

УДК 521.8/9:520.8

Об одном возможном способе обработки измерений астрофотографий

Я. С. Яцкив, А. Н. Курьянова

Основываясь на известной в математической статистике схеме конфлюентного анализа, предложен метод совместного определения постоянных пластинки и поправок координат опорных звезд при обработке астрофотографий. Метод проиллюстрирован на модели астрофотографии.

ON A POSSIBLE ASTROMETRIC METHOD OF REDUCING STAR PLATES, by Yatskiv Ya. Kur'yanova A. N.—The scheme of confluent analysis known in the mathematical statistics is used as a basis when suggesting method of reducing star plates in which the plate constants and the corrections to the spherical star coordinates are the adjustment parameters. Method is tested using the model of star plates.

Постановка задачи. В практике работ по фотографической астрометрии используются различные способы обработки астрофотографий [1]. Общим для них является то, что в каждом конкретном случае приходится решать следующие две задачи:

а) установление вида зависимости между сферическими координатами звезд (или величинами им эквивалентными) и измеренными координатами изображений звезд на пластинке, пленке и т. п.— задача выбора модели астрофотографии;

б) нахождение оценок параметров принятой модели астрофотографии и оценка точности результатов — задача оценивания параметров модели.

В данной работе нас интересует вторая задача. Предположим, что нам удалось каким-либо способом исключить влияние тех факторов, которые приводят к отличиям модели астрофотографии от линейной. Пусть

$$x = aX + bY + c; \tag{1}$$

$$y = dX + eY + f$$

или

$$X = a'x + b'y + c'; \tag{1a}$$

$$Y = d'x + e'y + f',$$

где X , Y и x , y — т. н. идеальные и измеренные координаты звезд соответственно.

Традиционно, в работах по фотографической астрометрии находят оценки параметров \hat{a} , \hat{b} и т. д. в случае модели (1) (или параметров \hat{a}' , \hat{b}' и т. д. в случае модели (1a)), предполагая, что значения независимых переменных являются безошибочными. На самом деле как идеальные координаты X , Y , так и измеренные x , y содержат систематические и случайные ошибки

$$x = x_r + \xi_x, \quad y = y_r + \eta_y;$$

$$X = X_r + \xi_X, \quad Y = Y_r + \eta_Y,$$

где x_r , y_r и X_r , Y_r — истинные значения измеренных и идеальных координат звезд соответственно.

Теперь задачу оценивания параметров модели (1) можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях, налагае-

мых на распределение ошибок ξ_x , η_y , ξ_x и η_y , найти состоятельные и несмещенные оценки параметров модели (1), а также поправки к идеальным координатам звезд. Последние могут улучшить положения звезд только в случайном отношении, так как систематические ошибки на таких ограниченных участках небесной сферы можно считать постоянными и они не могут быть отделены от параметров модели (1). Так решается задача обработки измерений астрофотографий в т. н. методе перекрывающихся пластинок [3].

Рассмотрим эту задачу, основываясь на известной в математической статистике схеме конфлюентного анализа [2], в предположении, что ошибки измеренных и идеальных координат распределены нормально с параметрами

$$\xi_x \in N(0, \sigma_x), \quad \eta_y \in N(0, \sigma_y);$$

$$\xi_x \in N(0, \sigma_x), \quad \eta_y \in N(0, \sigma_y),$$

а также что они не зависимы между собой и друг с другом

$$\text{cov}(\xi_x^i \xi_x^j) = \text{cov}(\eta_y^i \eta_y^j) = \text{cov}(\xi_x^i \xi_x^j) = \text{cov}(\eta_y^i \eta_y^j) = 0, \quad \text{для } i \neq j$$

$$\text{cov}(\xi_x^i \eta_y^j) = \text{cov}(\xi_x^i \xi_x^j) = \text{cov}(\xi_x^i \eta_y^j) = \text{cov}(\eta_y^i \xi_x^j) = \text{cov}(\eta_y^i \eta_y^j) = 0, \quad \text{для всех } i, j.$$

Метод решения задачи. Для нахождения оценок параметров \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} , \hat{e} , \hat{f} и истинных (в указанном выше смысле) значений идеальных координат $\hat{X}_{r,i}$, $\hat{Y}_{r,i}$ воспользуемся методом максимума правдоподобия. Легко показать, что проблема сводится к нахождению минимума выражений

$$\sum_i P_{x_i} (x_i - \hat{x}_{r,i})^2 + \sum_i P_{X_i} (X_i - \hat{X}_{r,i})^2 + \sum_i P_{Y_i} (Y_i - \hat{Y}_{r,i})^2 = \min, \quad (2)$$

$$\sum_i P_{y_i} (y_i - \hat{y}_{r,i})^2 + \sum_i P_{X_i} (X_i - \hat{X}_{r,i})^2 + \sum_i P_{Y_i} (Y_i - \hat{Y}_{r,i})^2 = \min, \quad (3)$$

где $P_{x_i} = \sigma_{x_i}^{-2}$, $P_{y_i} = \sigma_{y_i}^{-2}$, $P_{X_i} = \sigma_{X_i}^{-2}$, $P_{Y_i} = \sigma_{Y_i}^{-2}$.

Из условий (2) и (3) находим следующую систему условных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_i P_{x_i} (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \hat{X}_{r,i} &= 0, \\ \sum_i P_{x_i} (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \hat{Y}_{r,i} &= 0, \\ \sum_i P_{x_i} (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) &= 0, \\ P_{x_i} (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \hat{a} + P_{X_i} (X_i - \hat{X}_{r,i}) &= 0, \\ P_{x_i} (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \hat{b} + P_{Y_i} (Y_i - \hat{Y}_{r,i}) &= 0, \\ \sum_i P_{y_i} (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) \hat{X}_{r,i} &= 0, \\ \sum_i P_{y_i} (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) \hat{Y}_{r,i} &= 0, \\ \sum_i P_{y_i} (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) &= 0, \\ P_{y_i} (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) \hat{d} + P_{X_i} (X_i - \hat{X}_{r,i}) &= 0, \\ P_{y_i} (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) \hat{e} + P_{Y_i} (Y_i - \hat{Y}_{r,i}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$B_i = \frac{\partial X_i}{\partial \delta_i} = \frac{-\sin \delta_0 \sin (\alpha_i - \alpha_0)}{Z_i^2},$$

$$C_i = \frac{\partial Y_i}{\partial (\alpha_i \cos \delta_i)} = \frac{\sin \delta_i \sin (\alpha_i - \alpha_0)}{Z_i^2},$$

$$D_i = \frac{\partial Y_i}{\partial \delta_i} = \frac{\cos (\alpha_i - \alpha_0)}{Z_i^2}$$

$$Z_i = \sin \delta_i \sin \delta_0 + \cos \delta_i \cos \delta_0 \cos (\alpha_i - \alpha_0).$$

Численный пример. Изложенная методика обработки астрофотографий была испытана на следующей простой модели. В равномерной

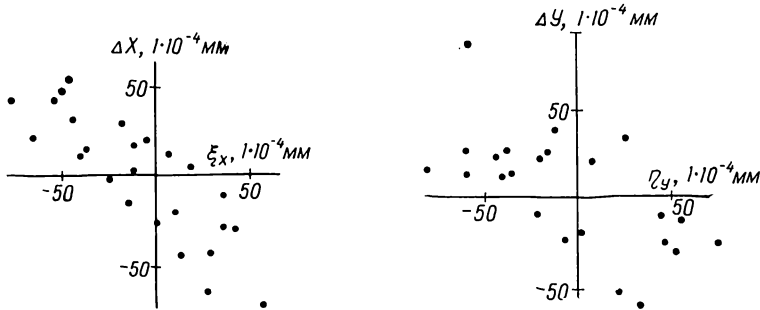


Рис. 1. Зависимость вычислительных поправок координат (ΔX_i) звезд опорного каталога от заданных значений случайной последовательности ξ_x для случая $k=0.20$

Рис. 2. Зависимость вычисленных поправок координат (ΔY_i) звезд опорного каталога от заданных значений случайной последовательности η_y для случая $k=0.20$

сетке через 2° были заданы звезды с известными измеренными координатами. Затем, считая известными значения a', b', c' и т. д., находили идеальные координаты тех же звезд. К таким измеренным и идеальным координатам (принимаются как истинные) добавляли случайный нормальный шум с различными значениями $\sigma_x = \sigma_y$ и постоянным $\sigma_x = \sigma_y = 0.21''$. Этим данным соответствуют различные значения k :

$$\text{Значения } k = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} \text{ для } \sigma_x = 0.21''$$

| | | | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| σ_x'' | 0.27 | 0.33 | 0.41 | 0.46 | 0.54 | 0.66 | 0.94 | 2.06 |
| k | 0.60 | 0.40 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.01 |

На первом шаге решения системы уравнений (5) принималось

$$X_{r,i}^{(0)} = X_i, \quad Y_{r,i}^{(0)} = Y_i,$$

а значения $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ находили из решения системы уравнений типа (1). Из решения уравнений (5) находили поправки $\Delta a_0, \Delta b_0$ и т. д., а также ΔX_i и ΔY_i . В качестве критерия значимости поправки принято условие:

$$\left| \frac{\sigma_z}{z} \right| \leq 0.4.$$

Для рассматриваемого примера значимых поправок к параметрам модели не было, а значения поправок ΔX_i и ΔY_i для случая $k=0.20$ показаны на рис. 1 и 2 соответственно, где по оси абсцисс отложены значения заданных случайных величин ξ_{x_i} и η_{y_i} . Из рис. 1 и 2 следует, что метод обработки позволяет получить близкие к реальным поправки координат звезд.

Определим значения $P^* = \frac{P_X^* + P_Y^*}{2}$, характеризующие отношение дисперсии, вычисленной по уклонениям полученных в результате обработки координат $\hat{X}_{r,i}, \hat{Y}_{r,i}$ от «истинных» значений $X_{r,i}, Y_{r,i}$ к известной дисперсии σ_X^2, σ_Y^2 .

$$P_X^* = \frac{D\{X\}}{\sigma_X^2}, \quad P_Y^* = \frac{D\{Y\}}{\sigma_Y^2},$$

где

$$D\{X\} = \frac{\sum_i (\hat{X}_{r,i} - X_{r,i})^2}{n}, \quad D\{Y\} = \frac{\sum_i (\hat{Y}_{r,i} - Y_{r,i})^2}{n}.$$

Во всех случаях оказалось, что $D\{X\} < \sigma_X^2, D\{Y\} < \sigma_Y^2$. Зависимость P^* от k представлена на рис. 3. Если ограничиться условием $P^* \leq 0.65$, то можно считать, что когда дисперсии ошибок измеренных координат в

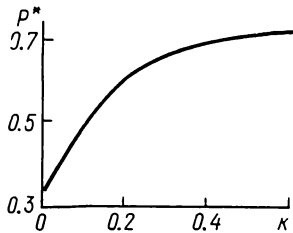


Рис. 3. Изменение отношения дисперсии уточненных координат к ее заданному значению для различных k

четыре и более раз меньше дисперсий ошибок идеальных координат, т. е. $k \leq 0.25$, предложенный способ уточнения координат опорных звезд может применяться в практике обработки астрофотографий. Например, по снимкам, полученным на ДША ГАО АН УССР ($F=2000$ мм, $m=103''/\text{мм}$), при условии, что измерения ведутся с точностью около ± 2 мкм и отсутствуют другие источники ошибок, можно уточнять положения звезд в каталогах, точность которых на эпоху наблюдений составляет около $\pm 0.5''$. Априорные оценки параметра k для различных типов астрографов при условии, что ошибка измерений составляет ± 2 мкм, приведены в табл. 2.

Таблица 2. Оценки параметра k для различных типов астрографов

| F (мм) | m (″/мм) | $\sigma_x'' = \sigma_y''$ | k | |
|----------|------------|---------------------------|--|--|
| | | | $\sigma_X'' = \sigma_Y'' = \pm 0.20''$ | $\sigma_X'' = \sigma_Y'' = \pm 0.45''$ |
| 2000 | 103.1 | ± 0.206 | 1.06 | 0.21 |
| 2500 | 82.5 | 0.164 | 0.67 | 0.13 |
| 3000 | 68.8 | 0.138 | 0.48 | 0.09 |
| 3500 | 58.9 | 0.118 | 0.34 | 0.07 |
| 4000 | 51.6 | 0.104 | 0.27 | 0.05 |
| 4500 | 45.8 | 0.092 | 0.21 | 0.04 |

Примечание: F — фокусное расстояние, m — масштаб, $\sigma_x'' = \sigma_y''$ — ошибки измеренных координат при точности измерений ± 2 мкм.

Заключение. Предложенный нами способ совместного определения параметров, характеризующих заданную модель астрофотографии, а также поправок координат опорного каталога может применяться в практике работ по фотографической астрометрии при определении координат тел Солнечной системы, калибровке астрофотографических инструментов и создании астрофотографических каталогов звезд. Од-

нако для окончательной оценки достоинств и недостатков метода необходимо его испытание на более совершенных математических моделях астрофотографий и реальных наблюдениях. Более того, требует дальнейшего изучения вопрос о выборе оптимального значения k в предложенном способе решения задачи с учетом априорных сведений о точностях используемого опорного каталога, измерительного прибора и принятой модели для описания связи измеренных и идеальных координат звезд.

Приложение

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 (x_1 - 2\hat{a}\hat{X}_{r,1} - \hat{b}\hat{Y}_{r,1} - \hat{c}) \dots (x_i - 2\hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \dots (x_n - 2\hat{a}\hat{X}_{r,n} - \hat{b}\hat{Y}_{r,n} - \hat{c}) \\
 -\hat{a}\hat{Y}_{r,1} & -\hat{a}\hat{Y}_{r,i} & -\hat{a}\hat{Y}_{r,n} \\
 -\hat{a} & -\hat{a} & -\hat{a} \\
 -(\hat{a}^2 + k) & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -(\hat{a}^2 + k) & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & & 0 & & -(\hat{a}^2 + k) \\
 -\hat{a}\hat{b} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & & -\hat{a}\hat{b} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & & 0 & & -\hat{a}\hat{b} \\
 (y_1 - 2\hat{d}\hat{X}_{r,1} - \hat{e}\hat{Y}_{r,1} - \hat{f}) \dots (y_i - 2\hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f}) \dots (y_n - 2\hat{d}\hat{X}_{r,n} - \hat{e}\hat{Y}_{r,n} - \hat{f}) \\
 -\hat{d}\hat{Y}_{r,1} & -\hat{d}\hat{Y}_{r,i} & -\hat{d}\hat{Y}_{r,n} \\
 -\hat{d} & -\hat{d} & -\hat{d} \\
 -(\hat{d}^2 + k) & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -(\hat{d}^2 + k) & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & & 0 & & -(\hat{d}^2 + k) \\
 -\hat{d}\hat{e} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & & -\hat{d}\hat{e} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & -\hat{d}\hat{e}
 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
 -\widehat{b}\widehat{X}_{r,1} & & -\widehat{b}\widehat{X}_{r,i} & \dots & -\widehat{b}\widehat{X}_{r,n} \\
 (x_1 - \widehat{a}\widehat{X}_{r,1} - 2\widehat{b}\widehat{Y}_{r,1} - \widehat{c}) & \dots & (x_i - \widehat{a}\widehat{X}_{r,i} - 2\widehat{b}\widehat{Y}_{r,i} - \widehat{c}) & \dots & (x_n - \widehat{a}\widehat{X}_{r,n} - 2\widehat{b}\widehat{Y}_{r,n} - \widehat{c}) \\
 -\widehat{b} & \dots & -\widehat{b} & \dots & -\widehat{b} \\
 -\widehat{a}\widehat{b} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -\widehat{a}\widehat{b} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & -\widehat{a}\widehat{b} \\
 -(\widehat{b}^2 + k) & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -(\widehat{b}^2 + k) & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & -(\widehat{b}^2 + k) \\
 -\widehat{e}\widehat{X}_{r,1} & \dots & -\widehat{e}\widehat{X}_{r,i} & \dots & -\widehat{e}\widehat{X}_{r,n} \\
 (y_1 - \widehat{d}\widehat{X}_{r,1} - 2\widehat{e}\widehat{Y}_{r,1} - \widehat{f}) & \dots & (y_i - \widehat{d}\widehat{X}_{r,i} - 2\widehat{e}\widehat{Y}_{r,i} - \widehat{f}) & \dots & (y_n - \widehat{d}\widehat{X}_{r,n} - 2\widehat{e}\widehat{Y}_{r,n} - \widehat{f}) \\
 -\widehat{e} & \dots & -\widehat{e} & \dots & -\widehat{e} \\
 -\widehat{d}\widehat{e} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -\widehat{d}\widehat{e} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & -\widehat{d}\widehat{e} \\
 -(\widehat{e}^2 + k) & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & -(\widehat{e}^2 + k) & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & -(\widehat{e}^2 + k)
 \end{pmatrix}$$

C =

| | | | | | |
|--|--|-------------------------|--|--|-------------------------|
| $-\sum_i \hat{X}_{r,i}^2$ | $-\sum_i \hat{X}_{r,i} \hat{Y}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{X}_{r,i}$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\sum_i \hat{X}_{r,i} \hat{Y}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}^2$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\sum_i \hat{X}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}$ | $-n$ | 0 | 0 | 0 |
| $(x_1 - 2\hat{a}\hat{X}_{r,1} - \hat{b}\hat{Y}_{r,1} - \hat{c})$ | $-\hat{a}\hat{Y}_{r,1}$ | $-\hat{a}$ | 0 | 0 | 0 |
| $(x_i - 2\hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})$ | $-\hat{a}\hat{Y}_{r,i}$ | $-\hat{a}$ | 0 | 0 | 0 |
| $(x_n - 2\hat{a}\hat{X}_{r,n} - \hat{b}\hat{Y}_{r,n} - \hat{c})$ | $-\hat{a}\hat{Y}_{r,n}$ | $-\hat{a}$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\hat{b}\hat{X}_{r,1}$ | $(x_1 - \hat{a}\hat{X}_{r,1} - 2\hat{b}\hat{Y}_{r,1} - \hat{c})$ | $-\hat{b}$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\hat{b}\hat{X}_{r,i}$ | $(x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - 2\hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})$ | $-\hat{b}$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\hat{b}\hat{X}_{r,n}$ | $(x_n - \hat{a}\hat{X}_{r,n} - 2\hat{b}\hat{Y}_{r,n} - \hat{c})$ | $-\hat{b}$ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-\sum_i \hat{X}_{r,i}^2$ | $-\sum_i \hat{X}_{r,i} \hat{Y}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{X}_{r,i}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-\sum_i \hat{X}_{r,i} \hat{Y}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}^2$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-\sum_i \hat{X}_{r,i}$ | $-\sum_i \hat{Y}_{r,i}$ | $-\hat{n}$ |
| 0 | 0 | 0 | $(y_1 - 2\hat{d}\hat{X}_{r,1} - \hat{e}\hat{Y}_{r,1} - \hat{f})$ | $-\hat{d}\hat{Y}_{r,1}$ | $-\hat{d}$ |
| 0 | 0 | 0 | $(y_i - 2\hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f})$ | $-\hat{d}\hat{Y}_{r,i}$ | $-\hat{d}$ |
| 0 | 0 | 0 | $(y_n - 2\hat{d}\hat{X}_{r,n} - \hat{e}\hat{Y}_{r,n} - \hat{f})$ | $-\hat{d}\hat{Y}_{r,n}$ | $-\hat{d}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-\hat{e}\hat{X}_{r,1}$ | $(y_1 - \hat{d}\hat{X}_{r,1} - 2\hat{e}\hat{Y}_{r,1} - \hat{f})$ | $-\hat{e}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-\hat{e}\hat{X}_{r,i}$ | $(y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - 2\hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f})$ | $-\hat{e}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-\hat{e}\hat{X}_{r,n}$ | $(y_n - \hat{d}\hat{X}_{r,n} - 2\hat{e}\hat{Y}_{r,n} - \hat{f})$ | $-\hat{e}$ |

$$\begin{aligned}
 F_0 = & \sum_i (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})\hat{X}_{r,i} \\
 & \sum_i (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})\hat{Y}_{r,i} \\
 & \sum_i (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c}) \\
 & (x_1 - \hat{a}\hat{X}_{r,1} - \hat{b}\hat{Y}_{r,1} - \hat{c})\hat{a} + k(X_1 - \hat{X}_{r,1}) \\
 & \dots \\
 & (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})\hat{a} + k(X_i - \hat{X}_{r,i}) \\
 & \dots \\
 & (x_n - \hat{a}\hat{X}_{r,n} - \hat{b}\hat{Y}_{r,n} - \hat{c})\hat{a} + k(X_n - \hat{X}_{r,n}) \\
 & (x_1 - \hat{a}\hat{X}_{r,1} - \hat{b}\hat{Y}_{r,1} - \hat{c})\hat{b} + k(Y_1 - \hat{Y}_{r,1}) \\
 & \dots \\
 & (x_i - \hat{a}\hat{X}_{r,i} - \hat{b}\hat{Y}_{r,i} - \hat{c})\hat{b} + k(Y_i - \hat{Y}_{r,i}) \\
 & \dots \\
 & (x_n - \hat{a}\hat{X}_{r,n} - \hat{b}\hat{Y}_{r,n} - \hat{c})\hat{b} + k(Y_n - \hat{Y}_{r,n}) \\
 & \sum_t (y_t - \hat{d}\hat{X}_{r,t} - \hat{e}\hat{Y}_{r,t} - \hat{f})\hat{X}_{r,t} \\
 & \sum_i (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f})\hat{Y}_{r,i} \\
 & \sum_t (y_t - \hat{d}\hat{X}_{r,t} - \hat{e}\hat{Y}_{r,t} - \hat{f}) \\
 & (y_1 - \hat{d}\hat{X}_{r,1} - \hat{e}\hat{Y}_{r,1} - \hat{f})\hat{d} + k(X_1 - \hat{X}_{r,1}) \\
 & \dots \\
 & (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f})\hat{d} + k(X_i - \hat{X}_{r,i}) \\
 & \dots \\
 & (y_n - \hat{d}\hat{X}_{r,n} - \hat{e}\hat{Y}_{r,n} - \hat{f})\hat{d} + k(X_n - \hat{X}_{r,n}) \\
 & (y_1 - \hat{d}\hat{X}_{r,1} - \hat{e}\hat{Y}_{r,1} - \hat{f})\hat{e} + k(Y_1 - \hat{Y}_{r,1}) \\
 & \dots \\
 & (y_i - \hat{d}\hat{X}_{r,i} - \hat{e}\hat{Y}_{r,i} - \hat{f})\hat{e} + k(Y_i - \hat{Y}_{r,i}) \\
 & \dots \\
 & (y_n - \hat{d}\hat{X}_{r,n} - \hat{e}\hat{Y}_{r,n} - \hat{f})\hat{e} + k(Y_n - \hat{Y}_{r,n})
 \end{aligned}$$

1. Бугославская Е. Я. Фотографическая астрометрия.— М.—Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947,—296 с.
2. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.—899 с.
3. Eichhorn H. Über die Reduktion von photographischen Sternpositionen und Eigenbewegungen.— Astron. Nachr., 1960, 285, (heft 5/6), S. 233.