

УДК 629.783

О сходимости оценок лазерных наблюдений ИСЗ

Г. С. Курбасова, Л. В. Рыхлова, Г. Н. Шликарь

Обсуждаются два подхода к решению задачи улучшения сходимости оценок по методу наименьших квадратов при обработке лазерных наблюдений ИСЗ. Для улучшения сходимости в первом случае проводится усечение выделяющихся наблюдений с последующим применением классических критериев и процедур оценивания, во втором — оценки лазерных наблюдений определяются в робастном варианте метода наименьших квадратов.

Для улучшения сходимости итерационного процесса в робастной процедуре предложен метод определения начальных параметров, основанный на сплайн-аппроксимации.

ON THE CONVERGENCE OF MEASUREMENTS IN THE LASER OBSERVATIONS OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITES, by Kurbasova G. S., Rykhlova L. V., Shlikar' G. N.— The two approaches for the improvement of convergence in the least square method when applied to the laser observations of artificial earth satellites are discussed. The first approach is the truncation of outstanding measurements and subsequent implication of usual criteria and routines. The second approach is the robust routine of the least square method. For the improvement of convergence in the robust routine the method for determination of the initial parameters by the spline approximation is suggested.

Математическое описание лазерно-локационного сигнала требует учета большого количества разнообразных физических явлений, сопровождающих его генерацию: прохождение через формирующий оптический тракт, распространение в атмосфере, рассеяние на уголковом отражателе, регистрацию принимаемого излучения и др.

Большинство из этих физических явлений имеет флуктуационный характер, и погрешности, вносимые нами при измерении топоцентрических расстояний до ИСЗ, плохо моделируются.

Если на этапе первичной обработки лазерных наблюдений попытаться учесть все возможные эффекты в статистической модели, то она окажется чрезвычайно громоздкой и неудобной для получения необходимых оценок. Математически целесообразным приближением, соответствующим неопределенности исходного распределения случайной составляющей ошибок лазерных наблюдений, можно считать нормальное распределение.

Для оценки обоснованности этого приближения будем исходить из принципа робастности (устойчивости): малая ошибка в математической модели не должна привести к существенной ошибке в окончательных выводах.

Серии лазерных наблюдений ИСЗ нередко содержат некоторое количество больших ошибок (выделяющихся наблюдений), которые невозможно обнаружить при сравнении с эфемеридой. В этом случае классическая процедура вычисления оценок по методу наименьших квадратов будет не робастной. Для получения робастных оценок необходимо исключить влияние выделяющихся наблюдений.

В данной работе обсуждается 2 варианта решения этой задачи на основе метода наименьших квадратов: метод усечения выделяющихся наблюдений с применением классических критериев и процедур оценивания и робастный вариант метода наименьших квадратов.

Робастный вариант метода наименьших квадратов обеспечивает новый подход к проблеме первичного анализа, коррекции и оценки случайной составляющей погрешности лазерных измерений топоцентриче-

ских расстояний до ИСЗ в условиях оперативной работы отдельной станции наблюдений.

Процедура усечения выделяющихся лазерных наблюдений. Принятая нами модель ошибок состоит в том, что измеряемые величины топоцентрических расстояний до ИСЗ ρ_i представляются в виде суммы временного полинома $\hat{\rho}(t)$ и случайной последовательности $\{u_i\}$, то есть имеет место система n уравнений вида

$$\rho_i = \hat{\rho}(t_i) + u_i. \quad (1)$$

В этом выражении величины u_i — некоррелированы, имеют среднее значение $E u_i = 0$ и дисперсию $D(u_i) = \sigma^2$. Последовательность $\{\hat{\rho}(t)\}$ включает систематическую составляющую ошибок измерений.

Детерминированная составляющая в выражении (1) представляет собой сложную функцию времени, поэтому задача выделения систематической составляющей (тренда) может быть решена путем определения коэффициентов многопараметрической регрессии.

Характер изменения топоцентрических расстояний на интервале прохождения ИСЗ над станцией наблюдений вынуждает аппроксимировать последовательность $\{\hat{\rho}(t)\}$ полиномами высокого порядка. Решение задачи выбора оптимальной степени полиномиальной регрессии и получения достоверных оценок коэффициентов регрессии рассматривается в соответствующей литературе [1, 2].

Чтобы избежать недостатков, связанных с вычислением полиномиальной регрессии высокого порядка, выделение систематической составляющей проводится в 2 этапа: 1) определяется последовательность невязок $\{r\}$ относительно эфемериды ИСЗ; 2) к полученной на 1-м этапе последовательности применяются классические критерии и процедуры оценивания. При этом, вместо системы уравнений (1), получим

$$r_i = \hat{r}(t_i) + \Delta r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Систематическая составляющая ошибки принятой модели движения ИСЗ войдет в оцениваемый тренд $\hat{r}(t)$.

Запишем систему уравнений (2) в матричном виде

$$\vec{r} = \mathbf{N}\vec{\gamma} + \vec{\Delta r}, \quad (3)$$

где $\vec{\gamma}$ — вектор-столбец неизвестных параметров регрессии; \mathbf{N} — матрица известных коэффициентов.

В классической постановке задача решения системы n уравнений с целью оценки p параметров (коэффициентов) регрессии $\{\gamma\}$ сводится к минимизации суммы квадратов

$$\sum_{i=1}^n \left(r_i - \sum_{j=1}^p \varphi_{ij} \gamma_j \right)^2 = \min. \quad (4)$$

Из решения (3) получим оценку вектора $\vec{\gamma}$

$$\vec{\gamma} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \vec{r}. \quad (5)$$

Оценка вектора \vec{r} определяется выражением

$$\hat{\vec{r}} = \mathbf{N} (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \vec{r} = \mathbf{Q} \vec{r}. \quad (6)$$

В общем случае \mathbf{Q} — симметричная $n \times n$ матрица, имеющая p собственных значений, равных 1, и $n-p$ нулевых собственных значений. Ее диагональные элементы q_{ii} и след $tr(\mathbf{Q})$ удовлетворяют соответственно

условиям

$$0 \leq q_{ii} \leq 1, \quad (7)$$

$$\text{tr}(\mathbf{Q}) = p. \quad (8)$$

Оценка по методу наименьших квадратов i -го наблюдения, с учетом (6), имеет вид

$$\hat{r}_i = \sum_{k=1}^n q_{ik} r_k. \quad (9)$$

Если $q = \max_i q_{ii} \rightarrow 0$, то справедливы утверждения [4] о эффективности оценок метода наименьших квадратов. Оценка дисперсии σ^2 имеет вид

$$S_n^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \Delta r_i^2. \quad (10)$$

Серьезным препятствием к применению оценок по методу наименьших квадратов для обработки лазерных наблюдений являются выделяющиеся наблюдения, полученные в результате флуктуаций погрешностей отдельных измерений. Эти наблюдения вызывают удлинение хвостов статических распределений, что снижает эффективность оценки S_n^2 .

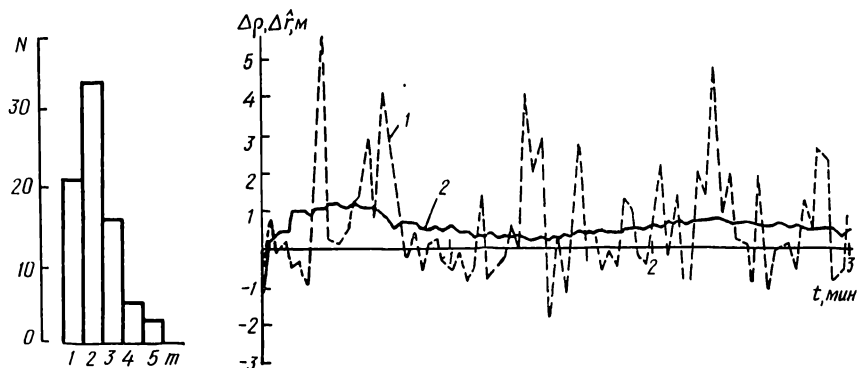


Рис. 1. Гистограмма эмпирического распределения случайных величин Δr в серии наблюдений ИСЗ «Starlette» (1984.10.27)

Рис. 2. Графики изменения отклонений Δr_i (1) и погрешностей оценок функции регрессии $\hat{\Delta r}_i$ (2) на интервале лазерных наблюдений ИСЗ «Starlette» (1984.10.27) до усечения выделяющихся наблюдений

В ряде случаев (не сильная «засоренность» и большое количество наблюдений в оцениваемой выборке) можно избежать ошибок в оценке лазерных наблюдений, если провести усечение выделяющихся наблюдений по некоторым правилам с последующим применением к оставшимся наблюдениям классических оценок [1, 2]. Приведем пример, показывающий, что процедура усечения выделяющихся наблюдений увеличивает достоверность оценок лазерных наблюдений методом наименьших квадратов. Для примера использовались лазерные наблюдения ИСЗ «Starlette», полученные на прохождении этого спутника над п. Симеиз. Наблюдения проведены на лазерном спутниковом дальномере «Интеркосмос». Гистограмма эмпирического распределения отклонений Δr измеренных топоцентрических расстояний от вычисленных приведена на рис. 1. (Погрешность вычисления топоцентрических расстояний в этом примере не превышает ± 0.01 м). По оси абсцисс отложены отрезки, соответствующие m одинаковым подынтервалам изменения величин Δr_i ; по оси ординат — количество наблюдений N в каждом подынтервале. Приведенное эмпирическое распределение отклоняется от нормального; асимметрия $S_k = 1.2$, эксцесс $\epsilon_k = 1.4$, эмпирическое значение $\chi_k^2 = 24.93$ (при 1 %-м уровне значимости и числе степеней свободы

$\nu=4$ теоретическое значение $\chi^2=13.28$). На рис. 2 по оси абсцисс отложен интервал наблюдений, по оси ординат — величины $\Delta\rho_i$ (гр. 1) и погрешности оценок функции регрессии $\Delta\hat{r}_i$ (гр. 2).

В результате флуктуации погрешностей в рассматриваемой серии лазерных измерений содержатся отдельные выделяющиеся $\Delta\rho_i$, что

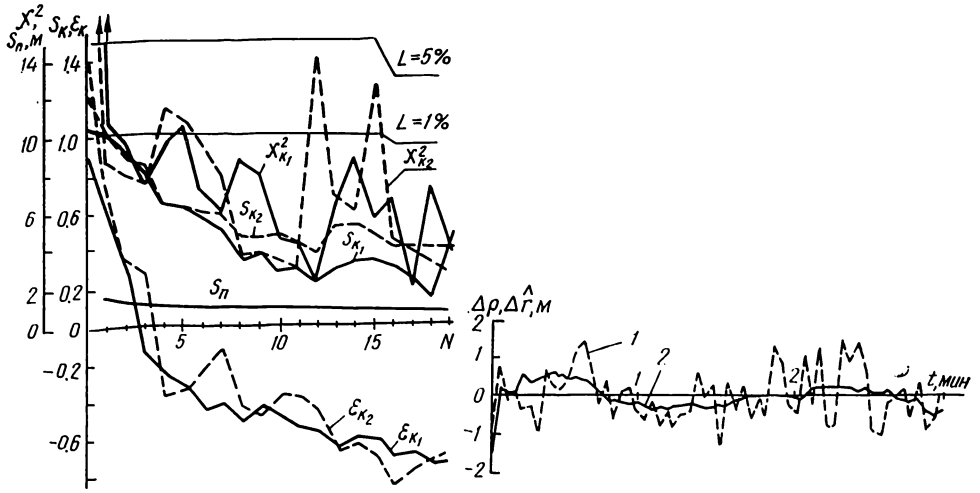


Рис. 3. Изменение статистических характеристик при последовательном усечении лазерных наблюдений ИСЗ «Starlette» (1984.10.27): N — количество отброшенных наблюдений (индексом k_1 отмечены эмпирические характеристики распределений величины Δr ; индексом k_2 — те же характеристики отклонений $\Delta\rho$); L — уровни теоретических значений χ^2

Рис. 4. Графики изменения отклонений $\Delta\rho_i$ (1) и погрешностей оценок функции регрессии $\Delta\hat{r}_i$ (2) ИСЗ «Starlette» (1984.10.27) после усечения выделяющихся наблюдений

приводит к значительному смещению оценок \hat{r}_i . Следовательно, в этом случае оценку тренда $\hat{r}(t)$ и дисперсии (10) нельзя считать асимптотически оптимальными.

Применим к этой выборке процедуру последовательного усечения выделяющихся наблюдений [2]. Графики изменения эмпирических характеристик распределения величин $\Delta\rho$ (пунктирные линии) и Δr (сплошные линии), определенные для $N=19$ шагов подгонки функции регрессии, приведены на рис. 3. На этом же рисунке приведены теоретические значения χ^2 для 1 %-го и 5 %-го уровней значимости. Сходимость оценок лазерных наблюдений по методу наименьших квадратов в этом примере обеспечивается при усечении выделяющихся наблюдений после 2÷3 итераций. Дальнейшее продолжение процедуры усечения до $N=19$ не приводит к существенному отклонению экспериментального распределения от нормального. При этом уменьшается погрешность регрессии, обусловленная влиянием выделяющихся наблюдений. Результат подгонки кривой регрессии (19-й шаг) показан на рис. 4.

Робастный метод оценок лазерных наблюдений. Серия лазерных наблюдений, рассмотренная в приведенном выше примере, содержит всего одно наблюдение (1.3 %), существенно влияющее на характер распределения. Известно, что для нормально распределенных наблюдений оценка разброса S_n примерно на 12 % более эффективна, чем другая оценка разброса — среднее абсолютное отклонение d_n . Результаты вычисления асимптотической относительной эффективности (АОЭ) статистики d_n по статистике S_n , определенные по формуле [4]:

$$АОЭ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(S_n)/(ES_n)^2}{D(d_n)/(Ed_n)^2} = \frac{[3(1 + 8\epsilon)/(1 + 8\epsilon)^2 - 1]/4}{\pi(1 + 8\epsilon)/[2(1 + 2\epsilon)^2] - 1}, \quad (11)$$

где ϵ — вероятность появления выделяющегося наблюдения, приведены

на рис. 5. Полученная зависимость указывает на то, что влияние одного плохого наблюдения из 79 приводит к потере относительной эффективности статистики S_n по сравнению с d_n почти в 1.3 раза.

В зависимости от условий проведения лазерно-локационного эксперимента возникает ряд трудностей, приводящих к плохой сходимости оценок по методу наименьших квадратов. Это, в основном, трудности

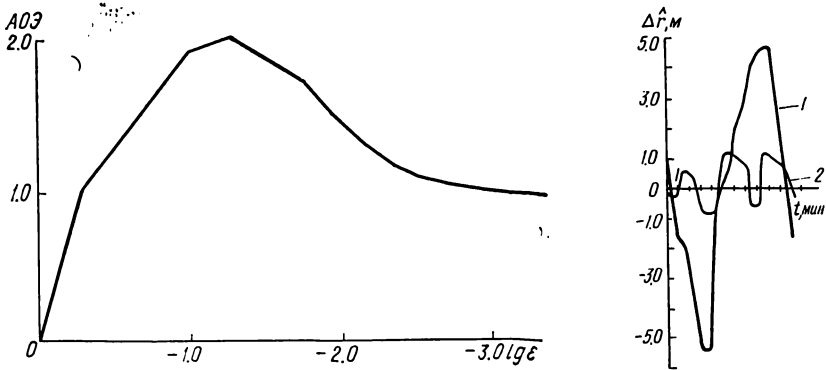


Рис. 5. Асимптотическая относительная эффективность (АОЭ) статистики d_n по статистике S_n

Рис. 6. Ход функции регрессии относительно орбиты (ось абсцисс) для серии лазерных наблюдений ИСЗ «Lageos» (1984.10.27) до итераций (1) и после пятой итерации (2)

выявления выделяющихся наблюдений и статистические ошибки неверного усечения или ошибочного сохранения.

Указанные выше недостатки устраняются в робастном варианте метода наименьших квадратов [4]. В этом методе в качестве предельных оценок принимаются оценки максимального правдоподобия и, вместо формулы (5), минимизируется сумма функций от остатков

$$\sum_{i=1}^n \psi \left(\frac{r_i - \hat{r}_i(\gamma)}{S} \right) = \min \quad (12)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \psi' \left(\frac{r_i - \hat{r}_i(\gamma)}{S} \right) \frac{\partial \hat{r}_i(\gamma)}{\partial \gamma_j} = 0, \quad (13)$$

где $j=1, \dots, p$; S — оценка масштаба.

Решение системы уравнений (13) сводится к одновременной итеративной оценке коэффициентов регрессии $\{\gamma\}$ и параметра масштаба S . Для этого необходимо получить начальные оценки коэффициентов $\{\gamma^{(0)}\}$ и масштаба $S^{(0)}$. От правильного выбора начальных параметров зависит сходимость процесса итераций: ошибочно увеличивающаяся величина Δr_i , в результате первой итерации, остается большой при последующих приближениях.

Присутствие выделяющихся наблюдений в выборке приводит к тому, что обычная оценка методом наименьших квадратов величин $\{\gamma^{(0)}\}$ и $S^{(0)}$ может оказаться ненадежной. Положение можно исправить, если уменьшить влияние выделяющихся наблюдений, введя весовые множители w_i . Для обнаружения выделяющихся наблюдений используем информативность главной диагонали матрицы Q . Влияние элементов главной диагонали на величину остатка Δr_k можно представить в виде выражения

$$\Delta r_k = r_k - \hat{r}_k = (1 - q_{kk}) r_k - \sum_{i \neq k} q_{ki} r_i, \quad (14)$$

где q_{kk}, q_{ki} — элементы матрицы Q .

Из предположения о нормальном распределении наблюдений следует, что большие значения q_{kk} соответствуют выделяющимся наблюдениям. В случае многопараметрической регрессии большая ошибка в k -м наблюдении ($q_{kk} > 0.5$) не обязательно проявит себя в остатке Δr_k , но она может повлиять на величину какого-либо другого остатка анализируемой последовательности наблюдений. Следовательно, плохие наблюдения непредсказуемым образом могут влиять на ход кривой регрессии. В то же время, отдельные оценки \hat{r}_i (при $q_{kk} \leq 0.2$) можно считать достаточно надежными. Примем эти наблюдения в качестве узлов интерполяционной сетки, на которой определим кубическую сплайн-функцию [3]. Для определения весовых коэффициентов w_i используем отклонения r_k ($q_{kk} > 0.2$) от интерполируемых значений на соответствующие моменты времени. Введение весовых коэффициентов позволяет получить надежные оценки начальных параметров $\{\gamma^{(0)}\}$ и $S^{(0)}$ обычным методом наименьших квадратов.

Весовые коэффициенты могут уточняться в процессе итераций. Для этого, вместо системы уравнений (13), решается следующая система

$$\sum_{i=1}^n w_i \psi' \left(\frac{r_i - r_i(\gamma)}{\delta S} \right) \frac{\partial \hat{r}_i(\gamma)}{\partial \gamma_j} = 0, \quad (15)$$

где $j=1, \dots, p$; δ — множитель, сокращающий масштаб.

Результат применения описанного выше метода для оценки лазерных наблюдений ИСЗ «Lageos» приведен на рис. 6. Это прохождение наблюдалось 1984.10.27 над п. Симеиз. Всего получено 20 наблюдений. Из этой серии шесть наблюдений заменены псевдонаблюдениями в процессе итераций. Графики 1 и 2 на рис. 6 изображают кривые регрессии относительно орбиты до итераций и после пятой итерации соответственно. В этом примере выделяющиеся наблюдения составляют 30 % всей выборки ($n=20$). Поэтому применение процедуры усечения приводит к неприемлемо малому количеству наблюдений на параметр регрессии. В то же время, робастный вариант метода наименьших квадратов позволяет при неизменном количестве наблюдений уменьшить влияние плохих наблюдений на оценку параметров регрессии.

Изложенные выше два подхода обеспечивают хорошую сходимость оценок по методу наименьших квадратов: 1 — при небольшом количестве выделяющихся наблюдений и достаточном объеме выборки для оценки параметров регрессии; 2 — в случае малого количества наблюдений, особенно, если не представляется возможность исключить какое-либо из них.

Если оцениваемый временной ряд содержит некоторое количество сильно и умеренно выделяющихся лазерных наблюдений, то хороший результат получается при умеренном усечении с последующим применением робастной процедуры к оставшимся наблюдениям.

1. Андерсен Т. Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1980.—755 с.
2. Курбасова Г. С. Лазерные наблюдения ИСЗ. Выделение сигнала, редукция наблюдений // Астрометрия и астрофизика.—1981.— Вып. 43.— С. 83—84.
3. Курбасова Г. С. Аппроксимация эфемерид ИСЗ для управления двухосной монтировкой лазерного дальномера // Астрон. циркуляр.—1984.— № 1311.— С. 5—7.
4. Хьюбер П. Робастность в статистике.— М.: Мир, 1984.—303 с.

Астрон. совет. АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию 30.08.85,
после доработки 04.10.85