УДК 519.622.1

Академік НАН України **В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов**

Функціонально-дискретний метод наближеного розв'язування задачі Коші на нескінченному інтервалі

Розглянуто функціонально-дискретний (FD) метод наближеного розв'язування задачі Коші на нескінченному інтервалі й сформульовано теорему, що містить достатні умови збіжності методу та оцінку похибки. FD-метод є в деякому сенсі подібним до методу розкладу Адомяна (ADM), проте, як показано на прикладі, іноді FD-метод виявляється збіжним, тоді як ADM є розбіжним. Наведені результати можуть бути легко перенесені на випадок систем диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. За останні два десятиріччя опубліковано чимало робіт, присвячених методу розкладу Адомяна (Adomian Decomposition Method, далі ADM) (див. [1]) та питанням його застосування до розв'язування лінійних та нелінійних операторних рівнянь, у тому числі диференціальних рівнянь з крайовими та початковими умовами (див. [2–4] та цитовану там літературу).

Ідейно спорідненим з ADM є функціонально-дискретний метод (FD-метод), запропонований уперше в роботі [5]. Як було показано пізніше [6–8], FD-метод може успішно застосовуватися при розв'язуванні широкого кола операторних рівнянь, зокрема диференціальних рівнянь з крайовими умовами. Суттєвою відмінністю між ADM та FD-методом є присутність в останньому деякого параметра h, змінюючи який можна забезпечити збіжність методу, а також регулювати швидкість збіжності у випадках, коли ADM виявляється розбіжним.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{d}{dx}u(x) - N(x, u(x))u(x) = \phi(x), \qquad u(x_0) = u_0, \qquad x \in [x_0, +\infty), \tag{1}$$

де $N(x, u)$ — дійсна функція, неперервна за x на $[x_0, +\infty)$ та нескінченно диференційовна за u на дійсній осі, тобто $N(x, u) \in C^{0,\infty}_{x,u}([x_0, +\infty) \times \mathbb{R})$, $\phi(x)$ — неперервна на інтервалі $[x_0, +\infty)$ функція. Припустимо, що для задачі (1) виконуються умови існування та єдиності розв'язку. Застосування FD-методу при розв'язуванні задачі (1) полягає в знаходженні наближення розв'язку у вигляді частинної суми $\overset{m}{u}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} u^{(i)}(x)$ ряду

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}(x), \tag{2}$$

де функції $u^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, знаходяться з рекурентної системи задач Коші

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}u^{(j+1)}(x) - N(x, u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(j+1)}(x) = \\ = N'_u(x, u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x)u^{(j+1)}(x_{i-1}) + F^{j+1}(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u^{(j+1)}(x_0) = 0, \qquad [u^{(j+1)}(x)]_{x=x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

для якої початкові дані $u^{(0)}(x)$ знаходяться з базової задачі:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}u^{(0)}(x) - N(x, u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x) = \phi(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, \\ &u^{(0)}(x_0) = u_0, \quad [u^{(0)}(x)]_{x=x_i} = u^{(0)}(x_i + 0) - u^{(0)}(x_i - 0) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} F^{(j+1)}(x) = &\sum_{p=1}^{j} A_{j+1-p}(N(x, (\cdot)); u^{(0)}(x_{i-1}), u^{(1)}(x_{i-1}), \ldots, u^{(j+1-p)}(x_{i-1}))u^{(p)}(x) + \\ &+ \sum_{p=0}^{j}[A_{j-p}(N(x, (\cdot)); u^{(0)}(x), u^{(1)}(x), \ldots, u^{(j-p)}(x)) - \\ &\quad - A_{j-p}(N(x, (\cdot)); u^{(0)}(x_{i-1}), u^{(1)}(x_{i-1}), \ldots, u^{(j-p)}(x_{i-1}))]u^{(p)}(x) + \\ &+ A_{j+1}(N(x, (\cdot)); u^{(0)}(x_{i-1}), u^{(1)}(x_{i-1}), \ldots, u^{(j)}(x_{i-1}), 0)u^{(0)}(x), \\ x \in [x_{i-1}, x_i], &\qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

x_1, $x_2, \ldots$ — вузли деякої фіксованої, взагалі кажучи, нерівномірної сітки $\widehat{\omega}$:

$$\widehat{\omega} = \left\{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots, \ \lim_{i\to\infty} x_i = +\infty, \ h_i = x_i - x_{i-1}, \ h = \sup_{i=1,2,\ldots} h_i\right\}. \tag{5}$$

$A_k(N(x, (\cdot)); v_0, v_1, \ldots, v_k)$ — поліном Адомяна степеня k для функції $N(x, u)$, який може бути обчислений так (див. [4]):

$$\begin{aligned} A_k(N(x, (\cdot)); v_0, v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(N\left(x, \sum_{i=0}^{\infty} t^i v_i\right)\right)\bigg|_{t=0} = \\ &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=k} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial u^{\alpha_1}}N(x, u)\bigg|_{u=v_0} \frac{v_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\frac{v_{k-1}^{(\alpha_{k-1}-\alpha_k)}}{(\alpha_{k-1}-\alpha_k)!}\frac{v_k^{\alpha_k}}{(\alpha_k)!}, \end{aligned}$$

де підсумовування здійснюється за усіма можливими невід'ємними цілими $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$. Неважко переконатися, що розв'язки задач (4), (3) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x) = &\exp\left\{\int_{x_{i-1}}^{x} N(\xi, u^{(0)}(x_{i-1}))\,d\xi\right\}u^{(0)}(x_{i-1}) + \\ &+ \int_{x_{i-1}}^{x} \exp\left\{\int_{\xi}^{x} N(\tau, u^{(0)}(x_{i-1}))\,d\tau\right\}\phi(\xi)\,d\xi, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

$$u^{(j+1)}(x)=\exp\left\{\int\limits_{x_{i-1}}^{x} N(\xi,u^{(0)}(x_{i-1}))\,d\xi\right\}u^{(j+1)}(x_{i-1})+$$

$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{x} N(\tau,u^{(0)}(x_{i-1}))\,d\tau\right\}N'_u(\xi,u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(\xi)u^{(j+1)}(x_{i-1})\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{x} N(\tau,u^{(0)}(x_{i-1}))\,d\tau\right\}F^{j+1}(\xi)\,d\xi,\qquad x\in[x_{i-1},x_i],\qquad i=1,2,\ldots.\quad(7)$$

Означення 1. Ми будемо говорити, що FD-метод для задачі Коші (1) збігається (до точного розв'язку задачі), якщо існує таке $\overline{h}>0$, що для будь-якої сітки $\widehat{\omega}$ (5) з $h\leqslant\overline{h}$ функціональний ряд (2), члени якого знайдені за формулами (6), (7), збігається (до точного розв'язку задачі) рівномірно на $[x_0,+\infty)$.

Збіжність FD-методу розв'язування задачі Коші на нескінченному проміжку. Має місце теорема

Теорема 1. *Нехай для задачі Коші* (1) *виконуються умови:*

1) $N(x,u)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i(x)u^i$, *де* $a_i(x)\in C([x_0,+\infty))$ *— неперервні на* $[x_0,+\infty)$ *функції,* $\sup\limits_{x\in[x_0,+\infty)}|a_i(x)|\leqslant A_i$, $0\leqslant A_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,$ *і ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}A_iu^i$ *збіжний* $\forall\,u\in\mathbb{R}$*;*

2) $\phi(x)$ *— неперервна і обмежена на* $[x_0,+\infty)$ *функція,* $\sup\limits_{x\in[x_0,+\infty)}|\phi(x)|=k<+\infty$*;*

3) $(N(x,u)u)'_u=N(x,u)+uN'_u(x,u)<-\alpha$, $\alpha>0$, $\forall\,x\in[x_0,+\infty)$, $\forall\,u\in\mathbb{R}$.

Тоді для будь-якої початкової умови $u_0\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $u(x)$ *задачі* (1) *на проміжку* $[x_0,+\infty)$ *існує, єдиний і, при досить малому кроці* h *сітки* $\widehat{\omega}$ (5), *може бути з будь-якою точністю знайдений за допомогою FD-методу у вигляді частинної суми ряду* (2), *члени якого обчислюються за формулами* (6), (7). *Причому має місце така оцінка абсолютної похибки методу:*

$$\sup_{x\in[x_0,+\infty)}|u(x)-\overset{m}{u}(x)|\leqslant\frac{C}{(1+m)^{1+\varepsilon}}\,\frac{\left(\dfrac{h}{R}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{h}{R}}\qquad\textit{при}\qquad h<R,$$

$$\sup_{x\in[x_0,+\infty)}|u(x)-\overset{m}{u}(x)|\leqslant C\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\qquad\textit{при}\qquad h=R,$$

де ε, R, C *— додатні сталі, що залежать лише від вхідних даних задачі.*

Для довільної визначеної на проміжку $\langle a,b\rangle$, $a<b\leqslant+\infty$ функції $u(x)$ позначатимемо

$$\|u(x)\|_{0,\infty,\langle a,b\rangle}=\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|u(x)|,$$

$$\|u(x)\|_{1,\infty,\langle a,b\rangle}=\max\left\{\|u(x)\|_{0,\infty,\langle a,b\rangle},\left\|\frac{d}{dx}u(x)\right\|_{0,\infty,\langle a,b\rangle}\right\}.$$

З міркувань зручності будемо писати

$$\|u(x)\|_{i,\langle a,b\rangle} \overset{\text{def}}{\equiv} \|u(x)\|_{i,\infty,\langle a,b\rangle}, \qquad \|u(x)\|_i \overset{\text{def}}{\equiv} \|u(x)\|_{i,\infty,[x_0,+\infty)}, \qquad i = 1,2.$$

Для доведення теореми 1 нам знадобляться кілька допоміжних тверджень, сформульованих нижче.

Лема 1. *Нехай $N(x,u) \in C^{0,1}_{x,u}([x_0,+\infty)\times\mathbb{R})$, а також виконуються умови 2 і 3 теореми 1. Тоді для довільних $h_i > 0$, $i = 1,2,\ldots$, розв'язок $u^{(0)}(x)$ задачі Коші з кусково-сталим аргументом*

$$\frac{d}{dx}u^{(0)}(x) - N(x,u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x) = \phi(x), \qquad x \in [x_{i-1},x_i], \qquad x_i = x_{i-1} + h_i, \tag{8}$$

$$u^{(0)}(x_0) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad [u^{(0)}(x)]_{x=x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

існує на $[x_0,+\infty)$ і $|u^{(0)}(x)| \leqslant \mu = \max\{|u_0|, k/\alpha\}$, $\forall\, x \in [x_0,+\infty)$.

Наведені нижче леми є уточненням і узагальненням лем 2.1 та 2.2 з [8].

Лемма 2. *Нехай $N(x,u) \in C^{0,\infty}_{x,u}([x_0,+\infty)\times\mathbb{R})$ і $u^{(j)}(x)$ — дійсні функції кусково-гладкі на $[x_0,+\infty)$, $j = 0,1,2,\ldots$. І нехай існує функція $\widetilde{N}(u) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ така, що $\sup\limits_{x\in[x_0,+\infty)} |N^{(p)}(x,u)| \leqslant \widetilde{N}^{(p)}(|u|)$ $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $p = 0,1,2,\ldots$. Тоді має місце нерівність*

$$\|A_k(N(x,(\cdot));u^{(0)}(x),\ldots,u^{(k)}(x)) - A_k(N(x,(\cdot));u^{(0)}(x_{i-1}),\ldots,u^{(k)}(x_{i-1}))\|_{0,[x_{i-1},x_i]} \leqslant$$
$$\leqslant h_i A_k(\widetilde{N}'(u)u; \|u^{(0)}(x)\|_{1,[x_0,+\infty)},\ldots,\|u^{(k)}(x)\|_{1,[x_0,+\infty)}),$$
$$k = 0,1,2,\ldots, \qquad i = 1,2,\ldots.$$

Лемма 3. *Для будь-якої функції $N(u) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ і $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i V_i$ має місце рівність*

$$A_{j+1}(N(x);V_0,\ldots,V_j,0) = \frac{1}{(j+1)!}\left\{\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}(N(f(z)) - (f(z)-V_0)N'(V_0))\right\}_{z=0},$$
$$j = 0,1,\ldots.$$

Доведення теореми 1. Наведемо стисло схему доведення теореми 1. Із застосуванням умов *2*, *3* доводиться, що розв'язок задачі (1) існує і є єдиним. За допомогою все тих самих умов *2*, *3*, а також формул (6), (7) і результатів леми 1 доводиться, що для будь-якої сітки $\widehat{\omega}$ (5) з досить малим h виконується нерівність

$$\|u^{(j+1)}(x)\|_{1,[x_0,+\infty)} \leqslant \sigma\|F^{(j+1)}(x)\|_{0,[x_0,+\infty)}, \tag{10}$$

де σ — стала, що залежить лише від вхідних даних задачі (1). Якщо покласти $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\widetilde{N}(u) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, і скористатися результатами лем 2 та 3, то з (10) одержимо

$$\|u^{(j+1)}(x)\|_1 \leqslant \sigma\left\{\sum_{p=1}^{j} A_{j+1-p}(\widetilde{N}(u); \|u^{(0)}(x)\|_1,\ldots,\|u^{(j+1-p)}(x)\|_1)\|u^{(p)}(x)\|_1 +\right.$$

$$+ h\sum_{p=0}^{j} A_{j-p}(\widetilde{N}'(u)u; \|u^{(0)}(x)\|_1, \ldots, \|u^{(j-p)}(x)\|_1)\|u^{(p)}(x)\|_1 +$$

$$+ \frac{1}{(j+1)!}\left[\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}\left(\widetilde{N}\left(\sum_{s=0}^{\infty} z^s\|u^{(s)}(x)\|_1\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \sum_{s=1}^{\infty} z^s\|u^{(s)}(x)\|_1\widetilde{N}'(\|u^{(0)}(x)\|_1)\right)\right]_{z=0}\Bigg\}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Покладемо в (11) $h^{-j}\|u^{(j)}(x)\|_1 = \nu_j$, $j = 0, 1, \ldots$, і, замінюючи ν_j на V_j, змінимо знак нерівності на знак рівності. Далі введемо в розгляд твірну функцію

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j V_j, \tag{12}$$

яка на області свого визначення очевидно мажорує ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j\|u^{(j)}(x)\|_1$. З (11) одержимо

$$g(z) - V_0 = \frac{\sigma}{1 + \sigma\widetilde{N}'(V_0)}\{[g(z) - V_0][\widetilde{N}(g(z)) - \widetilde{N}(V_0)] + zg^2(z)\widetilde{N}'(g(z)) +$$

$$+ \widetilde{N}(g(z)) - \widetilde{N}(V_0)\}. \tag{13}$$

З використанням співвідношення (13) доводиться, що ряд, яким визначається функція (12), має деякий додатний радіус збіжності $R > 0$. Повертаючись до старих позначень, одержимо

$$\|u^{(j)}(x)\|_{1,[x_0,+\infty)} \leqslant \frac{C}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{h}{R}\right)^j, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

звідки випливає, що при $h/R \leqslant 1$ ряд (2) збігається рівномірно на $[x_0, +\infty)$. Використовуючи умову *1* і теорему про підстановку степеневого ряду в степеневий ряд (див. [9], с. 485), неважко довести, що ряд (2) збігається до точного розв'язку задачі (1). З останнього в поєднанні з (14) випливають оцінки похибки, наведені в теоремі 1. Доведення завершене.

Приклад. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{d}{dx}u(x) = -u^3(x) - u(x) + \cos(x) + \sin(x) + \sin^3(x), \qquad u(0) = 0. \tag{15}$$

Неважко переконатися, що точним розв'язком задачі (15) є функція $u^*(x) = \sin(x)$. Для чисельного знаходження розв'язку задачі (15) спочатку був застосований ADM. При цьому наближення розв'язку шукалося у вигляді m-ї частинної суми $\overset{m}{u}_A$ ряду $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_A^{(i)}(x)$, де $u_A^{(i)}(x)$ знаходяться рекурентно з системи рівнянь

$$\frac{d}{dx}u_A^{(0)}(x) = -u_A^{(0)}(x) + \cos(x) + \sin(x) + \sin^3(x), \qquad u_A^{(0)}(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}u_A^{(i)}(x) = -\frac{d^i}{dt^i}t\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i u_A^{(i)}(x)\right)^3\Bigg|_{t=0} - u_A^{(i)}(x), \qquad u_A^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

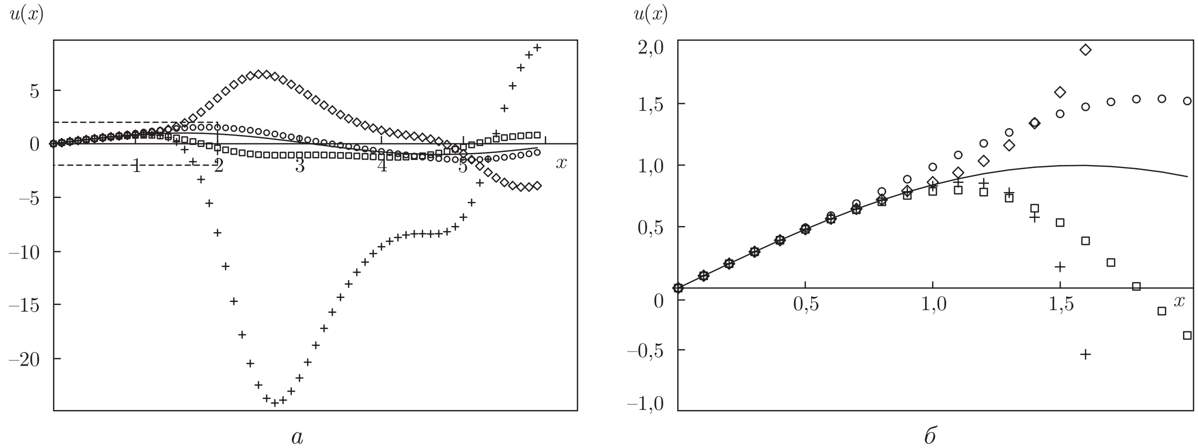

Рис. 1. Приклад застосування ADM: *суцільна лінія* — $u^*(x) = \sin(x)$; $\circ$ — $\overset{0}{u}_A(x)$; $\square$ — $\overset{1}{u}_A(x)$; $\Diamond$ — $\overset{2}{u}_A(x)$; $+$ — $\overset{3}{u}_A(x)$; на рис. *б* зображена область, виділена штрихованим прямокутником на рис. *а*

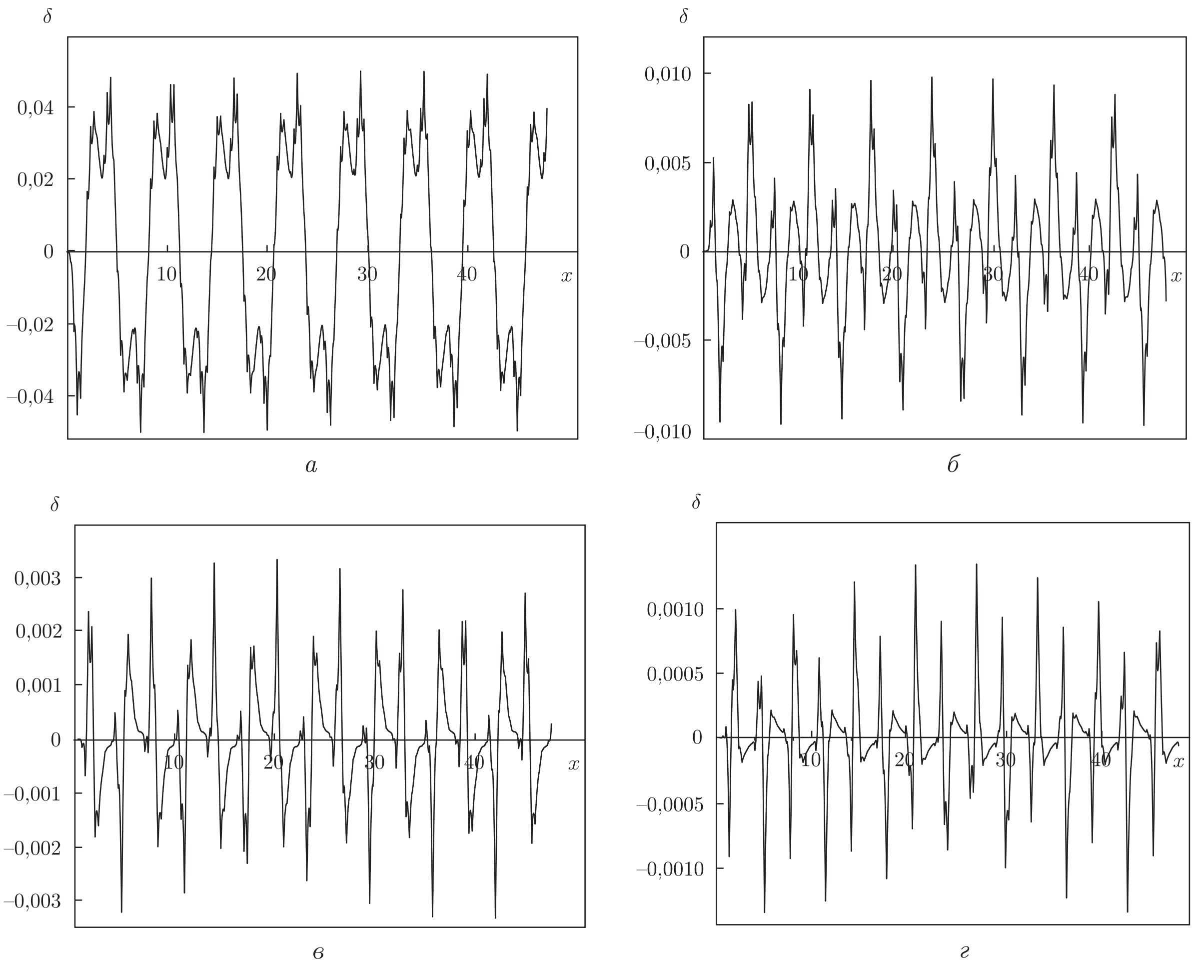

Рис. 2. Приклад застосування FD-методу. Графіки абсолютних похибок: *а* — $\delta_0(x)$; *б* — $\delta_1(x)$; *в* — $\delta_2(x)$; *г* — $\delta_3(x)$; $x \in [0, 48]$

З аналізу побудованих графіків (рис. 1) випливає, що метод розкладу Адомяна при розв'язуванні задачі Коші (15) на проміжку $[0, 6]$ є розбіжним.

При застосуванні до задачі (15) FD-методу з сіткою $\omega = \{x_0 = 0, x_i = 1/3i, i = 1\ldots, 144\}$ одержані результати, що зображені графічно на рис. 2. Тут використані позначення $\delta_i(x) = \sin(x) - \overset{m}{u}(x)$, $i = 0, 1, \ldots$. Аналіз графіків підтверджує експоненційний та рівномірний характер збіжності FD-методу до точного розв'язку задачі (15).

1. *Adomian G.* Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 355 p.
2. *Hosseini M. M., Nasabzadeh H.* On the convergence of Adomian decomposition method // Appl. Math. and Comput. – 2006. – **182**. – P. 536–543.
3. *Himoun N., Abbaoui K., Cherruault Y.* New results on Adomian method // Kybernetes. – 2003. – **32**, No 4. – P. 523–539.
4. *Seng V., Abbaoui K., Cherruault Y.* Adomian's polynomials for nonlinear operators // Math. Comput. Modelling. – 1996. – **24**, No 1. – P. 59–65.
5. *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.
6. *Gavrilyuk I., Klymenko A., Makarov V., Rossokhata N.* FD-method for eigenvalue problems with nonlinear potential // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**. – P. 14–28.
7. *Lazurchak I. I., Makarov V. L., Sytnyk D.* Two-sided approximations for nonlinear operator equations // Comput. Meth. in Appl. Math. – 2008. – **8**, No 4. – P. 386–392.
8. *Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L., Sytnyk D.* A method with a controllable exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations // Ibid. – 2009. – **9**, No 1. – P. 63–78.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – Москва: Наука, 1966. – 800 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.10.2009

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, D. V. Dragunov**

The functional discrete method for the approximate solution of the Cauchy problem on the infinite interval

We offer a functional discrete method for solving the Cauchy problem for the first-order ordinary differential equations (ODE) on the infinite interval. The theorem about convergence and error estimates is proved. This method (FD-method) is in some sense similar to the Adomian decomposition method (ADM). But it is shown that, for some problems, the FD-method is convergent, whereas ADM is divergent. The results presented can be easily generalized for the case of systems of ODE.