ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.03.003
УДК: 517.9

О.Р. Сатур, https://orcid.org/0000-0001-6318-2145

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: oksana@satur.in.ua

Збіжність до рівноважного атрактора у моделях динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.А. Бойчуком

Побудовано модель динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією, поведінка траєкторій якої визначається набором додатніх параметрів. Доведено існування нерухомих станів та досліджено їхні властивості, а саме встановлено явний вигляд нерухомих рівноважних станів та досліджено питання про стійкість.

***Ключові слова:**. динамічна система конфлікту, різницеве рівняння, перетворення (композиція чи відображення) конфлікту, притягальна взаємодія, нерухома точка, граничний стан, стійкість граничного стану, дискретна міра, стохастичний вектор.*

Рівномірний розподіл значно частіше фігурує у математичних теоріях, ніж у реальному житті. Політичні системи, в основу яких покладені ідеї соціальної рівності та рівномірного розподілу благ, є приреченими на розпад. У біологічних популяціях відносно рівномірний розподіл особин можливий у випадку, коли між ними існує дуже сильна конкуренція. Це означає, що ймовірність перебування двох особин поруч є досить малою, що сприяє рівномірному розподілу. Такий тип розподілу присутній у хижих риб та тварин, яким притаманна територіальність. У математичних моделях такі системи описуються конфліктною взаємодією з відштовхуванням.

Одним з найпростіших законів, що описує динаміку чисельності внутрішньо конкурентної популяції, є відоме *логістичне* різницеве рівняння

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

де x_n відображає чисельність популяції на n-му році, параметр r характеризує швидкість росту популяції. Це рівняння є прикладом простого нелінійного рівняння, яке залежно від значення параметра r описує складну та навіть хаотичну поведінку. Найчастіше у природі

Цитування: Сатур О.Р. Збіжність до рівноважного атрактора у моделях динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 3. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.03.003

спостерігається груповий розподіл. Причинами утворення різних скупчень може бути просторова нерівномірність розподілу ресурсів для існування, складні внутрішньовидові взаємини або ж розмноження особин, нездатних дистанціюватися одні від одних.

Далі побудовано модель динамічної системи, що описує рівномірний або груповий розподіл особин популяції на деякому ресурсному просторі існування $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, $n > 1$. Зафіксуємо на Ω деяку ймовірнісну дискретну міру μ, яка відповідатиме деякій популяції. Значення цієї міри

$$\mu(\omega_i) =: p_i, \ i = 1, ..., n$$

характеризує щільність розподілу популяції в регіоні існування ω_i. За побудовою $\sum_i p_i = 1$. Тому послідовність $\mu(\omega_i)$ визначає в $\mathbb{R}^n_+$ стохастичний вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

Боротьбу за життєві ресурси, зосереджені в кожному з регіонів простору, описуємо в термінах міри *ν*, значення якої в точках визначаються так:

$$\nu(\omega_i) = \frac{1 - \mu(\omega_i)}{n-1} = \frac{1 - p_i}{n-1} =: r_i.$$

Легко перевірити, що ці значення також утворюють стохастичний вектор $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Величини $\nu(\omega_i)$ можна інтерпретувати як усереднення розподілу ν (mean field) на підмножині $\Omega \setminus \omega_i$.

Дослідимо поведінку траєкторій динамічної системи з дискретним часом у термінах стохастичних векторів

$$\mathbf{p}^t \xrightarrow{*,\,t} \mathbf{p}^{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, ..., \ (\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}), \tag{1}$$

де * позначає перетворення, яке відповідає динаміці зміни популяції на просторі існування Ω.

У термінах координат закон конфліктної динаміки визначається наступними формулами:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 + c_i r_i^t)}{z^t}, \ 0 \leqslant c_i \leqslant 1, \ i = 1, ..., n, \tag{2}$$

де $r_i^t = \dfrac{1 - p_i^t}{n-1}$, а нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}^{t+1}$. Набір сталих c_i трактується як незмінні з часом *t* сприятливі умови для існування популяції в кожному з регіонів ω_i відповідно.

Зауважимо, що у роботах [1—3] побудовано математичні моделі динамічних систем конфлікту, що описують поведінку індивідів у соціумі. Динаміка в одній з таких моделей описується різницевими рівняннями і зветься динамікою з відштовхувальною взаємодією:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 - c_i r_i^t)}{z^t}, \ 0 \leqslant c_i \leqslant 1.$$

Вибір притягальної взаємодії докорінно змінює динаміку системи й істотно впливає на її властивості. Далі проведено аналіз поведінки траєкторій (1), заданих рівняннями (2), у термінах координат стохастичних векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$.

Припустимо, що у формулах (2) всі $c_i = 1$ для всіх $i = 1, ..., n$, тобто умови для існування популяції однакові в кожному з регіонів ω_i та незмінні з часом. Тоді рівняння (2) можна переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 + r_i^t)}{z^t}, \ i = 1, ..., n. \tag{3}$$

Далі дослідимо властивості траєкторій (1) в такому випадку. Зауважимо, що поведінка динамічної системи є аналогічною для випадку, коли всі сталі c_i дорівнюють деякому додатному числу c. Нижче буде показано, що зміна координат векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$ згідно з рівняннями (3) приводить до того, що всі ненульові координати цих векторів стають рівними між собою при $t \to \infty$, а це відповідає рівномірному розподілу на просторі Ω.

Зауважимо, що рівність $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ можлива тоді і тільки тоді, коли $p_i = r_i = \frac{1}{n}$ для усіх $i = 1, ..., n$.

Якщо ввести величину

$$L^t := \sum_{i=1}^{n} (p_i^t)^2 = \| \mathbf{p}^t \|^2,$$

то перетворення $*$ можна переписати лише в термінах координат вектора $\mathbf{p}^t$:

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot k_i^t, \ k_i^t = \frac{n - p_i^t}{n - L^t}. \tag{4}$$

Позначимо через M множину всіх нульових координат вектора $\mathbf{p}$, тобто $M = \{p_i : p_i = 0\}$, а через $\gamma(M)$ — потужність цієї множини. З рівнянь (4) зрозуміло, що M та $\gamma(M)$ не залежать від часу t.

З формули (4) випливає справедливість наступних тверджень та лем

Твердження 1. *Якщо* $p_i \geqslant p_j$ *для деяких* i, j, *то для всіх* $t = 0, 1, ...$ *виконується* $p_i^t \geqslant p_j^t$.

Твердження 2. *Якщо для деякого* $j = 1, ..., 0$ $p_i = 0$, *то для довільного* t *справедливо* $p_i^t = 0$, $r_i^t = \frac{1}{n-1}$.

Твердження 3. *Нехай* $p_{\min}^t$ та $p_{\max}^t$ — *мінімальна та максимальна координати вектора* $\mathbf{p}^t$ *відповідно,* $L^t = \| \mathbf{p}^t \|^2$. *Тоді для будь-якого* $t = 0, 1, ...$ *справедливі нерівності* $p_{\min}^t \leqslant L^t \leqslant p_{\max}^t$.

Лема 1. *Послідовність* $L^t = \| \mathbf{p}^t \|^2$, $t = 0, 1, ...$ *є спадною.*

Лема 2. *Якщо* $p_i > L$, *то послідовність* $\{p_i^t\}_{t=0}^{\infty}$ *є спадною.*

Лема 3. *Послідовність* $L^t = \| \mathbf{p}^t \|^2$, $t = 0, 1, ...$ *змінюється у межах*

$$\frac{1}{n-m} \leqslant L^t \leqslant 1, \quad m = \gamma(M).$$

Твердження 4. *Послідовність* $L^t = \| \mathbf{p}^t \|^2$, $t = 0, 1, ...$ *є збіжною, тобто існує* $L^{\infty} = \lim_{t \to \infty} L^t$.

З тверджень 1—4 та лем 1—3 випливає доведення наступної теореми:

Теорема 1. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1) *з довільним початковим стохастичним вектором* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$, *еволюція якої задана формулами* (4), *збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою* $\mathbf{p}^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{p}^t$.

При цьому,

1) *якщо* $\gamma(M) = 0$, то $\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{r}^{\infty}$ *і* $p_i^{\infty} = r_i^{\infty} = \frac{1}{n}$;

2) *якщо* $\gamma(M) = m$, $m < n$, *то* $\mathbf{p}^{\infty} \neq \mathbf{r}^{\infty}$ *і для всіх* $p_i \in M$

$$p_i^{\infty} = 0, \ r_i^{\infty} = \frac{1}{n-1},$$

а для всіх $p_i \notin M$

$$p_i^\infty = \frac{1}{n-m}, \; r_i^\infty = \frac{n-m-1}{(n-1)(n-m)}.$$

Граничний стан стійкий лише у випадку $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$.

Далі розглянемо випадок, коли всі параметри c_i є різними та покажемо, що саме набір параметрів повністю визначає вигляд граничного стану системи. Завдяки тому, що фіксований набір сталих параметрів c_i задається при $t=0$ і не залежать від часу t, граничний стан системи є стійким.

Враховуючи, що $r_i^t = \dfrac{1-p_i^t}{n-1}$, рівняння (2) можна переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot \frac{n-1+c_i(1-p_i^t)}{n-1+L_c^t} = p_i^t \cdot k_{i,c}^t, \; t \geqslant 1,$$

$$k_{i,c}^t = \frac{n-1+c_i(1-p_i^t)}{n-1+L_c^t}, \; L_c^t = \sum_{i=1}^n c_i p_i^t (1-p_i^t).$$

Нижче будемо використовувати позначення $\kappa_i^t = c_i(1-p_i^t)$.

Твердження 5. *Нехай для деяких* i, $j (i \neq j)$ *параметр* c_i *дорівнює параметру* c_j, *тобто* $c_i = c_j = c$, *причому* $p_i^t < p_j^t$. *Тоді* $\kappa_i^t > \kappa_j^t \Leftrightarrow \kappa_i^{t+1} > \kappa_j^{t+1}$.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^2$. *Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1) *збігається до стійкого граничного стану, який є нерухомою точкою* $\mathbf{p}^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{p}^t$, *причому*

$$\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_1}{c_1+c_2}, \frac{c_2}{c_1+c_2} \right).$$

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^3$, *причому для кожного* $i = 1, 2, 3$ *виконується одна з умов* $\kappa_i^t > L_c^t$ *або* $\kappa_i^t < L_c^t$ для довільного t. *Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1) *збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою* $\mathbf{p}^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{p}^t$.
Причому,

$$\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_1c_2 + c_1c_3 - c_2c_3}{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}, \frac{c_1c_2 - c_1c_3 + c_2c_3}{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}, \frac{c_1c_3 - c_1c_2 + c_2c_3}{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3} \right),$$

якщо для всіх $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$

$$c_i > \frac{c_jc_k}{c_j + c_k}. \tag{5}$$

Зауважимо, що якщо для деякого i виконується нерівність $c_i \leqslant \dfrac{c_jc_k}{c_j+c_k}$, то

$$p_i^\infty = \frac{c_i(c_j+c_k) - c_jc_k}{c_ic_j + c_ic_k + c_jc_k} \leqslant \frac{\frac{c_jc_k}{c_j+c_k}(c_j+c_k) - c_jc_k}{c_ic_j + c_ic_k + c_jc_k} = \frac{c_jc_k - c_jc_k}{c_ic_j + c_ic_k + c_jc_k} = 0,$$

але випадок $p_i^\infty < 0$ неможливий, тому $p_i^\infty = 0$. Отже, якщо для деякого i -го індексу умова (5) порушується, то відповідна координата p_i^∞ прямує до 0 при $t \to \infty$.

Теореми 2 та 3 припускають узагальнення на випадок $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 3$. При цьому явний вигляд умови (5) значно ускладнюється і встановлюється для кожного випадку $n > 3$ окремо.

Теорема 4. *Нехай $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 3$. Припустимо для кожного $i = 1, ..., n$ починаючи з деякого моменту часу t^* виконується одна з умов $\kappa_i^{t^*} > L_c^{t^*}$ або $\kappa_i^{t^*} < L_c^{t^*}$. Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1) *збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}^t$.*

Причому, для довільного $i = 1, ..., n$ виконується одна з рівностей

$$p_i^\infty = 0 \ \text{або} \ p_i^\infty = f_i(c_1, c_2, ..., c_n),$$

де $f_i(c_1, c_2, ..., c_n)$ набуває додаднього значення.

Можна припустити, що кожен з параметрів c_i впливає на розподіл популяції та призводять до збільшення чи зменшення кількості особин популяції в деяких регіонах ω_i простору існування Ω. Явний вигляд граничних векторів демонструє, що чим більше значення сталої c_i, тим більше значення відповідної i-ї граничної координати. Тобто сприятливі умови для існування популяції в деякому регіоні зумовлюють збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні. Отже, така модель динамічної системи може описувати випадковий, груповий або рівномірний розподіл особин у популяції згідно з класифікацією Швердтфегера [4]. Досягнути випадкового розподілу можна шляхом випадкого вибору значень набору параметрів c_i, $i = 1, ..., n$ на кожному кроці часу t.

Дослідження формування людських думок та поглядів є досить актуальною математичною задачею. В роботах [5—7] описуються математичні моделі, які допомагають визначити та проаналізувати, яким чином люди приймають рішення та як відбувається формування їхніх думок. Математично підтверджено, що здебільшого кожна людина схиляється до прийняття думки більшості серед своїх сусідів. Вищенаведена модель може бути застосована до опису формування думок індивідів, які з певним періодом часу стають однодумцями у випадку, коли всі параметри c_i, $i = 1, ..., n$ рівні між собою та набувають сталого значення в проміжку [0, 1].

В подальших дослідженнях можливий розгляд поведінки траєкторій такого виду системи при зміні параметрів c_i, $i = 1, ..., n$ на кожному кроці часу t, тобто набір параметрів може задаватися як деякий набір функцій чи набувати матричних значень. При такій постановці задачі можливе досягнення періодичності траєкторій чи виявлення ефекту синхронізації між деякими координатами [див. 8—10].

Дослідження виконувалися в рамках проєкту Нацонального фонду досліджень України, 2020.02/0089.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Karataeva T.V., Koshmanenko V.D. Society, mathematical model of a dynamical system of conflict. *J. Math. Sci.* 2020. **247**. P. 291—313. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3
2. Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K. Mean field model of a game for power. *Physica A*. 2019. **525**. P. 535—547. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110
3. Кошманенко В.Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. Київ: Наук. думка, 2016. 287 с.

4. Schwerdtfeger F. Ökologie der Tiere, Bd. II: Demökologie. Struktur und Dynamik tierischer Populationen. Berlin: Paul Parey Vlg., 1968. 450 s.
5. Hu H. Competing opinion diffusion on social networks. *R. Soc. Open Sci*. 2017. **4**, № 11. 13 pp. https://doi.org/10.1098/rsos.171160
6. Moinet A., Barrat B., Pastor-Satorras R. Generalized voterlike model on activity-driven networks with attractiveness. *Phys. Rev. E*. 2018. **98**. 022303. 9 pp. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.022303
7. Satur O.R., Kharchenko N.V. A model of dynamical system for the attainment of consensus. *Ukr. Math. J.* 2020. **71**, № 9. P. 1456—1469. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01725-w
8. Сатур О.Р. Залежність поведінки траєкторій динамічних систем конфлікту від вектора взаємодії. *Нелінійні коливання*. 2021. **25**, №1. P. 72—88.
9. Burylko O. Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. I. *J. Math. Sci*. 2020. **249**, №4. P. 573—600. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04959-y
10. Burylko O. Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. II. J. *Math. Sci.* 2021. **253**, №2. P. 204—229. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05223-7

Надійшло до редакції 06.03.2023

REFERENCES

1. Karataeva, T. V. & Koshmanenko, V. D. (2020). Society, mathematical model of a dynamical system of conflict. J. Math. Sci., 247, pp. 291-313. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3
2. Karataieva, T., Koshmanenko, V., Krawczyk, M. & Kulakowski, K. (2019).Mean field model of a game for power. Physica A, **525**, pp. 535-547. https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110
3. Koshmanenko, V. (2016). Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems (in Ukrainian). Kyiv: Naukova Dumka.
4. Schwerdtfeger, F. (1968). Ökologie der Tiere, Bd. II: Demökologie. Struktur und Dynamik tierischer Populationen. Berlin: Paul Parey Vlg.
5. Hu, H. (2017). Competing opinion diffusion on social networks. R. Soc. Open Sci., 4, No. 11. https://doi.org/10.1098/rsos.171160
6. Moinet, A., Barrat, B. & Pastor-Satorras, R. (2018). Generalized voterlike model on activity-driven networks with attractiveness. Phys. Rev. E., 98, 022303, 9 p. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.022303
7. Satur, O. R. & Kharchenko, N. V. (2020). The model of dynamical system for the attainment of consensus. Ukr. Math. J., 71, No. 9, pp. 1456-1469. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01725-w
8. Satur, O. R. (2021). Dependence of the behavior of the trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector. Nonlinear Oscillations, 25, No. 1, pp. 72-88.
9. Burylko, O. (2020). Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. I. J. Math. Sci., 249, No. 4, pp. 573-600. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04959-y
10. Burylko, O. (2021). Collective dynamics and bifurcations in symmetric networks of phase oscillators. II. J. Math. Sci., 253, No. 2, pp. 204-229. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05223-7

Received 06.03.2023

O.R. Satur, https://orcid.org/0000-0001-6318-2145

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: oksana@satur.in.ua

CONVERGENCE TO EQUILIBRIUM ATTRACTOR IN MODELS OF DYNAMIC CONFLICT SYSTEMS WITH ATTRACTIVE INTERACTION

This study focuses on the construction of a model for dynamic conflict systems with attractive interaction. The behavior of trajectories in this system is influenced by a set of positive parameters. The existence of equilibrium states is proven, and their properties are examined. An explicit form of equilibrium states is established, and the issue of stability is investigated.

Keywords: *dynamic conflict system, difference equation, conflict interaction (composition or mapping), attractive interaction, fixed point, limit state, stability of limit state, discrete measure, stochastic vector.*