

УДК 521.182.2

## О вычислении траекторий ИСЗ для целей геодинамики

В. К. Тарадий, М. Л. Цесис

Показано, что определение с требуемой точностью высоких, почти круговых орбит геодинимических ИСЗ может производиться с помощью ньютоновских уравнений движения и современных методов численного интегрирования (алгоритм Эверхарта, разностный алгоритм). При анализе наблюдений близких к Земле геодезических ИСЗ наиболее эффективные траекторные оценки могут быть получены на основе уравнений в регулярированных элементах (KS-теория).

*ON COMPUTATION OF SATELLITE ORBITS FOR GEODYNAMICAL RESEARCH, by Taradij V. K., Tsisis M. L.*—The most efficient computation of satellite orbit for determining the geodynamical parameters may be obtained by modern algorithm of numerical integration combined with the regularized equations of satellite motion (KS-theory). As for «Lageos» observations, they may be also analysed using the direct integration of equations in rectangular coordinates by the Adams algorithm of variable order, for example, based on the divided differences.

**1. Введение.** Решение задач глобальной геодинамики (в частности, задачи о вращении Земли) по имеющимся рядам измерений расстояний до искусственных спутников (ИСЗ) с погрешностями  $\pm 3-10$  см [13], по-видимому, с наибольшей точностью может быть получено численными методами. При этом для эффективного обеспечения незначимого уровня методических ошибок траекторий, используемых в схемах дифференциальной коррекции, следует применять оптимальные сочетания методов численного интегрирования с формами представления уравнений движения ИСЗ. Выявлению таких сочетаний для различных типов орбит геодезических и геодинимических спутников посвящена данная работа. Задача решается с помощью разработанного нами пакета программ (для ЭВМ ЕС) автоматического сравнения пяти современных методов численного интегрирования уравнений движения ИСЗ в сингулярной (ньютоновской) и регуляризованных формах. Основными критериями при оценке эффективности решения являются требования совместного обеспечения как заданной точности решения, так и экономичности метода в смысле расхода машинного времени.

Сравнение численных методов интегрирования дифференциальных уравнений неоднократно выполнялось и ранее. В работах [1—8, 19] на примерах интегрирования уравнений движения ИСЗ с сингулярной (ньютоновской) и стабилизированных формах изучены возможности имеющихся схем явных методов: Рунге—Кутта (4—9 порядков), Адамса (5—8 порядков), Коуэлла, Хемминга, неявного метода Рунге—Кутта высокого порядка (алгоритм Эверхарта), экстраполяционного метода Грэгга—Булирша—Штера. Наиболее полное сопоставление современных методов траекторных вычислений сделано, по-видимому, в [19]. При этом было показано, что траекторные оценки с наибольшей эффективностью могут быть получены современными методами численного интегрирования, а именно: многошаговыми интеграторами, неявным методом Рунге—Кутта, методом экстраполяции Грэгга—Булирша—Штера (в случае уравнений с медленно изменяющимися правыми частями).

Не останавливаясь на описании алгоритма и программ автоматического сравнения, мы лишь перечислим ниже применяемые методы и приведем полученные с их помощью результаты.

**2. Уравнения движения ИСЗ.** При нахождении оптимальных условий траекторных вычислений были изучены возможности пяти форм уравнений движения: 1) сингулярных (ньютоновских) уравнений, представленных в проекциях на оси невращающейся в пространстве прямоугольной, геоцентрической системы координат [12, с. 15, формула (16)]; 2) четырех систем уравнений КС — теории регуляризации, приведенных в монографии [12, с. 34, формулы (52), (53); с. 91, (39)—(42); с. 95, (61)—(63)]. В их числе уравнения с выделенными в явном виде: а) кеплеровой энергией, б) полной энергией, в) временным элементом, г) регулярными элементами.

**3. Численные методы интегрирования.** В процессе решения поставленной задачи были испытаны следующие методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков: разностный метод Адамса переменного шага и переменного порядка (интерполяционный вариант Гира) [18]; разработанный нами алгоритм метода Адамса, основанный на разделенных разностях [9]; модификация Беттиса разностного метода решения регуляризованных систем уравнений [15]; экстраполяционный метод Грэгга — Булирша — Штера [16]; метод Эверхарта [17] (алгоритм 15-го порядка; версия программы для ЭВМ опубликована в [10]).

Все перечисленные методы подробно изложены в указанных работах. Программные реализации алгоритмов для ЭВМ осуществлены, главным образом, их авторами. Нами разработаны: программа алгоритма Адамса, основанного на разделенных разностях (программа VASTOR [9]), программа алгоритма Беттиса, подпрограммы приведения уравнений движения ИСЗ к регуляризованным формам (все на языке программирования ФОРТРАН), программа экстраполяционного алгоритма Грэгга—Булирша—Штера (на языке АССЕМБЛЕР). Для обозначения различных версий введены такие сокращения (буквы *F* и *A* в конце аббревиатур указывают на языки ФОРТРАН и АССЕМБЛЕР соответственно): *AF* — программа, реализующая алгоритм Гира; *DDF* — программа разделенных разностей; *EF* — программа Эверхарта; *GBSA* — программа Грэгга—Булирша—Штера; *BF* — программа Беттиса; *GBSF* — программа Грэгга—Булирша—Штера.

**3. Результаты сравнения методов численного интегрирования.** Испытания перечисленных методов интегрирования уравнений движения ИСЗ производились при таких начальных условиях:

| <i>a</i> , тыс. км | <i>e</i> | <i>i</i> , град | $\omega$ , град | $\Omega$ , град |
|--------------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 7.6                | 0.020    | 80              | 30              | 30              |
| 12.2               | 0.004    | 110             | 30              | 30              |
| 25.6               | 0.004    | 110             | 30              | 30              |
| 46.0               | 0.004    | 110             | 30              | 30              |

При этом модель возмущений включала следующие влияния: геопотенциала (модель GEM-10 В до  $n=m=15$ ), притяжения Солнцем и Луной, земных приливов, давления солнечного света, атмосферного торможения (для орбит геодезических ИСЗ).

Полученные нами оценки погрешностей решений сингулярных (ньютоновских) уравнений возмущенного движения представляют собой модули разностей двух значений вектора положения спутника  $\Delta\rho$ , найденных в стартовой точке при интегрировании в прямом и обратном направлениях на двухсуточном интервале времени (разности «вперед» — «обратно»). Они выражены в единицах экваториального радиуса Земли ( $a_0=6\,378\,140$  м). Понятно, что такие оценки будут лишь приблизительно соответствовать реальным ошибкам интегрирования. Все же вследствие несимметричности изучаемых алгоритмов можно

предположить, следуя [17], что различия в нашем случае несущественны.

Вычисления погрешностей производились для последовательности значений параметра точности \*  $\varepsilon_i = 10^{-7}, 10^{-8}, \dots, 10^{-14}$  (относительная ошибка интегрирования, задаваемая пользователем). Результаты вычислений разностей  $\Delta\rho$  представлены на рис. 1—4. На графиках по

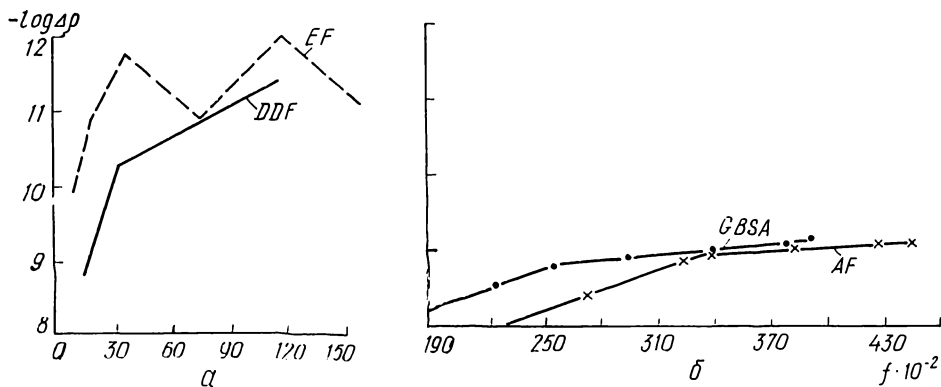


Рис. 1. Погрешности траекторных вычислений в конце двухсуточного интервала времени (полуось орбиты  $a = 7\,600$  км)

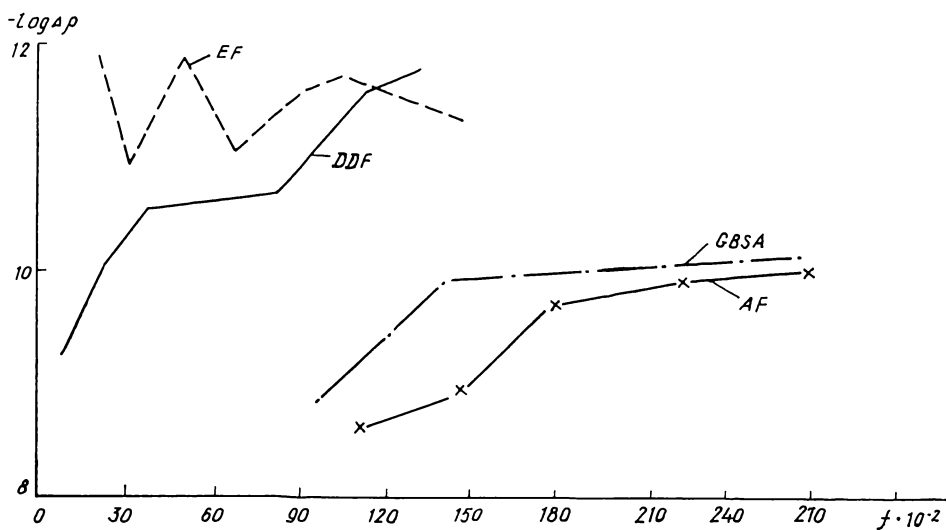


Рис. 2. Погрешности траекторных вычислений в конце двухсуточного интервала времени (полуось орбиты  $a = 12\,200$  км)

осям ординат приведены отрицательные десятичные логарифмы разностей  $\Delta\rho$ , а по осям абсцисс — количества обращений к правым частям уравнений, определяющие основной расход машинного времени.

Сравнение погрешностей различных методов интегрирования показывает, что в конце двухсуточного интервала времени наиболее эффективные траекторные оценки могут быть получены методом Эверхарта. В данном случае высокие точности, по-видимому, обусловлены тем, что конец последнего шага интегрирования с помощью программы *EF* совпадает с концом двухсуточного интервала. Известно [11, с. 134], что в конце любого шага неявные методы (в их числе и метод Эверхарта с другими интеграторами).

\* В программе *EF* параметр точности  $\varepsilon_i$  задает величину отношения члена наивысшего порядка степенного ряда к среднему значению решения на шаге интегрирования. Он введен нами для обеспечения возможности автоматического сравнения метода Эверхарта с другими интеграторами.

харта), использующие специальное (гауссово) распределение  $k$  подшагов, позволяют получать решение с малой погрешностью порядка  $O(H^{2k+1})$ . К сожалению, достижимая точность не выдерживается на всей длине шага интегрирования. Погрешности оценок решения во внутришаговых точках всегда будут грубее, чем погрешности в конце шага, поскольку интерполяционный полином, построенный по имеющимся  $k$  оценкам производной на шаге интегрирования, не может, вообще

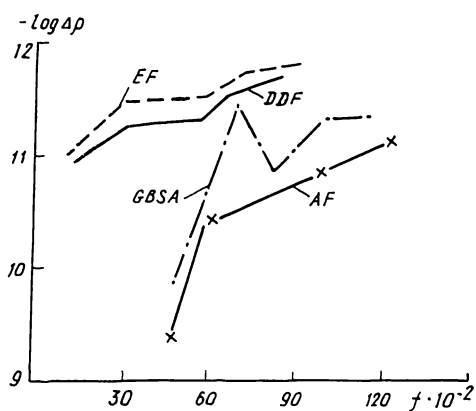


Рис. 3. Погрешности траекторных вычислений в конце двухсуточного интервала времени (полуось орбиты  $a=25600$  км)

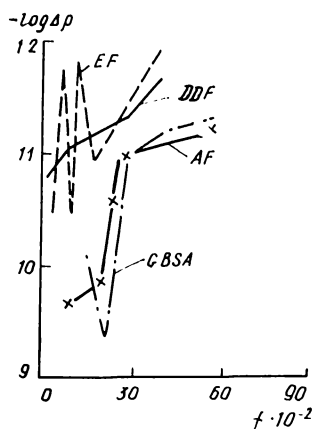


Рис. 4. Погрешности траекторных вычислений в конце двухсуточного интервала времени (полуось орбиты  $a=46000$  км)

говоря, гарантировать порядок точности выше, чем  $O(H^{k+1})$ . К тому же любая из  $k$  оценок на подшагах также отягощена погрешностью порядка  $O(H^{k+1})$  (в случае размещения подшагов в соответствии с критерием Гаусса—Радона).

Современные разностные алгоритмы свободны от этих особенностей, благодаря чему они позволяют вычислять решение с одинаковыми погрешностями в любой точке на шаге интегрирования без каких-либо помех процессу вычислений. Именно поэтому их можно рекомендовать для обработки рядов наблюдений ИСЗ. Накопленный практический опыт, в частности применение программы DDF при анализе данных оптических локаций ИСЗ «Lageos», полученных в ходе международного эксперимента МЕРИТ [14], подтверждает справедливость такой рекомендации.

Результаты вычислений показывают, что алгоритм, основанный на разделенных разностях, обеспечивает возможность получения траекторных оценок в конце двухсуточного интервала практически за то же время, что и алгоритм Эверхарта.

Однако при этом разности  $\Delta p$ , вычисленные с помощью программы DDF, оказываются в случае низких орбит в два-три раза больше соответствующих разностей, полученных с программой EF. Алгоритмы Гира и Грэгга—Булирша—Штера дают для этих орбит еще большие значения  $\Delta p$  в конце двухсуточного интервала (на один-два порядка). С увеличением высоты орбиты оценки погрешностей решения сингулярных (ньютоновских) уравнений всеми четырьмя методами сближаются, эффективность методов возрастает, вследствие возрастания гладкости возмущающей функции (правой части уравнения). Это позволяет заключить, что определение с требуемой точностью высоких, почти круговых орбит геодинимических ИСЗ, по-видимому, возможно на основе систем сингулярных (ньютоновских) уравнений движения.

При изучении моделей почти кругового движения близких к Земле геодезических ИСЗ мы рассмотрели на основании общего принципа чис-

ленных расчетов, сформулированного в [12, с. 66], также и системы регуляризованных уравнений.

В таблице приведены в логарифмической шкале погрешности (разности «вперед» — «обратно») интегрирования всех рассматриваемых систем уравнений возмущенного движения (в порядке, представленном выше в п. 2) на интервале времени 30 обращений геодезического ИСЗ. Сравнение приведенных результатов показывает, что, по-видимому, наиболее эффективны сочетания систем уравнений в регулярных элементах с одним из рассматриваемых методов интегрирования. В случае низких орбит геодезических ИСЗ оценки траекторий в конце указанного интервала на основе систем уравнений в регулярных элементах на два и более порядка точнее соответствующих оценок решений систем ньютоновских уравнений и, кроме того, на 10—20 % экономичнее в смысле расхода времени ЭВМ.

**Погрешности решений сингулярных (ньютоновских) и регуляризованных уравнений движения ИСЗ ( $a=7800$  км,  $e=0.02$ )**

| Программы численного интегрирования | $-\log \epsilon_i^*$ | Сингулярные уравнения<br>$-\log \Delta p$ | Регуляризованные уравнения |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|-------------------------------------|----------------------|---|----------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|                                     |                      |   | $-\log \Delta p$           | $-\log \Delta t$ | $-\log \Delta p$ | $-\log \Delta t$ | $-\log \Delta p$ | $-\log \Delta t$ | $-\log \Delta p$ | $-\log \Delta t$ |
| <i>GBSF</i>                         | 10                   | 7.5                                       | 7.8                        | 9.0              | 7.7              | 9.2              | 8.0              | 9.5              | 10.5             | 11.7             |
| <i>GBSF</i>                         | 12                   | 7.5                                       | 7.7                        | 8.5              | 7.7              | 8.9              | 7.9              | 9.2              | 10.8             | 12.4             |
| <i>GBSA</i>                         | 10                   | 8.7                                       | 9.0                        | 10.1             | 9.1              | 10.4             | 9.2              | 10.1             | 11.5             | 12.6             |
| <i>EF</i>                           | 12                   | 11.1                                      | 11.4                       | 12.5             | 11.3             | 12.0             | 11.4             | 13.0             | 13.1             | 13.9             |
| <i>AF</i>                           | 12                   | 8.6                                       | 8.8                        | 9.7              | 9.0              | 10.3             | 9.2              | 10.7             | 11.5             | 12.6             |
| <i>AF</i>                           | 14                   | 8.7                                       | 8.9                        | 10.3             | 8.9              | 9.7              | 9.1              | 10.8             | 11.6             | 13.0             |
| <i>DDF</i>                          | 12                   | 10.5                                      | 10.8                       | 12.0             | 10.9             | 12.2             | 11.1             | 12.4             | 12.8             | 13.7             |
| <i>DDF</i>                          | 14                   | 11.0                                      | 11.3                       | 12.3             | 11.4             | 12.4             | 11.5             | 12.8             | 13.0             | 14.0             |
| <i>BF</i>                           | 12                   | —   | —                          | —                | 11.5             | 12.7             | 11.5             | 12.6             | —                | —                |
| <i>BF</i>                           | 14                   | —   | —                          | —                | 11.5             | 12.3             | 11.7             | 13.3             | —                | —                |

\* Во втором столбце приведены значения отрицательного десятичного логарифма параметра точности  $\epsilon_j$ .

При анализе наблюдений ИСЗ следует, однако, иметь в виду, что оценки траекторий с помощью регуляризованных уравнений могут содержать дополнительные ошибки, обусловленные процедурами «восстановления» времени и обратного интерполирования. Погрешности решений систем уравнений с выделенными в явном виде полной энергией и временным элементом с помощью модифицированного метода Беттиса (программа *BF*) существенно меньше погрешностей любых вариантов решений сингулярных уравнений, приведенных в таблице.

В заключение следует отметить, что ограниченная длина разрядной сетки, по-видимому, обуславливает существенную зависимость точности решения от типа компилятора ЭВМ. Так, программа *GBSA*, реализованная на машинном языке низкого уровня (АССЕМБЛЕР), обеспечивает примерно на порядок более точное решение, чем такая же программа на языке ФОРТРАН (*GBSF*).

1. Адоладов Г. П., Малютина Л. В., Черников А. Я. Стандартные программы для интегрирования систем дифференциальных уравнений движения ИСЗ.— Геодезия и картография, 1979, № 10, с. 15—18.
2. Бордовицына Т. В., Сухоплюева Л. Е. Исследование эффективности численных алгоритмов, использующих стабилизирующие преобразования.— Бюл. Ин-та теорет. астрономии АН СССР, 1980, 14, с. 591—596.
3. Бордовицына Т. В., Шарковский Н. А., Федяев Ю. А. Современные численные методы в задачах прогнозирования движения ИСЗ.— В кн.: Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. Новосибирск: НИИГАиК, 1980, с. 24—44.

4. *Бордовицына Т. В.* Методы Рунге — Кутта высоких порядков и стабилизирующие преобразования в задачах прогнозирования движения ИСЗ.— Косм. исслед., 1981, 19, с. 941—943.
5. *Кузнецов С. В.* Экспериментальное исследование эффективности некоторых современных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ.— В кн.: Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. Новосибирск: НИИГАНК, 1980, с. 57—63.
6. *Макарова Е. Н., Никольская Т. К.* Прогнозирование движения ИСЗ экстраполяционным методом.— Бюл. Ин-та теорет. астрономии АН СССР, 1976, 14, с. 210—214.
7. *Макарова Е. Н.* О численном интегрировании уравнений движения ИСЗ в случае орбит с большими эксцентриситетами.— Там же, 1979, 14, с. 486—489.
8. *Степин Ю. Д., Сорокин Н. А.* Сравнение высокоточных методов численного интегрирования.— Науч. информ. Астроном. совета АН СССР, 1981, вып. 48, с. 18—28.
9. *Тарадий В. К., Цесис М. Л.* Численное определение траекторий ИСЗ методом Адамса переменного порядка. I.— Астрометрия и астрофизика, 1984, вып. 53, с. 56—65.
10. *Тарасевич С. В.* Программы RADA-19 и RADA-27 эффективного численного интегрирования с высокой точностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений I и II порядков.— Алгоритмы небес. механики, 1975, № 45.
11. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
12. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика.— М.: Наука, 1975.— 303 с.
13. *Яцкив Я. С.* Международный проект «МЕРИТ».— Киев, 1981.— 43 с. Препринт / (Ин-т теоретической физики АН УССР; ИТФ—81—124Р).
14. *Яцкив Я. С., Тарадий В. К., Цесис М. Л. и др.* Вращение Земли по данным наблюдений ИСЗ «Lageos».— Набл. искусств. спутников Земли, 1984, вып. 21, с. 460—466.
15. *Bettis C. G.* Stabilization of finite difference methods of numerical integration.— Celest. mech., 1970, 2, p. 280—295.
16. *Bulirsch R., Stoer J.* Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods.— Numer. Math., 1966, 8, p. 1—13.
17. *Everhart E. P.* Implicit single-sequence methods, for integrating orbits.— Celest. mech., 1974, 10, p. 35—55.
18. *Gear C. W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations.— New Jersey: Prentice—Hall, 1971.— 293 p.
19. *Moore H.* Comparison of numerical integration techniques for orbital applications.— Lecture Notes Math., 1974, 362, p. 149—167.

Главная астрономическая обсерватория АН УССР,  
Киев

Поступила в редакцию  
16.07.1984