает ±0.15″ (хотя k здесь больше, чем в предыдущем случае). Такое значение σ_x нельзя объяснить только случайными ошибками отсчета уровней σ_l, так как придется предположить, что данная ошибка равна почти половине деления уровня $(\sigma_l=4\sigma_x/\sqrt{2}=0.42'')$. Ясно, что здесь существенно влияние неровностей поверхностей ампул.

Ошибочен другой подход к объяснению отличия k от 1, согласно которому его можно рассматривать как следствие ошибочности принятой при обработке цены деления уровней $\tau_{лаб}=1.105\pm0.002''$, определенной лабораторным способом [1]. Действительно, новое значение $\tau=k\tau_{лаб}=1.047''\pm0.008''$, которое наилучшим образом согласуется с наблюдениями звезд, не может соответствовать истинной цене деления, так как при этом должно быть $\sigma_x'=0$. Истинная цена деления всегда должна быть в $1/k$ раз больше цены, определенной по наблюдениям звезд.

Выводы. 1. Вместо вычисленного значения поправки β всегда предпочтительнее использовать ее статистическую оценку $\hat{\beta}$. Обе оценки практически сравнимы по эффективности при $k\geqslant0.8$. При больших ошибках определения β $(k<0.5)$ ее непосредственное использование при редукции наблюдений снижает их точность. 2. По наблюдениям звезд можно проконтролировать точность вычисления β. 3. Определенная статистическим способом по наилучшей сходимости наблюдений звезд цена деления измерительного устройства (уровня, микрометра и др.) всегда будет меньше лабораторного значения, причем различие определений тем больше, чем больше ошибка вычисления соответствующей поправки. Расхождение результатов естественно не означает ошибочности одного из определений.

1. *Бахонский А. В.* Исследование алидадных уровней вертикального круга Ваншаффа // Кинематика и физика небес. тел.— 1985.— 1, № 3.— С. 85—90.
2. *Лазоренко П. Ф.* Каталог склонений 254 звезд в окрестностях 72 внегалактических радиоисточников.— Киев, 1984.— 49 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ; № 2635—84Деп.).

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 16.12.85,
после доработки 25.06.86