

УДК 629.783+528.21/22

Модели точечных масс и их использование в орбитальном методе спутниковой геодезии.

II. Применение моделей точечных масс при дифференциальном уточнении орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ)

А. Н. Марченко, О. А. Абрикосов, И. М. Цюпак

Обсуждены результаты исследований по использованию полученных методом регуляризации (в 1-ой части работы) моделей точечных масс для вычисления орбит ИСЗ. Описана «технология» орбитальных вычислений с применением таких моделей. Приведены FORTRAN-программы для их использования в численных методах при интегрировании как уравнений движения, так и вариационных уравнений для получения необходимых в процессе уточнения соответствующих производных. Показано, что решение ML4A обеспечивает на 5-суточных дугах практически такую же точность представления орбиты «Lageos», что и набор гармоник GEM-L2. Аналогичное сравнение и результаты приведены при вычислении орбиты «Starlette» с помощью GEM-9 и LPM-1A. Сделан вывод о целесообразности использования ML4A вместо GEM-L2, рекомендуемой Стандартами МЕРИТ для определения параметров вращения Земли: экономия вычислительного времени достигает 50 %.

POINT MASS MODELS AND THEIR APPLICATION TO THE ORBITAL METHOD OF SATELLITE GEODESY. II. APPLICATION OF POINT MASS MODELS TO THE DIFFERENTIAL IMPROVEMENT OF ORBITS OF THE EARTH'S ARTIFICIAL SATELLITES, by Marchenko A. N., Abrikosov O. A., Tsyupak I. M.— The results of application of the point mass models to the orbital computations are discussed. Two FORTRAN programmes are presented, which may be used in numerical methods of satellite geodesy for integration of both the equations of motion and the variational equations. It is shown that the ML4A solution represents the «Lageos» orbit on the 5-days arcs with the same accuracy as the set of GEM-L2 harmonics. Similar comparison is made for computation of «Starlette» orbit in cases of using the GEM-9 harmonics and the LPM-1A solution. The expedience of using the ML4A (instead of the GEM-L2 recommended by MERIT Standards for the determination of the Earth's rotation from «Lageos») is confirmed. The decrease of computer time is 50 % in the case of using the ML4A.

Введение. В рамках орбитального метода спутниковой геодезии процесс дифференциального уточнения предполагает приведение орбиты в наилучшее соответствие (обычно в среднем квадратичном смысле) с наблюдениями. При этом в большинстве случаев модель движения (в частности, модель геопотенциала) полагают фиксированной и выполняют последовательное уточнение начальных условий движения, координат станций, а при использовании высокоточных наблюдений ИСЗ — параметров вращения Земли* [7, 8, 12].

Ниже обсуждаются результаты исследований по применению полученных в [3] некоторых многоточечных моделей для вычисления орбит спутников. Такая особенность представления геопотенциала V в виде суммы потенциалов точечных масс, как практическая сложность создания аналитической теории (в отличие от представления его в виде ряда шаровых функций), привела к необходимости построения соответствующей «технологии» орбитальных вычислений при использовании моделей точечных масс. Оптимальным оказалось применение численных методов небесной механики и спутниковой геодезии при интегрировании уравнений движения и при получении необходимых в процессе

* Уточнение тех или иных параметров связано с точностью известного их начального приближения, и поэтому приведенная последовательность, как правило, варьируется в зависимости от решаемой конкретной задачи.

дифференциального уточнения производных путем численного интегрирования системы вариационных уравнений. Учитывая простой вид обсуждаемой математической модели для геопотенциала

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, z) &= fM \sum_{i=1}^{N^*} \mu_i / r_i \\ r_i &= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в прямоугольной (жестко связанной с Землей) системе координат $oxyz$ и вид соответствующих выражений для первых и вторых производных от V в форме (1) по осям координат x, y, z , удобным оказывается численное интегрирование уравнений движения и вариационных уравнений в прямоугольной (инерциальной) координатной системе $OXYZ$ с применением системы элементов $(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. В (1) fM — произведение гравитационной постоянной на массу Земли; μ_i — величина (в единицах fM) i -й точечной массы с координатами x_i, y_i, z_i в теле планеты; x, y, z — прямоугольные координаты внешней точки (например, ИСЗ).

Напомним, что в случае использования наборов сопряженных точечных масс [3, 4] выражение (1) преобразуется к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, z) &= fM \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{N_1} \mu_i \left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{\rho_i} \right] + \sum_{i=N_1+1}^N \mu_i \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{\rho_i} \right] \right\}, \\ \rho_i &= \sqrt{(x + x_i)^2 + (y + y_i)^2 + (z + z_i)^2}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где N_1 — число сопряженных точечных масс, описывающих четную составляющую [3] геопотенциала V , $(N - N_1)$ — его нечетную составляющую, r — геоцентрический радиус-вектор текущей точки.

Результаты использования моделей сопряженных точечных масс гравитационного поля при уточнении орбит ИСЗ. Полученные с помощью разработанного в [1—3] вариационного метода регуляризации модели точечных масс ML4A и LPM-1A (табл. 1), апробировались при вычислении орбит ИСЗ «Lageos» (по лазерным наблюдениям с 14 станций короткой кампании МЕРИТ на 2.5- и 5-суточных дугах) и «Starlette» (5-суточная дуга, 7 станций наблюдений). Уточнение начальных условий движения спутников выполнялось с помощью блока дифференциального уточнения из разработанного в ЛПИ комплекса программ, использующего метод вариаций для вычисления [6] изохронных производных в прямоугольных координатах в средней инерциальной системе координат [8] (система астрономических постоянных МАС 1976 г.), фиксируемой на момент задания начального вектора $(X_0, Y_0, Z_0, \dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0)$ состояния ИСЗ. При этом учитывались (кроме геопотенциала) следующие возмущающие факторы в случае «Lageos»: притяжение Луны и Солнца, лунно-солнечные приливы твердой Земли и солнечная радиация, а при уточнении орбиты «Starlette» и атмосферное торможение.

Среднее квадратичное значение ($O-C$) после уточнения орбиты «Lageos» на 5-суточной дуге составляет величину ~ 0.6 м (табл. 2), как для наборов гармоник (GEM-9, GEM-10, GEM-L2), так и для обсуждаемых многоточечных моделей. Исключением является модель GRIM-3, по которой для данного набора наблюдений эта оценка принимает значение ~ 1.0 м. В указанных моделях гармоник использовались коэффициенты до 20-го порядка и степени включительно. Заметим, что увеличение детализации поля не приводит к существенному улучшению среднего квадратичного значения ($O-C$) после уточнения

орбиты. Модели точечных масс использовались также и при интегрировании вариационных уравнений. Конкретно, в последнем случае учитывался потенциал модели 5 точечных масс (приближенная конструкция квадриполя+центральная масса [1]), которой задавалось нормальное поле при построении обсуждаемых многоточечных моделей. Результаты, приведенные в табл. 2, наглядно иллюстрируют целесообразность использования указанной простейшей системы точечных масс при вычислении правых частей вариационных уравнений.

Таблица 1. Параметры модели ML4A сопряженных точечных масс, аппроксимирующей полный набор гармоник GEM-L2

$\mu_i \times 10^6$	D_i	ϑ_i , град	λ_i , град	$\mu_i \times 10^6$	D_i	ϑ_i , град	λ_i , град
-539.49864	0.1×10^{-2}	0.00022	70.97883	-6.33888	0.5369	49.32	209.38
539.49864	$0.82014203 \times 10^{-4}$	89.99998	165.07368	4.49479	0.6351	22.54	353.88
1.84185	0.7802	8.32	244.27	-4.95751	0.5976	82.34	326.46
1.75386	0.7624	31.84	220.84	3.86598	0.5500	61.23	66.48
1.40047	0.7580	80.03	326.90	2.32841	0.7422	31.56	211.04
2.75952	0.7842	87.57	283.17	2.27994	0.7432	52.21	321.77
1.09084	0.8433	80.07	115.34	2.80178	0.7705	60.59	32.44
1.36190	0.7896	27.72	327.02	2.05162	0.7508	59.27	83.97
2.59932	0.7434	48.28	254.47	2.70700	0.7570	47.87	137.21
1.49984	0.7527	27.66	132.53	1.00138	0.7877	87.38	204.84
1.59193	0.6878	53.96	37.18	1.87972	0.7551	75.94	276.48
-2.72492	0.7257	26.63	274.68	-0.61248	0.8545	70.83	358.30
-1.05689	0.7364	66.20	288.84	2.19827	0.7579	84.96	342.66
-3.57406	0.7899	60.69	298.37	-3.42121	0.6269	81.16	343.49
-0.98829	0.7652	9.59	170.96	-5.86037	0.6784	41.93	83.59
-1.38234	0.7337	32.73	91.53	-1.30881	0.7969	29.43	111.19
-2.83088	0.7462	81.08	82.50	-2.31791	0.7703	69.49	244.16
-2.08350	0.6851	64.15	160.85	-1.35280	0.8092	17.46	258.08
-0.75075	0.8074	53.54	180.71	-1.45326	0.8131	32.81	272.06
-1.43723	0.6860	57.66	229.82	-2.35771	0.7148	83.66	303.42
-1.33960	0.7552	26.24	9.76	1.12680	0.7929	85.12	258.33
0.46831	0.8774	68.68	195.46	-0.94528	0.8252	62.24	113.21
0.45262	0.8371	71.65	350.62	-0.23774	0.6157	9.15	276.32
0.89203	0.7975	67.88	72.92	0.81315	0.7734	73.98	222.79
-0.41463	0.8433	63.11	22.70	1.25594	0.7340	8.23	345.98
0.20746	0.9216	84.45	38.29	1.07442	0.8020	19.63	319.29
0.77748	0.8863	61.86	298.99	-1.21260	0.8103	79.27	77.38
-0.15869	0.9025	81.36	182.83	-1.35400	0.7908	51.98	161.09
0.04218	0.9507	43.55	324.10	0.71751	0.8267	83.63	1.88
-0.31293	0.9067	44.22	56.39	-0.44478	0.9005	75.59	109.77
0.11142	0.9274	58.86	119.80	0.41892	0.8634	81.39	122.04
-0.02268	0.9528	67.51	96.29	-0.50973	0.8818	44.70	225.95
0.06232	0.9523	69.98	254.22	-0.16274	0.9192	68.57	293.89
-0.11108	0.9058	54.38	265.45	3.70693	0.7220	36.34	86.01
-0.49182	0.8754	50.67	91.50	-0.71735	0.8885	61.13	28.84
0.26187	0.9213	59.85	87.23	0.22204	0.9087	57.82	60.99
0.23612	0.8777	35.53	55.96	-0.52220	0.8430	45.97	103.38
0.29210	0.9119	54.27	327.65	0.45479	0.8569	71.45	252.84
0.76633	0.7926	56.33	354.06	0.23094	0.8712	85.20	94.29
-0.61742	0.8343	57.28	339.35	0.21077	0.8684	45.87	249.40
-0.10489	0.8760	83.76	309.22	-0.14886	0.9046	17.30	204.84
-0.06720	0.8743	89.81	196.51	-0.13948	0.9014	33.14	30.55
				0.22467	0.8486	88.97	226.55

Примечание: μ_i — в единицах массы Земли; D_i — в единицах экваториального радиуса ϑ_i — полярное расстояние; λ_i — долгота ($N_1=42$, $N=85$).

Отметим также, что построенные вариационным методом модели M4A и ML4A сопряженных точечных масс обеспечивают практически ту же точность представления орбиты «Lageos», что и современные комплекты гармонических коэффициентов. Причем необходимо подчеркнуть, что набор гармоник GEM-L2, усеченный до 20-го порядка и

степени, рекомендован в MERIT Standards [12] для обработки лазерных наблюдений этого спутника в целях получения параметров вращения Земли. Таким образом, можно сделать вывод о целесообразности использования ML4A вместо GEM-L2 для определения координат полюса и неравномерности вращения Земли: экономия вычислительного времени достигает 50 %.

В табл. 2 также приведены результаты уточнения орбиты «Starlette» с использованием моделей геопотенциала GEM-9 и модели сопряженных точечных масс LPM-1A, построенной с привлечением измерительной информации о высотах геоида [13]. Сравнение получаемых

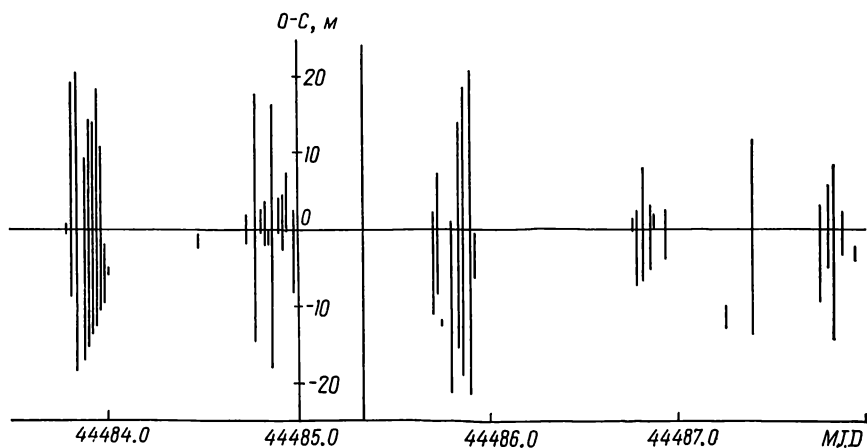


Рис. 1. График распределения величин (O—C) по прохождениям после дифференциального уточнения орбиты «Starlette» на 5-суточной дуге с использованием модели GEM-9. Среднее квадратичное значение $\sigma_{(O-C)}=8.51$ м

средних квадратичных значений (O—C) подтверждает сделанный в [3] вывод о том, что набор точечных масс LPM-1A по точности описания гравитационного поля соответствует моделям гармоник типа GEM-9, GEM-10 (рис. 1, 2). При этом использование LPM-1A вместо последних обеспечивает при уточнении орбиты «Starlette» экономию вычислительного времени около 30 %.

Подобные (по точности представления орбит «Lageos» и «Starlette») результаты приводятся в работе [10], где обсуждается модель 100

Таблица 2. Некоторые результаты уточнения орбит ИСЗ «Lageos» и «Starlette» на 5-суточных дугах

Модель геопотенциала	Среднее квадратичное значение $\sigma_{(O-C)}$ (в метрах) величины (O—C)		
	«Lageos»		«Starlette»
	\bar{C}_{20}^*	$\bar{C}_{2m}, \bar{C}_{2m}^{**}$	
GEM-9 (20×20)	0.61	0.61	8.51
GEM-L2 (20×20)	0.60	0.59	—
M4A	0.57	0.57	—
ML4A	0.59	0.59	—
LPM-1A	—	—	8.60

* При численном интегрировании вариационных уравнений учитывалось влияние полярного сжатия Земли (центральная масса+гармоника C_{20}).

** При интегрировании вариационных уравнений учитывалось влияние полярного и экваториального сжатия планеты (центральная масса + модель приближенной конструкции квадриполя, описывающая полный набор гармоник 2-го порядка [1]).

точечных масс, представляющая возмущающий потенциал типа (1); нормальное поле описывается гармониками GEM-10 до 4-го порядка и степени включительно. Однако сравнивая подходы построения моделей M2A-M8, LPM-1A [3] и [10], отметим еще раз то существенное обстоятельство, что в случае [10] в качестве исходной информации использовались значения производных ($\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$), которые как раз и присутствуют в правых частях уравнений движения при вычислении

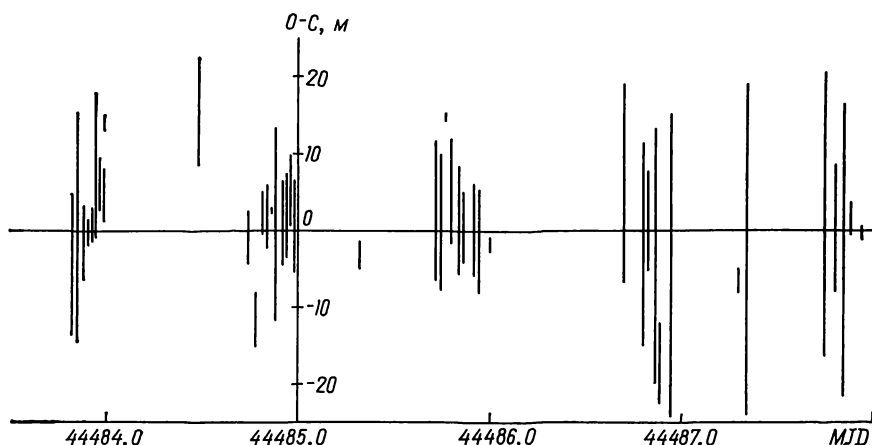


Рис. 2. График распределения величин ($O-C$) по прохождением после дифференциального уточнения орбиты «Starlette» на 5-суточной дуге с использованием модели LPM-1A. Среднее квадратичное значение $\sigma_{(o-c)}=8.60$ м

орбит спутников. При построении же моделей M2A-M8, LPM-1A исходными данными служили либо вычисленные по наборам гармоник, либо полученные из данных спутниковой альтиметрии [13] величины N высот геоида (фактически — значения функции T); но применение в качестве стабилизатора задачи квадрата нормы потенциала (5) из [2, 3] с параметрами воспроизводящего ядра ЧНВ-2 [2], построенного специально для сглаженного поля, позволили с необходимой для вычисления орбит спутников «Lageos» и «Starlette» точностью получать и сами производные ($\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$). Последний факт, впрочем, имеет теоретическое обоснование в ряде работ по физической геодезии [5, 11], из которого следует (при трактовке потенциала T как элемента гильбертова пространства H_2^q с воспроизводящим ядром) равномерная аппроксимация как самой функции, так и ее первых производных в случае $q=2.5$.

Отметим, что в работе [9] проведены тщательные исследования по выбору исходной информации для построения модели точечных масс в рамках способа наименьших квадратов, и окончательные результаты получены с обязательным использованием вычисленных в сферическом слое над геосферой (по набору гармоник SAO-II) величин аномалий силы тяжести Δg . Несмотря на то, что поле Δg по модели SAO-II и набору 126 точечных масс прекрасно согласуется на поверхности земного эллипсоида, результаты дифференциального уточнения орбиты спутника GEOS-A по лазерным наблюдениям с 5 станций на недельной дуге с применением моделей SAO-II и 126 масс приводят к следующим величинам средних квадратичных значений ($O-C$): 7.4 м, 14.1 м соответственно (экономия вычислительного времени 44 %).

Таким образом, сравнение различных подходов к построению многоточечных моделей и результатов их апробации при вычислении орбит спутников, приводит к естественному выводу о том, что отказ в такой ситуации от способа наименьших квадратов в пользу метода регуляризации позволяет существенно повысить устойчивость получае-

мых решений за счет построения регулярной минимизирующей последовательности $\{T_N\}$. С другой стороны, привлечение априорной информации о гравитационном поле Земли в обобщенной форме, представленной в виде модельной глобальной ковариационной функции T (воспроизводящего ядра определенного гильбертового пространства H_2^q), согласованной с гладкостью изучаемого поля, обеспечивает на практике еще и устойчивость аналитического продолжения вверх как самой функции T , так и ее первых производных. Например, результаты вычисления орбиты «Starlette» на основании модели LPM-1A, полученной по наблюдательной (из данных спутниковой альтиметрии) информации о высотах геоида (в дискретных точках, отнесенных к поверхности Земли, практически такие же, как и с применением чисто спутникового решения GEM-9, полученного методом средней квадратичной коллокации).

Существенным представляется также тот факт, что геоид, описываемый гармониками GEM-L2 до 4-го порядка и степени включительно, имеет точность, оцениваемую стандартной ошибкой ~ 8 см, что несомненно лучше, нежели для GEM-9. Последнее дополнительно учитывалось в алгоритме аппроксимации [3] путем наложения условий на полное согласование гармоник GEM-L2 и гармоник набора точечных масс ML4A до 3-го порядка и степени включительно. Кроме того, сравнение гармоник 4-го порядка по ML4A и GEM-L2 показало их хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о практически такой же высокой точности представления длинноволновых компонент гравитационного поля набором 85 сопряженных точечных масс ML4A, как и моделью GEM-L2. Найденное решение ML4A более выгодно уточнить теперь в рамках динамического метода спутниковой геодезии по высокоточным лазерным наблюдениям «Lageos». Причем уже полученные при определении орбит «Lageos» качества ML4A, по-видимому, гарантируют такое уточнение лишь в линейной постановке, что влечет за собой только переопределение величин μ_i точечных масс.

Программное обеспечение для вычисления орбит ИСЗ на основании моделей сопряженных точечных масс геопотенциала. Одним из преимуществ использования многоточечных моделей геопотенциала при решении прикладных задач является возможность более простого программирования, что приводит к ощутимой экономии ресурсов ЭВМ. Это, наряду с указанным выше значительным сокращением времени счета, делает весьма выгодным применение таких моделей, особенно на ЭВМ средней и малой мощности. Кроме того, отметим, что использование моделей точечных масс не влечет за собой вычислений по рекуррентным формулам с неизбежным в этом случае накоплением ошибок округлений. Последнее становится весьма важным при учете высокочастотной части геопотенциала. Поэтому авторы считают своевременным привести примеры программ, реализующих вычисление часто используемых при определении орбит ИСЗ трансформант геопотенциала на основании моделей сопряженных точечных масс.

Ниже даны тексты FORTRAN-программ для вычисления составляющих действующей на ИСЗ силы притяжения Земли (первых производных геопотенциала), подпрограмма FORPM2 и матрицы вторых производных, необходимой для вычисления правых частей вариационных уравнений, подпрограмма GRADPM. Эти программы успешно использовались авторами при определении некоторых динамических и геометрических параметров по наблюдениям ИСЗ. В качестве единицы длины принята величина большой полуоси a_e общеземного эллипсоида, а в качестве единицы времени — сутки. Вычисления выполняются в прямоугольной системе координат x, y, z , жестко связанной с Землей.

Формальными параметрами передаются: X, Y, Z — координаты ИСЗ; $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ — первые производные геопотенциала по координатам ИСЗ; B — матрица вторых производных геопотенциала.

Параметры модели точечных масс передаются COMMON-блоками, имена которых совпадают с именами соответствующих массивов. В подпрограмме FORPM2 это: PM — массив удвоенной точности величин точечных масс; XI, YI, ZI — массивы удвоенной точности прямоугольных координат точечных масс. В подпрограмме GRADPM соответствующие массивы и COMMON-блоки есть RV, XV, YV, ZV. Количество точечных масс передается также в COMMON-блоках. В подпрограмме FORPM2 — COMMON/MASS/N, K, L, где N — общее количество точечных масс; K — количество точечных масс четной составляющей; L = K + 1. А в подпрограмме GRADPM — COMMON/POIMAS/NN, KK, LL, где переменные имеют тот же смысл (LL = KK + 1). COMMON-блоком FM в описываемые подпрограммы передается произведение гравитационной постоянной на массу Земли, выраженное в $a_e^3/(\text{сутки})^2$.

Обратим внимание, что массивы параметров точечных масс должны быть описаны в логически предшествующем программном модуле (например, — MAIN) в соответствующих COMMON-блоках по количеству точечных масс (например COMMON/PM/PM (85) и т. д. для модели ML4A).

Подпрограмма вычисления первых производных геопотенциала

```

SUBROUTINE FORPM2 (X, Y, Z, FX, FY, FZ)
  IMPLICIT REAL*8(A—H, O—Z)
  COMMON/PM/PM(1)/XI/XI(1)/YI/YI(1)/ZI/ZI(1)/MASS/N, K, L/FM/FM
  RR=X*X+Y*Y+Z*Z
  R=DSQRT(RR)
  RRR=-FM/(RR*R)
  FX=X*RRR
  FY=Y*RRR
  FZ=Z*RRR
  DO 1 I=1, N
    A=X-XI(I)
    B=Y-YI(I)
    C=Z-ZI(I)
    D=PM(I)/DSQRT(A*A+B*B+C*C)**3
    FX=FX-D*A
    FY=FY-D*B
1  FZ=FZ-D*C
    DO 2 I=1, K
      A=X+XI(I)
      B=Y+YI(I)
      C=Z+ZI(I)
      D=PM(I)/DSQRT(A*A+B*B+C*C)**3
      FX=FX-D*A
      FY=FY-D*B
2  FZ=FZ-D*C
    DO 3 I=L, N
      A=X+XI(I)
      B=Y+YI(I)
      C=Z+ZI(I)
      D=PM(I)/DSQRT(A*A+B*B+C*C)**3
      FX=FX+D*A
      FY=FY+D*B
3  FZ=FZ+D*C
  RETURN
  END

```

Подпрограмма вычисления матрицы вторых производных потенциала

```

SUBROUTINE GRADPM(X, Y, Z, B)
  IMPLICIT REAL*8(A—H, O—Z)

```

```

COMMON/RV/RV(1)/XV/XV(1)/YV/YV(1)/ZV/ZV(1)/POIMAS/NN, KK, LL/FM/FM
DIMENSION B(3, 3)
XX=X*X
YY=Y*Y
ZZ=Z*Z
R2=XX+YY+ZZ
R=DSQRT(R2)
R3=R2*R
FM3=FM*3.D0
FMR=-FM/R3
FM3R5=FM3/(R3*R2)
B(1, 1)=FMR+FM3R5*XX
B(2, 1)=FM3R5*X*Y
B(3, 1)=FM3R5*X*Z
B(2, 2)=FMR+FM3R5*YY
B(3, 2)=FM3R5*Y*Z
B(3, 3)=FMR+FM3R5*ZZ
DO 1 I=1, KK
QX=X-XV(I)
QY=Y-YV(I)
QZ=Z-ZV(I)
QXP=X+XV(I)
QYP=Y+YV(I)
QZP=Z+ZV(I)
XX=QX*QX
YY=QY*QY
ZZ=QZ*QZ
XX1=QXP*QXP
YY1=QYP*QYP
ZZ1=QZP*QZP
RO2=XX+YY+ZZ
RO=DSQRT(RO2)
RO3=RO2*RO
BE2=XX1+YY1+ZZ1
BE=DSQRT(BE2)
BE3=BE2*BE
RM=-RV(I)/RO3
RM3=RV(I)*3.D0
RM5=RM3/(RO3*RO2)
BM=-RV(I)/BE3
BM5=RM3/(BE3*BE2)
RB=RM+BM
B(1, 1)=B(1, 1)+RM5*XX+BM5*XX1+RB
B(2, 1)=B(2, 1)+RM5*QX*QY+BM5*QXP*QYP
B(3, 1)=B(3, 1)+RM5*QX*QZ+BM5*QXP*QZP
B(2, 2)=B(2, 2)+RM5*YY+BM5*YY1+RB
B(3, 2)=B(3, 2)+RM5*QY*QZ+BM5*QYP*QZP
1 B(3, 3)=B(3, 3)+RM5*ZZ+BM5*ZZ1+RB
IF(KK.EQ.NN) GO TO 3
DO 2 I=LL, NN
QX=X-XV(I)
QY=Y-YV(I)
QZ=Z-ZV(I)
QXP=X+XV(I)
QYP=Y+YV(I)
QZP=Z+ZV(I)
XX=QX*QX
YY=QY*QY

```



```

ZZ=QZ*QZ
XX1=QXP*QXP
YY1=QYP*QYP
ZZ1=QZP*QZP
RO2=XX+YY+ZZ
RO=DSQRT(RO2)
RO3=RO2*RO
BE2=XX1+YY1+ZZ1
BE=DSQRT(BE2)
BE3=BE2*BE
RM=-RV(1)/RO3
RM3=RV(1)*3.D0
RM5=RM3/(RO3*RO2)
BM=RV(1)/BE3
BM5=RM3/(BE3*BE2)
RB=RM-BM
B(1, 1)=B(1, 1)+RM5*XX-BM5*XX1+RB
B(2, 1)=B(2, 1)+RM5*QX*QY-BM5*QXP*QYP
B(3, 1)=B(3, 1)+RM5*QX*QZ-BM5*QXP*QZP
B(2, 2)=B(2, 2)+RM5*YY-BM5*YY1+RB
B(3, 2)=B(3, 2)+RM5*QY*QZ-BM5*QYP*QZP
2 B(3, 3)=B(3, 3)+RM5*ZZ-BM5*ZZ1+RB
3 B(1, 2)=B(2, 1)
  B(1, 3)=B(3, 1)
  B(2, 3)=B(3, 2)
RETURN
END

```

1. *Марченко А. Н.* Вариант простейшей модели гравитационного поля Земли.— В кн.: *Междунар. конф. ИНТЕРКОСМОС. «Использование наблюдений ИСЗ для геодезии и геофизики»*: Тез. докл. М., 1982, с. 32—33.
2. *Марченко А. Н.* Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля.— Киев, 1983.— 43 с.— (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 293 Ук—Д83).
3. *Марченко А. Н., Абрикосов О. А., Цюпак И. М.* Модели точечных масс и их использование в орбитальном методе спутниковой геодезии. I. Описание глобального гравитационного поля Земли системой потенциалов точечных масс.— *Кинематика и физика небес. тел*, 1985, 1, № 4, с. 53—61.
4. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* О многоточечных моделях геопотенциала.— В кн.: *Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики*. Киев: Наук. думка, 1982, с. 121—131.
5. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии.— М.: Недра, 1979.— 200 с.
6. *Цюпак И. М.* Об использовании метода вариаций при дифференциальном уточнении орбит ИСЗ.— Киев, 1984.— 15 с.— (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 659 Ук—Д84).
7. *Яцкив Я. С.* Международный проект МЕРИТ.— Киев, 1980.— 43 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики, ИТФ—81—124Р).
8. *Яцкив Я. С., Тарадий В. К., Цесис М. Л. и др.* Вращение Земли по данным ИСЗ «Лагос».— В кн.: *Междунар. конф. ИНТЕРКОСМОС. «Использование наблюдений ИСЗ для геодезии и геофизики»*: Тез. докл. М., 1982, с. 51.
9. *Balmino G.* La representation du potentiel terrestre par masses ponctuelles.— *Bull. Geod.*, 1972, N 111, p. 85—108.
10. *Barthelmes F., Kautzleben H.* A new method of modelling the gravity field of the Earth by point masses.— Hamburg., 1983.— 18 p.— (Pap. Present. General Assembly IAU; Symp. C).
11. *Moritz H.* Advanced physical geodesy.— Karlsruhe: Wichmann, 1980.— 500 p.
12. *Project MERIT Standards.*— Washington, 1983.— 85 p.— (Circular / U. S. Naval Observatory; N 167).
13. *Rapp R. H.* Global anomaly and undulation recovery using GEOS—3 altimeter data.— Columbus, 1979.— 49 p.— (Report / Dep. Geod. Sci., Ohio State Univ.; N 285).