УДК 521.182.2

Об использовании эфемериды DE200/LE200 для целей спутниковой геодезии

О. А. Абрикосов

Рассмотрена задача вычисления геоцентрических прямоугольных координат Луны и Солнца на основании эфемериды DE200 / LE200. Для непосредственного их расчета предложено предварительно преобразовать исходные коэффициенты разложения координат Луны, Солнца и барицентра системы Земля — Луна. Описана методика и практическая реализация такого преобразования. При решении задач спутниковой геодезии указанный подход приводит к ускорению процесса вычислений на 15—20 %.

ON THE USE OF THE DE200/LE200 EPHEMERIDES FOR SATELLITE GEODESY, by Abrikosov O. A.— The problem of computation of geocentric rectangular coordinates of the Moon and the Sun on the basis of DE200/LE200 ephemerides is considered. It is proposed to compute the coordinates directly after transforming the initial Chebyshev expansions of the Moon, the Sun and the Earth-Moon barycentre positions. The method and the applications of these transformations are described. The approach discussed leads to decrease of computer time by ~15—20 % when obtaining the satellite geodesy problem solutions.

Введение. Для учета ряда возмущений при построении орбит ИСЗ необходимо вычислять геоцентрические положения Луны и Солнца. В настоящее время соответствующие расчеты выполняются преимущественно на основании численных теорий, использующих аппроксимирующие временные полиномы с предварительно найденными коэффициентами. Это отражено в рекомендации «Стандартов МЕРИТ» [4]: вычислять координаты указанных тел с помощью эфемериды DE200/LE200 [1, 2, 5], представленной наборами коэффициентов разложений координат Солнца, Луны, барицентра системы Земля — Луна, планет Солнечной системы и элементов нутации в ряды полиномов Чебышева. Рассмотрим одну из возможных реализаций таких вычислений.

Структура эфемериды DE200/LE200 на 32-суточном интервале [2]

Объект	Начало системы координат	Характеристика полиномов Чебышева		
		Максимальная степень	Отрезки ортонормализации	
			Длина, сут	Количество
Луна	Геоцентр	11	4	8
Солнце	Барицентр Солнечной системы	14	32	1
Барицентр системы Земля — Луна	То же	14	16	2

Примечание. Представлены только данные, необходимые для вычисления геоцентрических координат Луны и Солнца.

Постановка задачи. Структура данных эфемериды DE200/LE200, основные сведения о которой приведены в таблице, обусловливает следующий порядок вычисления прямоугольных геоцентрических координат Луны и Солнца: 1) построение по рекуррентным формулам трех систем полиномов Чебышева для трех значений аргумента; 2) вычисление геоцентрических координат Луны, барицентрических координат

Солнца и барицентра системы Земля — Луна; 3) получение по координатам трех указанных объектов геоцентрических координат Солнца. Многократное повторение (например, при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ) вспомогательных вычислений в описанной схеме может приводить к ощутимым затратам времени. Поэтому целесообразно предварительно преобразовать данные обсуждаемой эфемериды с тем, чтобы в дальнейшем непосредственно вычислять геоцентрические координаты Луны и Солнца.

Общие замечания. Очевидно, что для коэффициентов разложения на некотором заданном отрезке векторных функций скалярного аргумента в ряды по степеням последнего справедливы те же линейные преобразования, что и для самих функций. Следовательно, рассматривая тройки коэффициентов (для x, y, z) при полиномах Чебышева одинаковых степеней в качестве компонентов некоторых векторов в пространстве, мы могли бы на основании коэффициентов разложения геоцентрических координат Луны и барицентрических (Солнца и барицентра системы Земля — Луна) получить коэффициенты для геоцентрических координат Солнца. Однако поскольку отрезки разложения координат рассматриваемых объектов не совпадают в DE200/LE200 (таблица), то решение поставленной задачи предусматривает предварительный пересчет используемых наборов коэффициентов к одним и тем же отрезкам ортонормализации и последующее их преобразование как компонентов векторов при параллельном переносе системы координат.

Пересчет коэффициентов при смещении отрезка ортонормализации. Пусть на отрезке $[-1, +1]$ задано разложение

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n T_n(t), \quad t \in [-1, +1] \tag{1}$$

векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в ряд полиномов Чебышева $\{T_n(t)\}$ с коэффициентами $\{\mathbf{c}_n\}$. Необходимо получить разложение этой функции на некотором отрезке $[a, b]$:

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{d}_n T_n^*(\tau), \quad \tau \in [a, b] \tag{2}$$

в ряд полиномов $\{T_n^*(\tau)\}$, обладающих на $[a, b]$ теми же свойствами, что и $\{T_n(t)\}$ на $[-1, +1]$.

Как известно [3], $\{T_n^*(\tau)\}$ — смещенные полиномы Чебышева

$$T_n^*(\tau) = T_n(t), \quad \tau \in [a, b], \quad t \in [-1, +1], \tag{3}$$

а линейное преобразование рассматриваемых отрезков осуществляется по формуле

$$2\tau = (b - a)\,t + (a + b). \tag{4}$$

Система полиномов $\{T_n^*(\tau)\}$ может быть построена в общем на произвольном отрезке [3]. Отметим, однако, что на практике разложение (1) выполняется лишь до некоторой фиксированной конечной степени, а его коэффициенты определяются из наблюдений. Поэтому мы рассматриваем (1) как конечномерную аппроксимацию функции $\mathbf{r}(t)$ на $[-1, +1]$, в силу чего нахождение разложения (2), как конечномерной аппроксимации $\mathbf{r}(\tau)$ на $[a, b]$, возможно лишь для отрезка

$$[a, b] \subset [-1, +1]. \tag{5}$$

Ограничение (5) существенно облегчает решение поставленной задачи. На основании (1) запишем

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n T_n(\tau), \quad \tau \in [a, b]. \tag{6}$$

Но так как, с учетом (4), $T_n(\tau)=Q_n(t)$ — некоторый полином степени n на отрезке $[-1, +1]$, то можем [3] однозначно представить его в виде

$$T_n(\tau)=\sum_{m=0}^{n} g_{nm}T_m(t), \quad \tau\in[a,b], \quad t\in[-1,+1] \tag{7}$$

и, подставив (7) в (6), найти (в силу равенства (3)) коэффициенты $\{\mathbf{d}_m\}$ искомого разложения (2):

$$\mathbf{d}_m=\sum_{n=m}^{\infty} g_{nm}\mathbf{c}_n. \tag{8}$$

Коэффициенты преобразования $\{g_{nm}\}$ легко найти, подставляя (4) и (7) в рекуррентные формулы для полиномов Чебышева. Причем ограничение (5) снова позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} &T_n(\tau)=2\tau T_{n-1}(\tau)-T_{n-2}(\tau),\\ &T_0(\tau)=1, \quad T_1(\tau)=\tau \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и после очевидных преобразований получить $T_n(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned} T_n(\tau)={}&(pg_{n-1,1}+2qg_{n-1,0}-g_{n-2,0})T_0(t)+[p(g_{n-1,2}+2g_{n-1,0})+2qg_{n-1,1}-\\ &-g_{n-2,1}]T_1(t)+\sum_{m=2}^{n-2}[p(g_{n-1,m+1}+g_{n-1,m-1})+2qg_{n-1,m}-g_{n-2,m}]T_m(t)+\\ &+(pg_{n-1,n-2}+2qg_{n-1,n-1})T_{n-1}(t)+pg_{n-1,n-1}T_n(t), \end{aligned} \tag{10}$$

где, согласно (4),

$$p=(b-a)/2, \quad q=(a+b)/2. \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при $T_m(t)$ в (7) и (10), получаем рекуррентную формулу, связывающую коэффициенты $\{g_{nm}\}$ при $n\geqslant 2$:

$$q_{nm}=p\,[h_{n-1,m+1}+(1+\delta_{m1})h_{n-1,m-1}]+2qh_{n-1,m}-h_{n-2,m}, \tag{12}$$

в которой

$$h_{lk}=\begin{cases} g_{lk} - \text{если } 0\leqslant k\leqslant l,\\ 0 - \text{если } k<0, \quad k>l, \end{cases} \tag{13}$$

а δ_{m1} — символ Кронекера. Аналогично из (4), (7) и (9) находим начальные значения

$$g_{00}=1, \quad g_{10}=q, \quad g_{11}=p. \tag{14}$$

Соотношения (8), (11)—(14) позволяют строго пересчитать коэффициенты разложения функции $\mathbf{r}(t)$ в ряд полиномов Чебышева к любому отрезку $[a, b]$, удовлетворяющему условию (5).

Вычисление коэффициентов разложения геоцентрических координат Солнца. Применяя описанное преобразование, можем получить новые, отнесенные к одним и тем же отрезкам ортонормализации, наборы коэффициентов: $\{\mathbf{M}_n\}$ — для геоцентрических координат Луны, $\{\mathbf{d}_n^{(1)}\}$ и $\{\mathbf{d}_n^{(2)}\}$ — соответственно для барицентрических координат Солнца и барицентра системы Земля — Луна. Теперь, перенося начало системы координат из барицентра Солнечной системы в барицентр системы Земля — Луна, находим

$$\mathbf{D}_n=\mathbf{d}_n^{(1)}-\mathbf{d}_n^{(2)} \tag{15}$$

— коэффициенты разложения координат Солнца в этой системе. В ней же координаты Земли описываются коэффициентами

$$\mathbf{E}_n=-\mathbf{M}_n/(1+\mu), \tag{16}$$

где μ — отношение массы Земли к массе Луны. На основании (15) и (16) получаем искомые коэффициенты разложения геоцентрических координат Солнца

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{D}_n - \mathbf{E}_n. \tag{17}$$

В справедливости соотношений (15)—(17) нетрудно убедиться, выполнив перечисленные преобразования непосредственно над радиусами-векторами рассмотренных точек, заданными разложениями типа (2).

Практическая реализация. Полученные результаты позволяют наметить следующую схему вычисления геоцентрических прямоугольных координат Луны и Солнца на основании эфемериды DE200/LE200: 1) по формулам (8), (11)—(14) выполняется пересчет исходных коэффициентов к выбранным отрезкам ортонормализации; 2) по формуле (15) выполняется переход к коэффициентам $\{\bar{D}_n\}$ разложения координат Солнца в системе, начало которой совмещено с барицентром системы Земля — Луна; 3) по формулам (16), (17) определяются коэффициенты $\{\mathbf{S}_n\}$ разложения геоцентрических координат Солнца; 4) по наборам коэффициентов $\{\mathbf{M}_n\}$ и $\{\mathbf{S}_n\}$ на основании системы полиномов Чебышева, определяемых по рекуррентным формулам типа (9) для одного значения аргумента, вычисляются прямоугольные геоцентрические координаты указанных тел.

Конечно, следует учитывать, что в формуле (8) и в получаемом разложении (2) суммирование выполняется лишь до некоторой фиксированной конечной степени N, равной максимальной степени исходного разложения.

Ключевым вопросом при реализации описанного подхода является выбор отрезков ортонормализации. Структура эфемериды DE200/LE200 позволяет установить их равными четырем суткам и совпадающими с таковыми для Луны (таблица). В этом случае не требуется выполнять каких-либо преобразований коэффициентов разложения координат Луны, и набор $\{\mathbf{M}_n\}$ выбирается непосредственно из обсуждаемой эфемериды. Величины p, устанавливающие относительную длину таких отрезков, равны 0.125 и 0.250 соответственно для Солнца и барицентра системы Земля — Луна. Величины q, определяющие расположение отрезков внутри $[-1, +1]$, могут быть рассчитаны по формуле

$$q_i = -1 + (2i-1)p, \ i = 1, 2, \dots, 1/p.$$

Таким образом, для барицентра системы Земля — Луна мы получили 4, а для Солнца — 8 смещений каждого исходного (соответственно 16- и 32-суточного) отрезка ортонормализации.

Предлагаемые преобразования на первых двух этапах не связаны непосредственно с системой фундаментальных постоянных, принимаемой при вычислениях, в то время как на третьем этапе отношение массы Земли к массе Луны (μ) может быть задано различным. Поэтому с практической точки зрения мы посчитали целесообразным выполнить 1-й и 2-й этапы отдельно, сохранив полученные результаты. Так сформирована модифицированная эфемерида MSE200, содержащая коэффициенты $\{\mathbf{M}_n\}$ и $\{\mathbf{D}_n\}$, распределенные по 4-суточным отрезкам на интервале 1800—2050 гг. Эти данные апробированы при обработке лазерных наблюдений ИСЗ «Lageos» в рамках орбитального и динамического методов спутниковой геодезии. Непосредственно перед дифференциальным уточнением исследуемых параметров вычислялись коэффициенты $\{\mathbf{S}_n\}$ по фрагменту эфемериды MSE200, покрывающему обрабатываемую дугу орбиты ИСЗ. В дальнейшем при расчете правых частей уравнений движения ИСЗ и величин $(O-C)$ прямоугольные геоцентрические координаты Луны и Солнца вычислялись по коэффициентам $\{\mathbf{M}_n\}$ и $\{\mathbf{S}_n\}$, что позволило на 15—20 % ускорить процесс обработки наблюдений.

Заключение. Описанные преобразования данных эфемериды DE200/LE200 позволяют без каких-либо вспомогательных расчетов получать прямоугольные геоцентрические координаты Луны и Солнца, что приводит к экономии времени вычислений. Важным при этом оказывается также и то, что для вычисления искомых координат достаточно построить по рекуррентным формулам лишь одну систему полиномов Чебышева $\{T_n(t)\}$. Кроме того, элементарный анализ формул (8), (11)—(17) показывает, что предлагаемые преобразования не влекут за собой потери точности вычислений. Таким образом, при решении спутниковых задач обсуждаемый подход позволяет оптимизировать процесс вычисления геоцентрических прямоугольных координат Луны и Солнца.

1. *Астрономический* ежегодник СССР на 1986 год.— Л.: Наука, 1984.—691 с.
2. *Львов В. Н.* Комплекс программ вычисления видимых экваториальных координат звезд, больших планет, Солнца и Луны на основе фундаментальной эфемериды DE200/LE200. Описание программ.— Л., 1985.—26 с.— (АН СССР / Фонд алгоритмов и программ Ин-та теор. астрон./Д, № 268).
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1976.—327 с.
4. *Project* MERIT Standards.— Washington, 1983.—85 p.— (Circular / U. S. Naval Observatory; N 167).
5. *Standish E. M.* Orientation of the JPL ephemerides, DE200/LE200, to the dynamical equinox of J2000 // Astron. and Astrophys. 1982.—**114**, N 2.— P. 297—302.

Львов. политехн. ин-т им. Ленин. комсомола,
Львов

Поступила в редакцию
29.01.86

РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 523.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ОБОЛОЧКЕ СОЛНЦА / Гадун А. С.

(Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-86-106Р)

Приводятся результаты прямого трехмерного численного моделирования турбулентной конвекции в верхней оболочке Солнца (фотосфере и сверхадиабатической области) в приближении сжимаемой, вязкой, гравитационно-стратифицированной среды. Использовался метод моделирования крупных вихрей, а учет явлений переноса на подсеточном уровне проводился на основе решения уравнений переноса. Трехмерный лучистый перенос энергии трактовался в серой аппроксимации и в приближении изотропности поля излучения. Для решения системы нелинейных неоднородных уравнений в частных производных применен метод «крупных частиц».

Полученные трехмерные гидротермодинамические модели воспроизводят основные наблюдательные характеристики тонкой структуры фраунгоферовых линий и фотосферного грануляционного слоя.