

УДК 521.182.2

О вычислении производных потенциала притяжения Земли для целей спутниковой геодезии и геодинамики

О. А. Абрикосов

Рассмотрена задача вычисления производных потенциала притяжения Земли. Производные представлены рядами нормированных шаровых гармоник. Их коэффициенты найдены в виде линейных комбинаций нормированных стоксовых постоянных планеты. Полученные соотношения позволили построить эффективный алгоритм для вычисления указанных производных. Его использование вместо широко известного алгоритма Каннингема приводит к ускорению процесса вычислений: при уточнении орбит ИСЗ «Lageos» и «Starlette» экономия времени счета составила соответственно 34 % и 36 %.

ON COMPUTATION OF A DERIVATIVES OF THE EARTH'S GRAVITATIONAL POTENTIAL FOR SATELLITE GEODESY AND GEODYNAMICS, by Abrikosov O. A.— The problem of computation of derivatives of the Earth's gravitational potential is considered. The derivatives have been represented by the series of fully normalized solid spherical harmonics. Their coefficients have been obtained in form of the linear combinations of fully normalized Stokes' constants. On this ground an effective algorithm for computation of the geopotential derivatives in rectangular coordinates has been developed. The use of this algorithm instead of the well-known Cunningham's one leads to decreasing of computer time for 34 % and 36 % in cases of improvement of LAGEOS and STARLETTE orbits respectively.

Введение. Рассмотрим задачу вычисления производных от потенциала притяжения Земли, заданного в виде ряда шаровых гармоник, по координатам точки, внешней относительно поверхности планеты. Одним из путей ее решения является почленное дифференцирование указанного ряда. Получаемые при этом соотношения лежат в основе разнообразных алгоритмов [5, 6, 7], практическое использование которых связано с необходимостью расчета довольно большого количества вспомогательных величин в процессе вычисления искомого производных.

В то же время известный факт, что производная порядка k от шаровой функции степени n есть шаровая функция степени $(n+k)^*$ [2, 3], позволяет решать обсуждаемую задачу путем нахождения частичной суммы ряда Лапласа, отличающегося от такового для потенциала лишь пределами суммирования и видом коэффициентов. Связь последних со стоксовыми постоянными планеты можно найти, воспользовавшись соотношениями, уже полученными при почленном дифференцировании ряда, представляющего потенциал.

Постановка задачи. В качестве исходных примем выражения для производных от потенциала притяжения V по прямоугольным координатам x, y, z внешней точки, полученные Каннингемом [6] и являющиеся основой его алгоритма, широко используемого при решении задач спутниковой геодезии. Выразив все линейные величины в единицах экваториального радиуса a_e Земли, согласно [6], запишем:

$$D_{\alpha\beta\gamma}(V) = \operatorname{Re} \left\{ fM \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (C_{nm} - iS_{nm}) D_{\alpha\beta\gamma}(V_{nm}) \right\}, \quad (1)$$

* Использование этого свойства позволило в середине XIX в. Максвеллу разработать общую теорию шаровых и сферических функций — теорию полюсов. Максвеллова запись шаровой функции n -й степени наглядно показывает, что последняя может быть получена путем дифференцирования главного фундаментального решения уравнения Лапласа $1/r$.

где $D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ — оператор дифференцирования; α, β, γ — порядки производных по x, y, z соответственно; fM — геоцентрическая гравитационная постоянная; C_{nm}, S_{nm} — безразмерные (за счет чего здесь и далее присутствует множитель fM) ненормированные коэффициенты разложения V в ряд сферических функций; N — максимальная степень учитываемых гармоник; $i = \sqrt{-1}$; Re означает действительную часть комплексного выражения в фигурных скобках. Функции V_{nm} суть комплексные величины вида:

$$V_{nm} = v_{nm} + i\omega_{nm}, \quad (2)$$

в которых v_{nm}, ω_{nm} — ненормированные элементарные шаровые гармоники, удовлетворяющие при смежных индексах рекуррентным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} (n-m+1)r^2V_{n+1,m} &= (2n+1)zV_{nm} - (n+m)V_{n-1,m}, \\ r^2V_{n+1,n} &= (2n+1)zV_{nn}, \quad r^2V_{n+1,n+1} = (2n+1)(x+iy)V_{nn}, \\ V_{00} &= \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Производные функций V_{nm} выражаются линейными комбинациями вида [6]:

$$D_{\alpha\beta\gamma}(V_{nm}) = i^\beta \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-j} (n-m+\gamma+2j)!}{2^{\alpha+\beta} (n-m)!} c_{\alpha\beta j} V_{n+\alpha+\beta+\gamma, m+\alpha+\beta-2j}, \quad (4)$$

где

$$c_{\alpha\beta j} = \sum_k (-1)^k \binom{\alpha}{j-k} \binom{\beta}{j}, \quad \max(0, j-\alpha) \leq k \leq \min(\beta, j). \quad (5)$$

Формула (4), устанавливающая связь между элементарными шаровыми гармониками и их производными, в совокупности с выражением (1) позволяет получить коэффициенты разложения соответствующих производных в виде линейных комбинаций типа (4) коэффициентов $\{C_{nm}, S_{nm}\}$. Имеет смысл, однако, принять во внимание, что в силу быстрого уменьшения нормирующих множителей возможность учета ненормированных гармоник высоких степеней на практике существенно ограничена. Применение же нормированных значений

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{aligned} \right\} = N_{nm}^{-1} \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases}, \quad \bar{V}_{nm} = N_{nm} V_{nm},$$

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}} \quad (6)$$

(δ_{0m} — символ Кронекера) в рамках описанного алгоритма затруднительно из-за необходимости вычислять производные (4) шаровых гармоник, а следовательно — и отношения нормирующих множителей N_{nm} , всякий раз, когда нужно получить $D_{\alpha\beta\gamma}(V)$. В то же время предлагаемый подход, основанный на суммировании рядов шаровых функций для искоемых производных, допускает использование нормированных гармоник так же просто, как и при вычислении самого потенциала V .

Таким образом, реализация обсуждаемого подхода состоит в нахождении нормированных коэффициентов разложения производных $D_{\alpha\beta\gamma}(V)$ на основании выражений (1), (4), (6), получении рекуррентных формул для нормированных шаровых гармоник \bar{V}_{nm} , исходя из

(3), (6), и определении пределов суммирования рядов, представляющих производные $D_{\alpha\beta\gamma}(V)$ потенциала притяжения V планеты.

Рекуррентные формулы. Легко видеть, что с учетом (6) формулы (3) после очевидных тождественных преобразований примут вид:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{(n+1)^2 - m^2} r^2 \bar{V}_{n+1,m} = \\ & = \sqrt{2n+3} \left(\sqrt{2n+1} z \bar{V}_{nm} - \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{2n-1}} \bar{V}_{n-1,m} \right), \\ & r^2 \bar{V}_{n+1,n} = \sqrt{2n+3} z \bar{V}_{nn}, \quad \sqrt{2n+2 - \delta_{0n}} r^2 \bar{V}_{n+1,n+1} = \\ & = \sqrt{2n+3} (x + iy) \bar{V}_{nn}, \\ & \bar{V}_{00} = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Полученные соотношения, формально совпадающие с рекуррентными формулами для нормированных присоединенных функций Лежандра [1, 8], позволяют вычислить значения всех нормированных шаровых гармоник \bar{V}_{nm} на основании единственного начального значения $\bar{V}_{00} = 1/r$.

Преобразование линейных комбинаций. Подставляя (4) в (1), переходя с помощью (6) к \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} , \bar{V}_{nm} и учитывая, что k — кратное дифференцирование шаровой функции степени n дает шаровую функцию степени $(n+k)$ [2, 3], можем записать:

$$D_{\alpha\beta\gamma}(V) = \operatorname{Re} \left\{ i M \sum_{n=\alpha+\beta+\gamma}^{N+\alpha+\beta+\gamma} \sum_l \bar{A}_{nl}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{V}_{nl} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\bar{A}_{nl}^{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_j i^\beta \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-j}}{2^{\alpha+\beta}} c_{\alpha\beta j} M_{nlj}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{F}_{nlj}^{\alpha,\beta,\gamma}, \quad (9)$$

$$M_{nlj}^{\alpha,\beta,\gamma} = \sqrt{\frac{[2(n-\alpha-\beta-\gamma)+1](n-l)!(n+l)!(2-\delta_{0l}-\alpha-\beta+2j)}{(2n+1)(n-l-\gamma-2j)![n+l-\gamma+2(j-\alpha-\beta)]!(2-\delta_{0l})}}, \quad (10)$$

$$\bar{F}_{nlj}^{\alpha,\beta,\gamma} = \bar{C}_{n-\alpha-\beta-\gamma,l-\alpha-\beta+2j} - i \bar{S}_{n-\alpha-\beta-\gamma,l-\alpha-\beta+2j}, \quad (11)$$

$$0 \leq j \leq \alpha + \beta, \quad (12)$$

$c_{\alpha\beta j}$ определяется формулами (5), а в суммах (9) учитываются только слагаемые, содержащие гармонические коэффициенты, вторые индексы которых удовлетворяют неравенству

$$0 \leq l - \alpha - \beta + 2j \leq n - \alpha - \beta - \gamma. \quad (13)$$

Из (13) следует

$$\inf_j (\alpha + \beta - 2j) \leq l \leq \sup_j (n - \gamma - 2j), \quad (14)$$

на основании чего, принимая во внимание (12), находим следующие пределы суммирования ряда (8) по l :

$$-(\alpha + \beta) \leq l \leq n - \gamma. \quad (15)$$

Таким образом, при каждом значении n разложение (8) содержит $(\alpha + \beta)$ функций \bar{V}_{nl} с отрицательными индексами l . Поэтому, учитывая известное соотношение [6]:

$$V_{n,-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} V_{nm}^*, \quad (m > 0), \quad (16)$$

в котором

$$V_{nm}^* = v_{nm} - i\omega_{nm}, \quad (17)$$

и преобразуя его на основании (6) к виду:

$$\bar{V}_{n,-m} = (-1)^m \bar{V}_{nm}^*, \quad (18)$$

получаем

$$\sum_{l=-(\alpha+\beta)}^{n-\gamma} \bar{A}_{nl}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{V}_{nl} = \sum_{m=0}^{n-\gamma} (\bar{B}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{V}_{nm} + \bar{B}_{n,-m}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{V}_{nm}^*). \quad (19)$$

Коэффициенты $\bar{B}_{nl}^{\alpha,\beta,\gamma}$ ($l = \pm m$) есть суммы вида:

$$\bar{B}_{nl}^{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} \bar{b}_{nij}^{\alpha,\beta,\gamma}, \quad (20)$$

где с учетом неравенства (13) и соотношения (18)

$$\bar{b}_{nij}^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{cases} i^{\beta} \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-j+(l-l)/2}}{2^{\alpha+\beta} (1 + \delta_{0l})} c_{\alpha\beta j} M_{nij}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{F}_{nij}^{\alpha,\beta,\gamma}, \\ 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$(\alpha + \beta - l \leq 2j \leq n - l - \gamma), \quad (2j < \alpha + \beta - l, 2j > n - l - \gamma).$$

Теперь, принимая во внимание формулы (19), (20), (17) и (8), можем найти коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma} &= \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} (\bar{b}_{nmj}^{\alpha,\beta,\gamma} + \bar{b}_{n,-m,j}^{\alpha,\beta,\gamma}), \\ \bar{q}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma} &= \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} i(\bar{b}_{nmj}^{\alpha,\beta,\gamma} - \bar{b}_{n,-m,j}^{\alpha,\beta,\gamma}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

и записать искомое разложение производной порядка $(\alpha + \beta + \gamma)$ потенциала V в ряд шаровых гармоник:

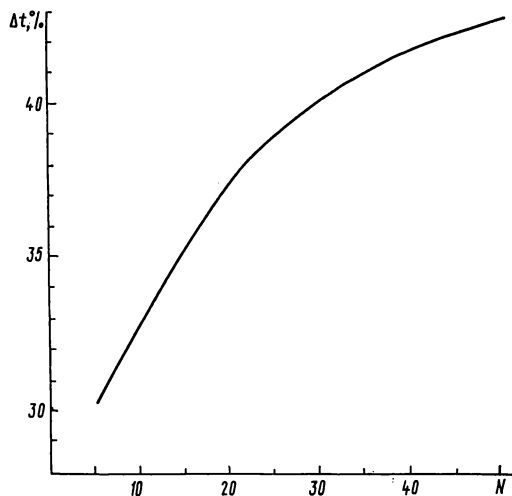
$$D_{\alpha\beta\gamma}(V) = iM \sum_{n=\alpha+\beta+\gamma}^{N+\alpha+\beta+\gamma} \sum_{m=0}^{n-\gamma} (\bar{p}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{v}_{nm} + \bar{q}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma} \bar{\omega}_{nm}). \quad (23)$$

Практическое использование. Полученные выражения позволяют сформировать следующий алгоритм вычисления производных потенциала притяжения планеты: 1) по формулам (5), (10), (11), (21), (22) на основании имеющегося набора коэффициентов $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$ образуем коэффициенты $\{\bar{p}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma}, \bar{q}_{nm}^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ разложения нужной производной в ряд (23); 2) используя разложение (23) и рекуррентные формулы (7), вычисляем значения производной во всех требуемых, внешних относительно поверхности планеты, точках. При этом легко реализуется суммирование ряда (23) параллельно с вычислением значений шаровых гармоник $\bar{v}_{nm}, \bar{\omega}_{nm}$.

Возможность однократного расчета коэффициентов (22) приводит к существенно меньшим, чем при использовании алгоритма Каннингема, затратам вычислительного времени. График относительной экономии последнего при вычислении производных первого порядка в зависимости от максимальной степени усечения принятого набора стоксовых постоянных представлен на рисунке. Следует отметить повышение экономичности обсуждаемого алгоритма по мере увеличения N вследствие необходимости подсчитывать при использовании выражения (1) тем больше сумм (4), чем больше n . Причем количество слагаемых в каждой из них возрастает при повышении порядка искомой производной, что также приводит к повышению эффективности вычислений по формуле (23) вместо (1), (4).

Сказанное позволяет утверждать, что весьма выгодным будет использование предлагаемого алгоритма при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ и обработке спутниковых наблюдений в рамках орбитального и динамического методов космической геодезии. Экономия времени в этом случае может достигать 35—40 %, что хорошо подтверждается результатами определения орбит ИСЗ «Lageos» и «Starlette» по данным их лазерной локации. При обработке наблюдений ИСЗ «Lageos» гравитационное поле Земли задавалось гармониками модели GEM-L2 до 20-го порядка и степени включительно. При уточнении же орбиты ИСЗ «Starlette»

График относительной экономии Δt времени ЭВМ при вычислении первых производных потенциала в зависимости от максимальной степени N учитываемых гармоник ($\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{t_1} 100\%$; t_1, t_2 — количество времени, необходимого для вычислений с помощью алгоритма Каннингема и предлагаемого алгоритма соответственно)



пришлось — для сравнения двух алгоритмов — ограничиться учетом гармоник модели PGS 1331 только до 30-й степени, так как необходимое для работы алгоритма Каннингема разнормирование стоковых постоянных более высоких степеней сопряжено с существенными трудностями. В то же время, при использовании предлагаемого алгоритма для определения орбиты этого спутника мы смогли не только учесть все без исключения гармоники PGS 1331 (полный набор до 36-й степени и отдельные коэффициенты до 48-й степени), но и, в порядке эксперимента, задать геопотенциал моделью GEM-10C, усеченной до 70-го порядка и степени включительно. Количество времени, необходимого для обработки наблюдений указанных ИСЗ в пределах пятисуточных дуг, сократилось соответственно на 34 % и 36 %, что несколько меньше, чем можно было бы ожидать, исходя из показанной на рисунке зависимости. Это, впрочем, легко объясняется выполнением и ряда других, не связанных с вычислением производных потенциала, расчетов при дифференциальном уточнении орбиты, тогда как график получен с учетом времени, необходимого только для вычисления значений производных.

Заключение. Итак, предложенный алгоритм позволяет существенно ускорить процесс вычисления производных потенциала притяжения планеты и без каких-либо практических затруднений учитывать гармоники геопотенциала высоких степеней. Эти качества делают целесообразным его применение при решении ряда геодезических и геодинемических задач, и в особенности — при реализации орбитального и динамического методов спутниковой геодезии. В последнем случае возникает необходимость расчета производных потенциала первого и второго порядков, коэффициенты разложения которых в явном виде приведены в приложении. Использование для этой цели ряда (23) с коэффициентами (22) и рекуррентных формул (7) вместо алгоритма Каннингема [6] приводит к почти 40 %-ной экономии вычислительного времени при обработке данных наблюдений геодезических ИСЗ. Отметим также, что разработанный алгоритм, по-видимому, упростит прак-

тическую реализацию таких методов построения орбит (см., например, [4]), которые предусматривают вычисление производных потенциала не только первого и второго, но и более высоких порядков.

Конечно, для каждой производной требуется свой набор коэффициентов (22), что, естественно, приводит к некоторым дополнительным затратам памяти ЭВМ. Однако при выполнении расчетов на современной вычислительной технике особых сложностей в этом отношении не возникает, тем более, что обычно на практике нужны значения производных лишь нескольких низших порядков. Во всяком случае, этот возможный недостаток разработанного алгоритма, безусловно, компенсируется высокой эффективностью последнего.

Приложение

$$\varphi_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-1)(n-m-1)(n-m)}{2n+1}},$$

$$\psi_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-1)(n+m-1)(n+m)}{2n+1}}$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{0,0,1} \\ \bar{q}_{nm}^{0,0,1} \end{matrix} \right\} = - \sqrt{\frac{(2n-1)(n-m)(n+m)}{2n+1}} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,m} \\ \bar{S}_{n-1,m} \end{matrix} \right. \quad 0 \leq m \leq n-1$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{1,0,0} \\ \bar{q}_{nm}^{1,0,0} \end{matrix} \right\} = \sqrt{2} \varphi_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,1} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m = 0$$

$$= \varphi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,2} \\ \bar{S}_{n-1,2} \end{matrix} \right. - \sqrt{2} \psi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,0} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m = 1$$

$$= \varphi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,m+1} \\ \bar{S}_{n-1,m+1} \end{matrix} \right. - \psi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,m-1} \\ \bar{S}_{n-1,m-1} \end{matrix} \right. \quad 2 \leq m \leq n-2$$

$$= \quad \quad \quad - \psi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-1,m-1} \\ \bar{S}_{n-1,m-1} \end{matrix} \right. \quad n-1 \leq m \leq n$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{0,1,0} \\ \bar{q}_{nm}^{0,1,0} \end{matrix} \right\} = \sqrt{2} \varphi_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-1,1} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m = 0$$

$$= \pm \varphi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-1,2} \\ \bar{C}_{n-1,2} \end{matrix} \right. - \sqrt{2} \psi_{n1} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \bar{C}_{n-1,0} \end{matrix} \right. \quad m = 1$$

$$= \pm \varphi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-1,m+1} \\ \bar{C}_{n-1,m+1} \end{matrix} \right. \pm \psi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-1,m-1} \\ \bar{C}_{n-1,m-1} \end{matrix} \right. \quad 2 \leq m \leq n-2$$

$$= \quad \quad \quad \pm \psi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-1,m-1} \\ \bar{C}_{n-1,m-1} \end{matrix} \right. \quad n-1 \leq m \leq n$$

$$\xi_{nm} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(2n-3)(n-m-3)(n-m-2)(n-m-1)(n-m)}{2n+1}}$$

$$\nu_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-3)(n-m-1)(n-m)(n+m-1)(n+m)}{2n+1}}$$

$$\eta_{nm} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(2n-3)(n+m-3)(n+m-2)(n+m-1)(n+m)}{2n+1}}$$

$$\xi_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-3)(n-m-2)(n-m-1)(n-m)(n+m)}{2n+1}}$$

$$\chi_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-3)(n-m)(n+m-2)(n+m-1)(n+m)}{2n+1}}$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{0,0,2} \\ \bar{q}_{nm}^{0,0,2} \end{matrix} \right\} = 2\nu_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m} \\ \bar{S}_{n-2,m} \end{matrix} \right. \quad 0 \leq m \leq n-2$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{2,0,0} \\ \bar{q}_{nm}^{2,0,0} \end{matrix} \right\} = \sqrt{2}\xi_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,2} \\ 0 \end{matrix} \right. - \nu_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,0} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m=0$$

$$= \xi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,3} \\ \bar{S}_{n-2,3} \end{matrix} \right. - \frac{1}{2} \nu_{n1} \left\{ \begin{matrix} 3\bar{C}_{n-2,1} \\ \bar{S}_{n-2,1} \end{matrix} \right. \quad m=1$$

$$= \xi_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,4} \\ \bar{S}_{n-2,4} \end{matrix} \right. - \nu_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,2} \\ \bar{S}_{n-2,2} \end{matrix} \right. + \sqrt{2}\eta_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,0} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m=2$$

$$= \xi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m+2} \\ \bar{S}_{n-2,m+2} \end{matrix} \right. - \nu_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m} \\ \bar{S}_{n-2,m} \end{matrix} \right. + \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad 3 \leq m \leq n-4$$

$$= \quad - \nu_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m} \\ \bar{S}_{n-2,m} \end{matrix} \right. + \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad n-3 \leq m \leq n-2$$

$$= \quad \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad n-1 \leq m \leq n$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{0,2,0} \\ \bar{q}_{nm}^{0,2,0} \end{matrix} \right\} = -\sqrt{2}\xi_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,2} \\ 0 \end{matrix} \right. - \nu_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,0} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m=0$$

$$= -\xi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,3} \\ \bar{S}_{n-2,3} \end{matrix} \right. - \frac{1}{2} \nu_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,1} \\ 3\bar{S}_{n-2,1} \end{matrix} \right. \quad m=1$$

$$= -\xi_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,4} \\ \bar{S}_{n-2,4} \end{matrix} \right. - \nu_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,2} \\ \bar{S}_{n-2,2} \end{matrix} \right. - \sqrt{2}\eta_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,0} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m=2$$

$$= -\xi_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m+2} \\ \bar{S}_{n-2,m+2} \end{matrix} \right. - \nu_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m} \\ \bar{S}_{n-2,m} \end{matrix} \right. - \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad 3 \leq m \leq n-4$$

$$= \quad - \nu_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m} \\ \bar{S}_{n-2,m} \end{matrix} \right. - \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad n-3 \leq m \leq n-2$$

$$= \quad - \eta_{nm} \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{n-2,m-2} \\ \bar{S}_{n-2,m-2} \end{matrix} \right. \quad n-1 \leq m \leq n$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{1,1,0} \\ \bar{q}_{nm}^{1,1,0} \end{matrix} \right\} = \sqrt{2}\xi_{n0} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-2,2} \\ 0 \end{matrix} \right. \quad m=0$$

$$= \pm \xi_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-2,3} \\ \bar{C}_{n-2,3} \end{matrix} \right. - \frac{1}{2} \nu_{n1} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-2,1} \\ \bar{C}_{n-2,1} \end{matrix} \right. \quad m=1$$

$$= \pm \xi_{n2} \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{n-2,4} \\ \bar{C}_{n-2,4} \end{matrix} \right. + \sqrt{2}\eta_{n2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \bar{C}_{n-2,0} \end{matrix} \right. \quad m=2$$

$$= \pm \xi_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m+2} \\ \bar{C}_{n-2,m+2} \end{Bmatrix} \mp \eta_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m-2} \\ \bar{C}_{n-2,m-2} \end{Bmatrix} \quad 3 \leq m \leq n-4$$

$$= \mp \eta_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m-2} \\ \bar{C}_{n-2,m-2} \end{Bmatrix} \quad n-3 \leq m \leq n$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{1,0,1} \\ \bar{q}_{nm}^{1,0,1} \end{matrix} \right\} = -\sqrt{2}\zeta_{n0} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{n-2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad m=0$$

$$= -\zeta_{n1} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{n-2,2} + \sqrt{2}\chi_{n1} \bar{C}_{n-2,0} \\ \bar{S}_{n-2,2} \end{Bmatrix} \quad m=1$$

$$= -\zeta_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{n-2,m+1} \\ \bar{S}_{n-2,m+1} \end{Bmatrix} + \chi_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{n-2,m-1} \\ \bar{S}_{n-2,m-1} \end{Bmatrix} \quad 2 \leq m \leq n-3$$

$$= \chi_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{n-2,m-1} \\ \bar{S}_{n-2,m-1} \end{Bmatrix} \quad n-2 \leq m \leq n-1$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{p}_{nm}^{0,1,1} \\ \bar{q}_{nm}^{0,1,1} \end{matrix} \right\} = -\sqrt{2}\zeta_{n0} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad m=0$$

$$= \mp \zeta_{n1} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,2} + \sqrt{2}\chi_{n1} \bar{C}_{n-2,0} \\ \bar{C}_{n-2,2} \end{Bmatrix} \quad m=1$$

$$= \mp \zeta_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m+1} \\ \bar{C}_{n-2,m+1} \end{Bmatrix} \mp \chi_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m-1} \\ \bar{C}_{n-2,m-1} \end{Bmatrix} \quad 2 \leq m \leq n-3$$

$$= \mp \chi_{nm} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n-2,m-1} \\ \bar{C}_{n-2,m-1} \end{Bmatrix} \quad n-2 \leq m \leq n-1$$

1. Вовк И. Г. Алгоритмы гармонического анализа на сфере // Тр. НИИ геодезии, аэросъемки и картографии.—1975.—37.—С. 11—19.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.—М.: Изд-во иностр. лит., 1952.—476 с.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.—М., Л.: Гостехиздат, 1951.—Т. 1.—476 с.
4. Мещеряков Г. А. Основы геометрической теории движения искусственных спутников Земли.—Киев, 1985.—37 с.—(Рукопись деп. в УкрНИИИТИ, № 509 Ук—85 Деп).
5. Drozyner A. Computation of orbits of the Earth's artificial satellites // Artif. Satell.—1983.—18, N 5.—P. 15—71.
6. Cunningham L. E. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite // Celes. Mech.—1970.—2.—P. 207—216.
7. Tscherning C. C. Some geodetic applications of Clenshaw summation.—Como, Italia, 1981.—24 p.—(Pap. Present.: VIII Symp. math. geodesy).
8. Rapp R. H. A FORTRAN program for the computation of gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansion.—Columbus, 1982.—17 p.—(Report / Dep. Geod. Sci., Ohio State Univ.; N 334).

Львов. политехн. ин-т
им. Ленин. комсомола

Поступила в редакцию 27.05.85,
после доработки 01.10.85