УДК 535.36:523.4—852

Разложение индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра

Ж. М. Длугач

Получена формула для коэффициентов разложения x_l индикатрисы рассеяния однородной сферической частицы в ряд по полиномам Лежандра. Предложен эффективный алгоритм расчета указанных коэффициентов. Приведены результаты расчетов x_l для частиц различного радиуса и разного показателя преломления. Кроме того, даны коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния полидисперсной системы облачных частиц в атмосфере Юпитера в интервале длин волн 0.34 мкм$\leqslant\lambda\leqslant$1.14 мкм.

EXPANSION OF THE PHASE FUNCTION IN LEGENDRE POLYNOMIALS, by Dlugach J. M.— The formula is obtained for the expansion of coefficients x_l of the phase function in Legendre polynomials for a homogeneous sphere. The efficient algorithm to calculate these coefficients is suggested. The results are given of calculations x_l for particles of different radius and refractive index as well as the expansion coefficients of the phase function for the polydisperse system of cloud particles in the Jovian atmosphere for the spectral interval 0.34 µm$\leqslant\lambda\leqslant$1.14 µm.

Одной из основных оптических характеристик мутной среды, в частности планетной атмосферы, является индикатриса рассеяния, которая в случае рассеяния света на однородной сферической частице может быть вычислена на основании теории Ми. Обычно при решении скалярного уравнения переноса излучения необходимы коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. Эти коэффициенты можно вычислить двумя способами: 1) интегрируя по углу рассеяния индикатрису, рассчитанную для ряда значений углов; 2) непосредственно через комплексные амплитуды. Второй путь более предпочтителен, особенно для крупных частиц, описание индикатрисы рассеяния которых требует большого числа коэффициентов разложения.

К настоящему времени задача вычисления коэффициентов разложения рассматривалась многими авторами (см., например, [1, 5—8]), причем [1] и [8] посвящены разложению всей угловой матрицы в ряд по обобщенным сферическим функциям. Однако в перечисленных выше статьях либо не приведен сам алгоритм, удобный для проведения расчетов на ЭВМ, либо он не является эффективным. В данной работе получена формула для коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра и дан алгоритм расчета указанных коэффициентов. Отметим, что хотя на первый взгляд формула и алгоритм напоминают результаты работ [5] и [6], однако их использование примерно вдвое сокращает время счета, что весьма существенно, в особенности для частиц большого радиуса. Кроме того, мы приведем и проанализируем некоторые результаты выполненных расчетов.

Основные формулы. Предположим, что излучение, падающее на однородную сферу в виде плоской волны, является неполяризованным. Тогда в результате его взаимодействия с этой частицей появляется поле излучения, рассеянного во всех направлениях, которое можно выразить через две скалярные компоненты A_1 и A_2 амплитуды вектора электрического поля $\vec{\mathbf{A}}_{\text{рас}}$. Компоненты A_1 и A_2 соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости рассеяния. Решение Ми дает комплексные выражения для A_1 и A_2 в виде сходящихся рядов [3]:

$$kA_1 = S_1(m, \rho, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n(m, \rho)\pi_n(\gamma) + b_n(m, \rho)\tau_n(\gamma)], \tag{1}$$

$$kA_2 = S_2(m, \rho, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n(m, \rho)\pi_n(\gamma) + a_n(m, \rho)\tau_n(\gamma)], \tag{2}$$

где S_1, S_2 — безразмерные комплексные амплитуды, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, m — комплексный показатель преломления сферической частицы, $\rho=kr$ — безразмерный радиус и γ — угол рассеяния. По определению индикатриса рассеяния $\chi(m, \rho, \gamma)$ есть

$$\chi(m, \rho, \gamma) = \frac{2}{\rho^2 K_{\text{рас}}(m, \rho)} [S_1 S_1^* + S_2 S_2^*], \tag{3}$$

где звездочкой обозначена комплексно сопряженная величина, а

$$K_{\text{рас}}(m, \rho) = \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n(m, \rho)|^2 + |b_n(m, \rho)|^2). \tag{4}$$

Суммирование в формулах (1), (2) и (4) продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности для $n=N$ величина $|a_n|^2+|b_n|^2 \leqslant \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое наперед заданное положительное число. Априорная оценка числа N дается в [8]. Заметим, что способы вычисления парциальных амплитуд a_n и b_n хорошо разработаны [3, 4]. Поэтому в дальнейшем не будем останавливаться на этом вопросе.

Перейдем непосредственно к решению поставленной задачи, т. е. нахождению коэффициентов разложения амплитуд S_1 и S_2 в ряд по полиномам Лежандра. Как известно, угловые функции $\pi_n(\mu)$ и $\tau_n(\mu)$ $(\mu=\cos\gamma)$, входящие в выражения (1) и (2), определяются следующим образом:

$$\pi_n(\mu) = \frac{d}{d\mu} P_n(\mu), \tag{5}$$

$$\tau_n(\mu) = \mu\pi_n(\mu) - (1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\pi_n(\mu). \tag{6}$$

Представим амплитуды S_1 и S_2 в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{E(N/2)} C_{2n} P_{2n}(\mu) + \sum_{n=0}^{E(N/2)} C_{2n+1} P_{2n+1}(\mu), \tag{7}$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{N} D_n P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{E(N/2)} D_{2n} P_{2n}(\mu) + \sum_{n=0}^{E(N/2)} D_{2n+1} P_{2n+1}(\mu), \tag{8}$$

где $E(x)$ — целая часть числа x. Тогда, используя соотношения, связывающие полиномы Лежандра и их производные ([2], гл. 8, § 9), из (1) и (2) с учетом (5) и (6) получаем:

$$C_{2n} = (4n+1)\left[\frac{2n}{2n+1} b_{2n} - \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+1}{2k(2k+1)} b_{2k} + \sum_{k=n}^{E(N/2)} \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k+1}\right], \tag{9}$$

$$C_{2n+1} = (4n+3)\left[\frac{2n+1}{2n+2} b_{2n+1} - \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)} \times \right.$$

$$\left. \times\, b_{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+1}{2k(2k+1)} a_{2k} \right], \tag{10}$$

$$D_{2n} = (4n+1)\left[\frac{2n}{2n+1} a_{2n} - \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+1}{2k(2k+1)} a_{2k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{E(N/2)} \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)} b_{2k+1} \right], \tag{11}$$

$$D_{2n+1} = (4n+3)\left[\frac{2n+1}{2n+2} a_{2n+1} - \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)} \times \right.$$

$$\left. \times\, a_{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{E(N/2)} \frac{4k+1}{2k(2k+1)} b_{2k} \right]. \tag{12}$$

Очевидно, что $a_0 = b_0 = 0$. Заметим, что формулы (9)—(12) могут быть преобразованы к виду, полученному в [7].

Обычно при расчете интенсивности многократно рассеянного излучения предполагается, что индикатриса рассеяния может быть представлена разложением в ряд по полиномам Лежандра:

$$\chi(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l P_l(\mu), \tag{13}$$

причем

$$x_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} \chi(\mu) P_l(\mu)\, d\mu. \tag{14}$$

Очевидно, что если индикатриса рассеяния, вычисленная с использованием формул (3), (7) и (8), содержит полиномы Лежандра до $2N$-го порядка, то, рассчитав ее в $(2N-1)$ узлах, например квадратурной формулы Гаусса, из (14) вплоть до $l = 2N$ можно получить точные значения x_l. Но такой способ определения x_l не является оптимальным.

Поэтому задача состоит в том, чтобы выразить коэффициенты разложения x_l непосредственно через величины C_n и D_n. Для этого поступим следующим образом. Подставив выражения (7), (8) в (3), имеем:

$$\chi(\mu) = \frac{2}{\rho^2 K_{\text{рас}}} \left[\sum_{n=0}^{N} C_n P_n(\mu) \sum_{m=0}^{N} C_m^* P_m(\mu) + \sum_{n=0}^{N} D_n P_n(\mu) \sum_{m=0}^{N} D_m^* P_m(\mu) \right]. \tag{15}$$

Используя известное соотношение, выражающее произведение полиномов Лежандра $P_n P_m$ через сумму полиномов ([2], гл. 8, § 9), и приравнивая коэффициенты при полиномах одного и того же порядка в формулах (13) и (15), после некоторых преобразований получаем

$$x_l = \frac{2(2l+1)}{\rho^2 K_{\text{рас}}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \frac{2}{1+\delta_{n,m}} \cdot \mathrm{Re}\{C_n C_m^* + D_n D_m^*\}\, \omega_{n,m,l}, \quad (l = 0,\ 1,\ 2 \ldots), \tag{16}$$

где $Re\{\ldots\}$ обозначает действительную часть числа в фигурных скобках; $\delta_{n,m}=1$ при $n=m$ и $\delta_{n,m}=0$ при $n\neq m$ и

$$\omega_{n,m,l}=\frac{(m+l-n)!\,(m+n-l)!\,(n+l-m)!\left(\frac{n+m+l}{2}\,!\right)^2}{(n+m+l+1)!\left(\frac{m+l-n}{2}\,!\right)^2\left(\frac{n+m-l}{2}\,!\right)^2\left(\frac{n+l-m}{2}\,!\right)^2}, \tag{17}$$

когда $n+m-l=2k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m$. В остальных случаях $\omega_{n,m,l}=0$.

Формула (17) неудобна для проведения вычислений. Гораздо лучше использовать рекуррентные соотношения, которые следуют из (17):

$$\frac{\omega_{n,m,l}}{\omega_{n,m-1,l-1}}=\frac{(m+l-n-1)(n+m+l)}{(m+l-n)(n+m+l+1)}, \tag{18}$$

если l — четное, и

$$\frac{\omega_{n,m,l}}{\omega_{n-1,m,l-1}}=\frac{(n+l-m-1)(n+m+l)}{(n+l-m)(n+m+l+1)}, \tag{19}$$

если l — нечетное.

Кроме того, справедливы также следующие рекуррентные соотношения по n и m:

$$\frac{\omega_{n,m,l}}{\omega_{n-1,m+1,l}}=\frac{(n+l-m-1)(m+l-n+2)}{(n+l-m)(m+l-n+1)},$$

$$\frac{\omega_{n,m,l}}{\omega_{n-1,m-1,l}}=\frac{(n+m-l-1)(n+m+l)}{(n+m-l)(n+m+l+1)}, \tag{20}$$

$$\frac{\omega_{n,m,l}}{\omega_{n,m-2,l}}=\frac{(m+l-n-1)(n+m-l-1)(n+m+l)(n+l-m+2)}{(m+l-n)(n+m-l)(n+m+l+1)(n+l-m+1)}.$$

Очевидно, что $\omega_{0,0,0}=1$. Заметим, что полученное нами выражение для коэффициентов разложения (16) гораздо проще, чем формула для x_l, приведенная в [5], в которой содержатся два слагаемых с множителями типа (17). На расчет именно этих величин затрачивается основная часть машинного времени. Кроме того, отмечалось, что формулы (9)—(12) идентичны полученным в [7]. Однако окончательные выражения для x_l принципиально отличаются друг от друга (ср. (16) с формулами (2) и (3) из [7]). Привести (16) к виду, полученному в [7], нам не удалось.

Таким образом, известные выражения для парциальных амплитуд a_n и b_n, приведенные, например, в [3], а также формулы (9)—(12) и (16) с учетом (17)—(20) дают полное решение задачи об определении коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра для сферической однородной частицы безразмерного радиуса ρ с комплексным показателем преломления m.

Результаты расчетов. Для апробации предлагаемого алгоритма нами проведены расчеты коэффициентов разложения x_l для сферических частиц различного радиуса и с разным показателем преломления. В качестве примера в табл. 1 даны значения x_l для частицы радиуса $\rho=10$ с показателем преломления $m=m_R-im_I$ при $m_R=1.33$ и $m_I=0,\ 0.001,\ 0.01,\ 0.1$. Аналогичные расчеты проведены также для $\rho=1,\ 50,\ 100$. В табл. 2 для $\rho=1,\ 10,\ 50,\ 100$ и $m=m_R=1.33$ приведено: L — общее число членов разложения, вычисленных по формуле (16) при условии $x_L\leqslant 10^{-4}$; L_1 — количество x_l, удовлетворяющих условию $10^1\leqslant x_l\leqslant 10^2$; L_0 — количество x_l при условии $10^0\leqslant x_l<10^1$ и L_{-1} — количество x_l при условии $10^{-1}\leqslant x_l<10^0$. Из таблицы видно существенное увеличение значений коэффициентов разложения и их количества по мере роста радиуса частицы. Кроме того, проведенные расчеты показали, что увеличение мнимой части показателя преломления также приводит к соответствующему росту значений x_l. Однако их поведение становится более гладким, в частности, уменьшаются, а затем и полностью исчезают осцилляции x_l (этот факт был отмечен также в [8]).

Таблица 1. **Коэффициенты разложения x_l сферической частицы радиуса $\rho = 10$ при $m_R=1.33$ и различных значениях m_I**

l	m_I				l	m_I			
	0	0.001	0.01	0.1		0	0.001	0.01	0.1
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	15	4.7362	4.7894	5.2342	6.2844
1	2.1374	2.1507	2.2624	2.7580	16	4.4471	4.4973	4.9026	5.4499
2	2.9336	2.9491	3.0977	4.2078	17	4.3438	4.3735	4.6067	4.4613
3	2.8347	2.8689	3.1899	5.3708	18	3.3834	3.4038	3.5598	3.2596
4	2.7405	2.7880	3.2376	6.3267	19	2.2265	2.2365	2.3077	2.0159
5	2.6281	2.6888	3.2624	7.1054	20	1.3577	1.3511	1.3013	1.0209
6	2.5408	2.6142	3.3020	7.7145	21	0.1794	0.1871	0.2509	0.4133
7	2.6078	2.6894	3.4488	8.1623	22	0.0964	0.0983	0.1141	0.1461
8	2.7392	2.8265	3.6345	8.4439	23	0.0282	0.0287	0.0328	0.0424
9	2.9413	3.0322	3.8636	8.5642	24	0.0068	0.0069	0.0078	0.0106
10	3.2081	3.2988	4.1221	8.5292	25	0.0014	0.0014	0.0016	0.0023
11	3.4706	3.5603	4.3616	8.3400	26	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
12	3.7823	3.8679	4.6229	8.0173	27	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
13	4.1312	4.2086	4.8802	7.5601					
14	4.2848	4.3570	4.9700	6.9723					

Заметное увеличение количества членов разложения индикатрисы рассеяния для частиц с большим радиусом влечет за собой и резкое возрастание времени счета на ЭВМ (так, для $\rho=100$ требуется примерно в 50 раз больше машинного времени, чем для $\rho=10$). Это повышает требования, предъявляемые к применяемому алгоритму и, в частности, делает весьма проблематичной возможность использования метода, предложенного в [5], что и было отмечено этими же авторами в [6].

Таблица 2. **Количество членов разложения x_l, различающихся по порядку величины, для частиц разного радиуса**

ρ	L	L_1	L_0	L_{-1}
1	6	0	1	3
10	27	0	21	1
50	114	67	33	3
100	218	169	31	11

Исследуя процесс рассеяния света в атмосферах планет, нужно учитывать то обстоятельство, что в них содержатся частицы различного радиуса, и поэтому следует рассматривать уже рассеяние света совокупностью различных частиц. Тогда в соответствии с выбранной функцией распределения частиц по размерам $f(\rho)$ вычисление полидисперсных коэффициентов разложения x_l для найденных монодисперсных $x_l(\rho)$ производится по формуле:

$$x_l = \frac{\int\limits_0^\infty x_l(\rho)\, K_{\text{рас}}(\rho)\, f(\rho)\, \rho^2 d\rho}{\int\limits_0^\infty K_{\text{рас}}(\rho)\, f(\rho)\, \rho^2 d\rho}. \tag{21}$$

Отметим, что для планетных атмосфер функция распределения частиц по размерам неизвестна и поэтому используется несколько законов распределения, в частности — нормально-логарифмический:

$$f(\rho)\, d\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\ln^2 \rho/\rho_0}{2\sigma^2}\right) d \ln \rho. \tag{22}$$

Таблица 3. **Коэффициенты разложения x_l индикатрисы рассеяния атмосферы Юпитера**

l	Длина волны λ, мкм								
	0.34	0.42	0.51	0.62	0.69	0.84	0.93	1.03	1.14
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	2.350	2.366	2.372	2.363	2.351	2.314	2.228	2.255	2.217
2	3.274	3.246	3.194	3.110	3.053	2.911	2.825	2.730	2.626
3	3.485	3.422	3.317	3.157	3.055	2.809	2.668	2.515	2.354
4	3.575	3.411	3.207	2.950	2.802	2.470	2.291	2.106	1.918
5	3.432	3.177	2.889	2.561	2.383	2.009	1.817	1.627	1.440
6	3.236	2.880	2.517	2.141	1.951	1.572	1.389	1.213	1.047
7	3.032	2.588	2.166	1.761	1.568	1.204	1.037	0.883	0.741
8	2.771	2.263	1.811	1.409	1.227	0.901	0.759	0.631	0.518
9	2.563	2.005	1.533	1.138	0.967	0.676	0.555	0.450	0.360
10	2.314	1.731	1.265	0.898	0.746	0.500	0.402	0.319	0.250
11	2.120	1.524	1.066	0.722	0.586	0.374	0.293	0.227	0.173
12	1.900	1.311	0.878	0.571	0·454	0.278	0.214	0.162	0.122
13	1.728	1.149	0.739	0.459	0.357	0.208	0.156	0.116	0.085
14	1.542	0.989	0.613	0.367	0.280	0.158	0.116	0.085	0.061
15	1.395	0.864	0.515	0.295	0.220	0.118	0.085	0.061	0.042
16	1.243	0.747	0.431	0.240	0.176	0.092	0.065	0.046	0.032
17	1.118	0.649	0.361	0.192	0.138	0.069	0.048	0.033	0.022
18	0.997	0.565	0.307	0.159	0.113	0.055	0.038	0.025	0.017
19	0.891	0.488	0.255	0.127	0.088	0.041	0.027	0.018	0.012
20	0.799	0.429	0.220	0.108	0.074	0.034	0,022	0.015	0.010
21	0.709	0.368	0.182	0.085	0.057	0.025	0.016	0.010	0.006
22	0.640	0.328	0.159	0.074	0.049	0.021	0.014	0.009	0.005
23	0.563	0.279	0.130	0.058	0.038	0.016	0.010	0.006	0.004
24	0.513	0.251	0.116	0.051	0.033	0.014	0.009	0.005	0.003
25	0.449	0.212	0.095	0.040	0.025	0.010	0.006	0.004	0.002
26	0.412	0.193	0.086	0.036	0.023	0.009	0.005	0.003	0.002
27	0.359	0.163	0.069	0.028	0.017	0.006	0.004	0.002	0.001
28	0.331	0,149	0.063	0.026	0.016	0.006	0.004	0.002	0.001
29	0.287	0.125	0.051	0.020	0.012	0.004	0.002	0.001	0.001
30	0.266	0.115	0.047	0.018	0.011	0.004	0.002	0.001	0.001
31	0.231	0.097	0.038	0.014	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001
32	0.215	0.090	0.035	0.013	0.008	0.003	0.002	0.001	0.000
33	0.186	0.075	0.029	0.010	0.006	0.002	0.001	0.001	
34	0.173	0.070	0.027	0.010	0.006	0.002	0.001	0.001	
35	0.150	0.059	0.022	0.007	0.004	0.001	0.001	0.000	
36	0.142	0.056	0.020	0.007	0.004	0.001	0.001		
37	0.123	0.047	0.017	0.006	0.003	0.001	0.001		
38	0.115	0.044	0.016	0.005	0.003	0.001	0.000		
39	0.100	0.037	0.013	0.004	0.002	0.001			
40	0.093	0.034	0.012	0.004	0.002	0.001			
41	0.082	0.029	0.010	0.003	0.002	0.000			
42	0.076	0.027	0.009	0.003	0.002				
43	0.067	0.023	0.008	0.002	0.001				
44	0.062	0.022	0.007	0.002	0.001				
45	0.055	0.019	0.006	0.002	0.001				
46	0.051	0.017	0.006	0.002	0.001				
47	0.045	0.015	0.005	0.001	0.001				
48	0.042	0.014	0.004	0.001	0.001				
49	0.037	0.012	0.004	0.001	0.001				
50	0.034	0.011	0.003	0.001	0.000				
51	0.030	0.010	0.003	0.001					
52	0.029	0.009	0.003	0.001					
53	0.025	0.008	0.002	0.001					
54	0.023	0.007	0.002	0.001					
55	0.021	0.006	0.002	0.000					
56	0.020	0.006	0.002						
57	0.018	0.005	0.001						
58	0.016	0.005	0.001						
59	0.015	0.004	0.001						
60	0.014	0.004	0.001						
61	0.012	0.004	0.001						
62	0.012	0.003	0.001						
63	0.010	0.003	0.001						
64	0.010	0.003	0.001						
65	0.009	0.002	0.001						

Продолжение табл. 3

l	Длина волны λ, мкм								
	0.34	0.42	0.51	0.62	0.69	0.84	0.93	1.03	1.14
66	0.008	0.002	0.001						
67	0.007	0.002	0.000						
68	0.007	0.002							
69	0.006	0.002							
70	0.006	0.002							
71	0.005	0.001							
72	0.005	0.001							
73	0.005	0.001							
74	0.004	0.001							
75	0.004	0.001							
76	0.004	0.001							
77	0.003	0.001							
78	0.003	0.001							
79	0.003	0.001							
80	0.003	0.001							
81	0.002	0.001							
82	0.002	0.001							
83	0.002	0.000							
84	0.002								
85	0.002								
86	0.002								
87	0.002								
88	0.001								
89	0.001								
90	0.001								
91	0.001								
92	0.001								
93	0.001								
94	0.001								
95	0.001								
96	0.001								
97	0.001								
98	0.001								
99	0.001								
100	0.001								
101	0.001								
102	0.000								

Здесь $f(\rho)d\rho$ — доля частиц, радиусы которых заключены в пределах от ρ до $\rho+d\rho$, ρ_0 — их среднее геометрическое, σ^2 — дисперсия логарифмов.

Из анализа поляриметрических наблюдений Юпитера в работе [9] найдено, что для облачных частиц показатель преломления $m = 1.36$, средний радиус $r_0 \approx 0.2$ мкм и $\sigma^2 = 0.3$. Для этих значений m, r_0 и σ^2 для различных длин волн нами вычислены коэффициенты разложения x_l, которые приведены в табл. 3. Интегрирование по ρ в формуле (21) проводилось на интервале $0 \leqslant \rho \leqslant 80$, который неравномерно разбивался на 38 подынтегралов, в каждом из которых использовалась семиточечная квадратурная формула Чебышева. Такой промежуток интегрирования и количество разбиений выбраны для обеспечения точности расчетов, равной единице последней значащей цифры. В заключение отметим, что приведенные в табл. 3 данные могут быть использованы при расчете интенсивности излучения, многократно рассеянного в атмосфере Юпитера. Итак, апробация предложенного в данной работе алгоритма позволяет сделать вывод о возможности его использования для расчетов коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра для сферических частиц различного радиуса, в том числе и полидисперсных систем частиц, на ЭВМ среднего класса (типа ЕС 1022).

1. *Бугаенко О. И.* Обобщенные сферические функции в задаче Ми.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976, **12**, № 6, с. 603—611.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.—1100 с.
3. *Дейрменджан Д.* Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами.— М.: Мир, 1971.—165 с.
4. *Лоскутов В. М.* Рассеяние света на сферических частицах с показателем преломления 1.38.— Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1971, **359**, № 47, с. 14—24.
5. *Chu C. M., Churchill S. W.* Representation of the angular distribution of radiation scattered by a spherical particle.— J. Opt. Soc. Amer., 1955, **45**, N 11, p. 958—962.
6. *Clark G. C., Chu C. M., Churchill S. W.* Angular distribution coefficients for radiation scattered by a spherical particle.— Ibid., 1957, **47**, N 1, p. 81—84.
7. *Dave J. V.* Coefficients of the Legendre and Fourier series for the scattering functions of spherical particles.— Appl. Opt., 1970, **9**, N 8, p. 1888—1896.
8. *De Rooij W. A., van der Stap C. C. A. H.* Expansion of Mie scattering matrices in generalised spherical functions.— Astron. and Astrophys., 1984, **131**, N 2, p. 237—248.
9. *Morozhenko A. V., Yanovitskij E. G.* The optical properties of Venus and the Jovian planets. I. The atmosphere of Jupiter according to polarimetric observations.— Icarus, 1973, **18**, N 4, p. 583—592.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 15.03.85,
после доработки 29.04.85

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 521.93

НЕКОТОРЫЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ АСТРОНОМИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ / Дубик Б. С.

(Рукопись деп. в ВИНИТИ; № 2759-85Деп)

Показано, как могут быть записаны фильтры А. Я. Орлова и В. И. Сахарова для выделения средней широты в виде произведения более простых и элементарных фильтров. Фильтр В. И. Сахарова отличается от фильтра А. Я. Орлова дополнительным множителем, который исключает составляющую с угловой скоростью 60°. Это дает основание утверждать, что В. И. Сахаров предполагал наличие такой составляющей.

Предложено несколько фильтров для выделения средней широты. Удалось построить наиболее короткий фильтр, который охватывает всего лишь 15.6 месяцев. Один из предложенных нами фильтров имеет треугольную форму, поэтому при его использовании центральные ординаты получают наибольший вес, что важно при получении наиболее реальных значений средней широты. Некторые фильтры дополнительно содержат множитель, который позволяет наиболее полно исключить составляющую с угловой скоростью 30° (чандлеровское движение).

Дается методика построения фильтров, позволяющих выделить постоянную и переменную части в изменениях средней широты на интервале применения фильтра.

Приведен фильтр для выделения составляющей с угловой скоростью 60°.

В заключительной части работы предложен фильтр для определения средней квадратичной ошибки одной ординаты данных наблюдений по методу Леколязе.

Используя набор простых или элементарных фильтров, приведенных в работе, не трудно построить фильтры для выделения чандлеровской, годовой и полугодовой составляющих.