УДК 528.2

Об определении направлений главных осей инерции Земли

О. А. Абрикосов

Рассмотрена задача определения ориентировки главных осей инерции Земли по данным о ее гравитационном поле. Разработана методика, позволяющая строго вычислить углы поворота системы главных осей инерции в элементарных функциях стоксовых постоянных второй степени и оценить их точность. Приводятся результаты определения и оценки точности указанных углов по некоторым современным моделям геопотенциала.

ON DETERMINATION OF DIRECTIONS OF THE EARTH INERTIA PRINCIPAL AXES, by Abrikosov O. A.— The problem of determination of the Earth ellipsoid inertia axes is considered. The procedure was developed allowing the precise calculations of inertia rotation angles to be made and their accuracy to be estimated. The results based on some gravity models are presented.

В работах [3—5] дано строгое решение задачи определения ориентировки главных осей инерции Земли по данным о ее гравитационном поле. Разработанная методика, использующая мультипольное представление геопотенциала, требует нахождения корней алгебраического уравнения 4-й степени, комплексные коэффициенты которого — функции стоксовых постоянных второй степени. Ниже предлагается новая методика, которая, будучи основанной на решении кубического уравнения с действительными коэффициентами, позволяет, не нарушая строгости определений, сравнительно просто оценить точность направлений главных осей инерции по средним квадратичным ошибкам гармоник второй степени.

Не останавливаясь на выводе необходимых соотношений, приведем лишь сводку окончательных формул, реализующих указанную методику. Направляющие косинусы осей гравитационного квадриполя найдены в виде

$$l_i = a_i/\rho_i, \quad m_i = b_i/\rho_i, \quad n_i = c_i/\rho_i, \quad \rho_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c}\,, \quad i = 1,\ 2, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_i &= [d_{31} + (-1)^i \sqrt{d_{31}^2 - d_{11}d_{33}}\,]\, c_i/d_{33}, \\ b_i &= [d_{32} - (-1)^i \sqrt{d_{32}^2 - d_{22}d_{33}}\,]\, c_i/d_{33}, \\ i &= 1,\ 2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0.5\, d_{33} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

а величины d_{jk} — элементы диагонально доминирующей матрицы

$$D = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \mu(6C_{22} - C_{20}) + p & 6\mu S_{22} & 3\mu C_{21} \\ 6\mu S_{22} & -\mu(6C_{22} + C_{20}) + p & 3\mu S_{21} \\ 3\mu C_{21} & 3\mu S_{21} & 2\mu C_{20} + p \end{bmatrix}, \tag{3}$$

в которой $\{C_{2m},\ S_{2m}\}$ — стоксовы постоянные второй степени, $\mu = fMa^2/M_2$, fM — геоцентрическая гравитационная постоянная, a — экваториальный радиус Земли, M_2 — момент квадриполя, p — косинус угла γ между осями квадриполя. Инвариантные параметры p и M_2 [3, 4] квадриполя могут быть получены из сравнения инвариантов I_2, I_3 ($I_1 = 0$) квадратичной формы, описывающей потенциал второй степени [5]:

$$I_2 = -(3/4)\, M_2^2 (3 + p^2), \quad I_3 = (1/4)\, M_2^3 p\, (9 - p^2). \tag{4}$$

Исключая p из выражений (4), нетрудно записать уравнение 3-й степени относительно M_2^2, действительные коэффициенты которого суть функции инвариантов I_2, I_3. Решение этого уравнения по формулам Кардано [1] (в тригонометрической форме) дает возможность найти M_2 и p в виде:

$$M_2 = \frac{2}{3}\sqrt{-I_2}\sin\frac{2\pi+\varphi}{6}, \quad p = -\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{2\pi+\varphi}{6},$$
$$\cos\varphi = -1 - \frac{27I_3^2}{2I_2^3}. \tag{5}$$

При этом значения инвариантов I_2, I_3 могут быть вычислены по гармоникам $\{C_{2m}, S_{2m}\}$ [5]:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= -3(fMa^2)^2(C_{20}^2 + 3C_{21}^2 + 3S_{21}^2 + 12C_{22}^2 + 12S_{22}^2),\\ I_3 &= (fMa^2)^3[2C_{20}^3 + 9C_{20}(C_{21}^2 + S_{21}^2 - 8C_{22}^2 - 8S_{22}^2) +\\ &\quad + 54C_{22}(C_{21}^2 - S_{21}^2) + 108C_{21}S_{21}S_{22}]. \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Ориентировка главных осей инерции может быть теперь описана тремя углами поворота, являющимися функциями направляющих косинусов (1) [5]. В работе [4] для этого использовались углы Эйлера. Представляется, однако, что более целесообразно использовать кардановы углы [2], описывающие последовательные повороты вокруг всех трех осей принятой системы координат. Величины таковых определяются соотношениями:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}, \quad \sin\eta = \frac{l_1 - l_2}{2S}, \quad \operatorname{tg}\zeta = \frac{n_1m_2 - m_1n_2}{S(l_1 + l_2)}, \tag{7}$$

в которых $S=\sqrt{0.5(1-p)}$ — синус половины угла между осями квадриполя, а направляющие косинусы последних даются формулами (1). Кардановы углы (7) в отличие от углов Эйлера не приводят к неопределенности даже при совпадении оси C инерции с осью Z принятой системы координат. Отметим, что именно такая система углов принимается для описания положения полюса оси вращения Земли, координаты (x_p, y_p) которого суть аналоги углов η и ξ соответственно. Выражения же (7) дают координаты η, ξ полюса оси C инерции и восточную долготу ζ оси A инерции планеты.

Таким образом, описанная методика позволяет определить ориентировку системы главных осей инерции Земли в элементарных функциях ее стоксовых постоянных 2-й степени и довольно просто получить оценку точности углов (7) на основании известной формулы для средней квадратичной ошибки функции n аргументов $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Величины и оценка точности кардановых углов (7), вычисленных по некоторым моделям геопотенциала, приведены в таблице. При расче-

Кардановы углы системы главных осей инерции Земли

Модель геопотенциала	ξ	m_ξ	η	m_η	ζ	m_ζ
GEM-7	−0.223″	±0.617″	0.761″	±0.662″	345°04.5′	±6.3′
GEM-8	0.074	0.592	0.024	0.638	345 05.4	6.3
GEM-9	1.002	0.629	0.053	0.625	345 03.9	4.4
GEM-10	0.599	0.494	0.254	0.490	345 03.3	3.9
GEM-L2	0.758	0.355	0.261	0.353	345 04.4	1.4
Rapp, 1981	0.380	0.350	0.167	0.360	345 03.4	1.3

те средних квадратичных ошибок углов ξ, η, ζ гармонические коэффициенты предполагались некоррелированными, так как в литературе, к сожалению, не приводятся значения коэффициентов корреляции между ними. Вместе с тем учет корреляционных зависимостей, если известны соответствующие коэффициенты корреляции, не представляет практических затруднений.

Полученные результаты указывают на неустойчивость определения ориентировки главных осей инерции по стоксовым постоянным 2-й степени. Причем об этом свидетельствуют не столько расхождения значений углов поворота, которые могли бы быть объяснены, например, отнесением разных наборов гармоник к различным земным системам координат, сколько величины оценок средних квадратичных ошибок Особенно наглядно это подтверждает сравнение координат (η, ξ) полюса оси C инерции с их средними квадратичными ошибками — последние суть величины того же порядка, что и сами (η, ξ).

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.— М. : Наука, 1981.—718 с.
2. *Магнус К.* Теория гироскопа.— М. : Мир, 1974.—526 с.
3. *Марченко А. Н.* О гравитационном квадриполе планеты.— Письма в Астрон. журн., 1979, 5, № 4, с. 198—200.
4. *Марченко А. Н., Абрикосов О. А., Церклевич А. Л.* Об определении ориентировки главных осей инерции планет (Земля, Луна, Марс, Венера, Юпитер).— М., 1982.— 48 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4434—82 Деп.
5. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* Об экстремальных свойствах сферических функций, описывающих внешний гравитационный потенциал Земли.— Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27, с. 88—96.

Львов. политехн. ин-т им. Ленин. комсомола

Поступила в редакцию 04.02.85,
после доработки 28.06.85