КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ №1 1985

УДК 521.95

Совместное определение системы инструмента и поправок координат звезд

П. Ф. Лазоренко

Рассмотрены способы составления абсолютных и относительных каталогов с определением всех неизвестных параметров методом наименьших квадратов.

COMBINED DETERMINATION OF THE INSTRUMENTAL SYSTEM AND CORRECTIONS FOR STELLAR COORDINATES, by Lazorenko P. F.— Some procedures are considered for compiling the absolute and differential catalogues using the least square method for determination of all unknown parameters.

Обработка наблюдений на классических меридианных инструментах, с целью составления каталогов звездных положений, обычно выполняется методами, разработанными еще до создания современных вычислительных машин. Эти методы математически недостаточно строги. Возьмем к примеру составление относительного каталога склонений по наблюдениям на вертикальном круге. Составление такого каталога требует определения параметров инструмента в отдельные вечера (ход наблюдаемых широт со временем и зенитным расстоянием), системы инструмента и поправки к предварительным координатам звезд. Перечисленные здесь величины определяют в несколько этапов, на каждом из которых отыскивают лишь часть неизвестных. Пренебрежение корреляционными связями между искомыми величинами приводит к недостаточно точному решению всей задачи построения каталога. Между тем можно получить строгое решение задачи.

Начнем с момента, когда в зенитные расстояния z введены все известные инструментальные поправки и по видимым склонениям вычислены наблюдаемые широты φ. Пусть Δ — ошибка каталожного склонения звезды, n — количество ее наблюдений, S_j — система инструмента в зоне j, т. е. разность «лично-инструментальной системы» и системы опорного каталога, Φ^i — широта места, вычисленная по наблюдениям ряда i. Условимся в дальнейшем верхние индексы i, l всегда относить к порядковому номеру ряда, нижние j, q — к номеру зоны склонений. Нижние индексы k, m — указывают номер звезды, который для опорных звезд принимает значения от 1 до R, для определяемых от $R+1$ до $Q=R+P$, где R и P — количество опорных и определяемых звезд. Пусть $\varphi_k{}^i$ — широта места, вычисленная по наблюдениям звезды k, находящейся в зоне j. В нашей модели предположим, что $\varphi_k{}^i$ с точностью до случайной ошибки наблюдений допускает следующее формализованное представление:

$$\varphi_k^i = \theta^i + \Phi^i + S_j + \Delta_k, \tag{1}$$

$i=1, \dots I,$ $j=1, \dots J;$ I и J — количество рядов наблюдений и зон склонений. Введенная здесь функция $\theta^i(t, z)$ описывает зависимость наблюдаемых широт ряда i от времени t и зенитного расстояния z. Если параметры инструмента в течение ночи достаточно постоянны, θ можно искать в виде

$$\theta^i = a^i t + b^i \sin z, \tag{2}$$

где b — неисключенное гнутие; в противном случае учитывают члены, пропорциональные t^2, t^3 и $t \sin z$. Δ_k включены в (1) и для опорных звезд. Формально эти Δ_k — ошибки опорного каталога, фактически же их происхождение связано с неточным знанием ошибок делений лимба. Включение в (1) Δ_k для всех звезд позволяет рассматривать $\varphi_k{}^i$ как независимые случайные величины с математическим ожиданием $\theta^i + \Phi^i + S_j + \Delta_k$, отражающим зависимость $\varphi_k{}^i$ от индексов. Допустим, что уравнения (1) равноточны и воспользуемся методом наименьших квадратов. Запишем нормальную систему уравнений с $3I+J+Q$ неизвестными a^i, b^i, Φ^i, S_j, Δ_k:

$$n^i\Phi^i + \sum_j n_j^i S_j + \sum_k \lambda_k^i (\Delta_k + b^i \sin z_k) = \sum_k \lambda_k^i \varphi_k^i; \tag{3}$$

$$n_j S_j + {\sum_{i,k}}' \lambda_k^i (\Phi^i + b^i \sin z_k + a^i t_k^i + \Delta_k) = {\sum_{i,k}}' \lambda_k^i \varphi_k^i; \tag{4}$$

$$b^i \sum_k \lambda_k^i \sin^2 z_k + {\sum_{j,k}}' S_j \lambda_k^i \sin z_k + \sum_k \lambda_k^i \sin z_k (\Phi^i + \Delta_k + a^i t_k^i) =$$
$$= \sum_k \lambda_k^i \varphi_k^i \sin z_k; \tag{5}$$

$$a^i \sum_k \lambda_k^i (t_k^i)^2 + \sum_j S_j {\sum_k}' \lambda_k^i t_k^i + \sum_k \lambda_k^i t_k^i (\Delta_k + b^i \sin z_k) = \sum_k \lambda_k^i \varphi_k^i t_k^i; \tag{6}$$

$$\Delta_k n_k + S_j n_k + \sum_i \lambda_k^i (\Phi^i + b^i \sin z_k + a^i t_k^i) = \sum_i \lambda_k^i \varphi_k^i, \tag{7}$$

$i = 1, \ldots I$; $j = 1, \ldots J$; $k = 1, \ldots Q$. Параметр λ_k^i равен 1 или 0 в зависимости от того, наблюдалась k-ая звезда в i-й вечер или нет. Штрих у сумм означает суммирование только по звездам j-й зоны. Начало отсчета времени t в каждом ряду мы выбрали так, что $\sum_k t_k^i = 0$. Это автоматически исключает a^i из (3) и Φ^i из (6).

Не решая пока систему (3—7), рассмотрим пример вывода системы инструмента S_j по наблюдениям только опорных звезд, причем зависимость широт $\varphi_k{}^i$ от t и z уже будет учтена. Для сравнения рассмотрим решение той же задачи методом Н. В. Циммермана.

Если пренебречь ошибками опорного каталога (все Δ_k равны нулю), нормальная система примет вид:

$$n^i\Phi^i + \sum_j n_j^i S_j = \sum_k \lambda_k^i \varphi_k^i; \tag{8}$$

$$n_j S_j + \sum_i n_j^i \Phi^i = {\sum_{i,k}}' \lambda_k^i \varphi_k^i. \tag{9}$$

Для исключения S_j умножим (9) на $n_j{}^i/n_j$, просуммируем по j и вычтем из (8):

$$n^i\Phi^i - \sum_{j,l} \frac{n_j^i n_j^l}{n_j} \Phi^l = \sum_k \lambda_k^i \varphi_k^i - \sum_j \frac{n_j^i}{n_j} {\sum_{k,l}}' \lambda_k^l \varphi_k^l. \tag{10}$$

Матрица этой системы имеет ранг на единицу меньший ее порядка, так как сумма строк матрицы тождественно равна нулю. Недостающее для решения (10) дополнительное уравнение получим из (9) и естественного, условия $\sum_j S_j = 0$:

$$\sum_{j,l} \frac{n_j^l}{n_j} \Phi^l = \sum_{k,l} \lambda_k^l \varphi_k^l. \tag{11}$$

Известно, что решение методом наименьших квадратов вырожденной нормальной системы $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}$ (10) при условии $\mathbf{BX}=\mathbf{C}$ ($\mathbf{B}$ — вектор, $\mathbf{C}$ — скаляр) сводится к решению системы $(\mathbf{A}+\mathbf{B}'\mathbf{B})\mathbf{X}=\mathbf{Y}+\mathbf{B}'\mathbf{C}$, где штрих означает операцию транспонирования [2, с. 123]. Сумма рангов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должна обязательно равняться порядку матрицы $\mathbf{A}$. Решение систем уравнений большого порядка с помощью ЭВМ не представляет особой трудности. В настоящее время уже имеются специальные пакеты программ, позволяющие решать системы линейных уравнений до 2500 порядка [1]. Однако хорошая обусловленность системы (10) позволяет легко решить ее с помощью метода простой итерации. Так, обработка 150 рядов наблюдений, выполненных в ГАО АН УССР на вертикальном круге, потребовала выполнения только 30 шагов итерации. Расход машинного времени на ЭВМ ЕС-1022 — 10 мин, размер программы — 40 операторов. После решения системы (10) получаем

$$S_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i,k}\lambda_k^i\varphi_k^i - \frac{1}{n_j}\sum_i n_j^i\Phi^i. \tag{12}$$

Точность вычисления S_j практически зависит от первой суммы и составляет примерно $\varepsilon/\sqrt{n_j}$, где ε — случайная ошибка величины $\varphi_k{}^i$.

При выводе системы инструмента по Циммерману берут разности широт звезды k зоны j и звезды m зоны q ряда i. Это дает свободную от Φ^i разность $S_j - S_q = \varphi_{k,j}^i - \varphi_{m,q}^i$ (второй нижний индекс — номер зоны). Перебор всех комбинаций звезд зон j и q даст $n_j^i n_q^i$ таких разностных уравнений, сумма которых $n_j^i n_q^i(S_j - S_q) = n_q^i \sum_k{}' \lambda_k^i\varphi_{k,j}^i - n_j^i \sum_m{}' \lambda_m^i\varphi_{m,q}^i$.

Просуммировав по i и использовав условие $\sum_j S_j = 0$, имеем

$$S_j = \frac{1}{J}\sum_q^J \frac{\sum_i \left(n_q^i \sum_k{}' \lambda_k^i\varphi_{k,j}^i - n_j^i \sum_m{}' \lambda_m^i\varphi_{m,q}^i\right)}{\sum_i n_q^i n_j^i}. \tag{13}$$

Первая сумма в круглых скобках определяет дисперсию вычисления системы инструмента D. Если распределение количества наблюдений звезд по зонам z не изменяется от вечера к вечеру (т. е. n_j^i и n_q^i не зависят от i) D достигает минимума ε^2/n_j. Однако в действительности распределение звезд по зонам z изменяется от вечера к вечеру. Допустим, что в половине всех вечеров количество наблюдений звезд j-й и q-й зон n_j^i и n_q^i было n^* и vn^* (в каждом из этих рядов), в другие вечера — наоборот, vn^* и n^*. Тогда из (13) следует, что $D = \frac{(1+v)^2}{4vn_j}\varepsilon^2$. С ростом коэффициента v, отражающего неравномерность распределения звезд по зонам, точность вычисления S_j падает. Так, при значениях v 2 и 5 имеем $D=1.2\,D_{\min}$ и $D=1.8\,D_{\min}$. Точность же решения уравнений (10—12) остается практически той же. Эти оценки подтверждают уже сделанные ранее выводы о неэквивалентности классической схемы Циммермана и метода наименьших квадратов [3].

Возвратимся снова к уравнениям (3—7). При обычных для каталогов значениях I и Q около 100—200 и 500—1000 порядок нашей системы $3I+J+Q$ достигает 1000—2000. Для ЭВМ решение таких систем требует больших затрат машинного времени. Между тем порядок системы можно уменьшить до $3I$, т. е. в 2—3 раза. Для этого исключим Δ_k, умножая (7) на $\lambda_k{}^i/n_k$, просуммировав по k и вычитая результат из (3). Аналогично исключим Δ_k из (5) и (6), умножая (7) на $\lambda_k{}^i \sin z_k/n_k$ и на $\lambda_k{}^i t_k{}^i/n_k$. Новая система имеет только $3I$ неизвестных

Φ^i, b^i, a^i:

$$\sum_k \lambda_k^i [\Phi^i - \bar{\Phi}_k + (b^i - \bar{b}_k) \sin z_k - (\overline{at})_k] = \sum_k \lambda_k^i (\varphi^i - \bar{\varphi}_k), \tag{14}$$

$$\sum_k \lambda_k^i \sin z_k [\Phi^i - \bar{\Phi}_k + (b^i - \bar{b}_k) \sin z_k + (at)_k^i - (\overline{at})_k] = \sum_k \lambda_k^i \sin z_k (\varphi_k^i - \bar{\varphi}_k), \tag{15}$$

$$\sum_k \lambda_k^i t_k^i [- \bar{\Phi}_k + (b^i - \bar{b}_k) \sin z_k - (\overline{at})_k] = \sum_k \lambda_k^i t_k^i (\varphi_k^i - \bar{\varphi}_k). \tag{16}$$

Здесь черта над символами означает усреднение по рядам, например $\bar{\Phi}_k = \sum_l \frac{\lambda_k^l}{n_k} \Phi^l$ или $(\overline{at})_k = \sum_l \frac{\lambda_k^l}{n_k} a^l t_k^l$. Уравнения системы содержат разности Φ и b, т. е. эти величины определены с точностью до константы, а ранг матрицы на 2 меньше ее порядка. Чтобы устранить вырожденность системы, наложим на Φ и b два условия. При этом должны соблюдаться очевидные равенства $\sum_j S_j = 0$ и $L_j = \sum_k^{R}{}' \Delta_k = 0$, $j = 1, \dots J$, где L_j — сумма ошибок каталожных склонений опорных звезд j-й зоны. Первое условие имеем из (7):

$$\sum_j \frac{1}{R_j} \sum_{i,k}^{I,R} \frac{\lambda_k^i}{n_k} (\varphi_k^i - \Phi^i - b^i \sin z_k - a^i t_k^i) = 0,$$

где R_j — количество опорных в j-й зоне, а суммирование идет только по опорным звездам. Выбор второго условия произволен, например $\Sigma b^i = 0$ или $\Sigma \Phi^i = 0$.

Система (14—16) решается итерационными методами. Так, система 450 порядка, построенная для обработки упомянутых ранее наблюдений на вертикальном круге, решается за 80 шагов итерации с затратой времени 60 мин. Затем по (4) и (7) определим Δ_k и

$$S_j = \frac{1}{R_j} \sum_{i,k}^{I,R} \frac{\lambda_k^i}{n_k} (\varphi_k^i - \Phi^i - b^i \sin z_k - a^i t_k^i). \tag{17}$$

Выводы. 1. Для вычисления Φ^i, b^i, a^i (14)—(16) пригодны наблюдения как опорных, так и определяемых звезд; используются они с равными весами. Поэтому привлечение наблюдений определяемых звезд, которых обычно больше, чем опорных, несколько повышает точность вычисления этих редукционных параметров. 2. Как следует из формулы (17), точность вычисления системы инструмента в зоне j определяется количеством наблюдений опорных звезд в этой зоне R_j и примерно равна $\varepsilon/\sqrt{R_j}$. Роль определяемых звезд проявляется в улучшении вычисления параметров Φ^i, b^i и a^i, входящих в (17). 3. Обусловленность системы (14)—(16) улучшится, если соблюдать равномерность распределения звезд по зонам z в каждом ряду. Надо также составлять программу наблюдений так, чтобы в двух произвольных рядах наблюдений количество общих звезд было возможно меньшим. 4. Если раньше мы допускали равновесность наблюдений, то форма записи (14—16) в виде сумм по k позволяет свести назначение веса p_j наблюдением j-й зоны к простому умножению соответствующих слагаемых сумм на этот вес. 5. Может оказаться, что Δ_k для опорных звезд имеет ход по a. Это учитываем в модели (1), придавая индексу при S различные значения для разных зон α. Например, в зоне $0^h < \alpha < 12^h$ положим $j = I, \dots J$, в зоне $\alpha > 12^h - j = j + 1, \dots 2J$.

Аналогичный формализованный метод обработки применим и к другим видам меридианных наблюдений, например, к абсолютным наблюдениям на вертикальном круге. Рассмотрим следующий упрощенный вариант решения задачи, когда широта φ_k^i представляется в виде

$$\varphi_k^i = \varphi_0 + \Delta_k + S_j + \Phi^i + a^i t_k^i, \tag{18}$$

$i=1, \dots I$, $j=1, \dots J, \dots 2J$: индексы и величины φ, Δ, a, t имеют прежний смысл. S_j — разность «инструментальная система» минус «опорный каталог» по зонам звездного времени s, J — количество таких зон. Для наблюдений в нижних кульминациях индексу j целесообразно приписывать значения от $J+1$ до $2J$. Включение S_j в (18) способствует лучшему разделению параметров кратковременной нестабильности системы инструмента a^i от устойчивого хода этой системы по s. φ_0 — постоянная составляющая наблюдаемых широт или «предварительная» широта, Φ^i — уклонения широт отдельных вечеров от φ_0. Условимся также звездам, наблюдавшимся в обеих кульминациях, присваивать различные порядковые номера k: один — для верхней кульминации, другой — для нижней. Тогда в (18) и дальше $k=1, \dots N$, где N — количество номеров звезд.

Представление φ_k^i в виде (18) похоже на аппроксимацию (1); в обоих случаях из наблюдений исключаются параметры Φ^i и a^i. Структура нормальных уравнений для (18) подобна структуре системы (3—7); приведем только одно из уравнений

$$(\varphi_0 + \Delta_k + S_j)\, n_k + \sum_i \lambda_k^i (\Phi^i + a^i t_k^i) = \sum_i \lambda_k^i \varphi_k^i. \tag{19}$$

После исключения Δ_k из нормальной системы описанным выше способом придем к системе $2I$ уравнений с неизвестными Φ^i и a^i:

$$\sum_k \lambda_k^i [\Phi^i - \overline{\Phi}_k - (\overline{at})_k] = \sum_k \lambda_k^i (\varphi_k^i - \overline{\varphi}_k), \tag{20}$$

$$\sum_k \lambda_k^i t_k^i [-\overline{\Phi}_k + (at)_k^i - (\overline{at})_k] = \sum_k \lambda_k^i t_k^i (\varphi_k^i - \overline{\varphi}_k), \tag{21}$$

$i = 1, \dots I$. Для решения системы необходимо наложить одно условие (ранг системы $2I - 1$). Вначале перепишем (19) с учетом условий $L_j = \sum_k{}' \Delta_k = 0$, $j = 1, \dots 2J$ в виде

$$S_j = -\varphi_0 + \frac{1}{N_j} \sum_{i,k}^{I,N}{}' \frac{\lambda_k^i}{n_k} (\varphi_k^i - \Phi^i - a^i t_k^i),$$

где N_j — количество звезд в зоне j. Если предположить, что

$$\varphi_0 = \frac{1}{2J} \sum_j \frac{1}{N_j} \sum_{i,k}{}' \frac{\lambda_k^i}{n_k} \varphi_k^i,$$

а $\Sigma S_j = 0$, получаем недостающую зависимость

$$\sum_j \frac{1}{N_j} \sum_{i,k}{}' \frac{\lambda_k^i}{n_k} (\Phi^i - a^i t_k^i) = 0. \tag{22}$$

После решения системы образуем свободные от нестабильности системы инструмента значения широт $\varphi_0+\Delta_k+S_j$, которые дальше обрабатываем классическим способом. Рассмотренный вариант обработки можно усложнить, дополнив (18) членом $b \sin z$, а вместо (18) можно решать уравнения, уже содержащие среднюю широту места.

Аналогично рассмотренным случаям формализованный метод обработки применим и при составлении других типов каталогов.

1. *Зубатенко В. С., Молчанов И. Н., Николенко Л. Д., Яковлев М. Ф.* Программный комплекс для решения систем линейных алгебраических уравнений на ЕС ЭВМ.— В кн.: Пакеты прикладных программ. М. : Наука, 1982, с. 86—93.
2. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи.— М. : Наука, 1973.— 900 с.
3. *Конин В. В.* Практическое применение метода Н. В. Циммермана для исследования системы инструмента.— Изв. Гл. астрон. обсерватории в Пулкове, 1965, № 176, с. 80—88.

Главная астрономическая обсерватория АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 16.07.1984 *

* В нескольких первых номерах журнала будет приводиться дата передачи статьи из редколлегии межведомственного сборника «Астрометрия и астрофизика» в редакцию журнала.

РЕФЕРАТЫ ДЕПОНИРОВАННЫХ РУКОПИСЕЙ

УДК 521.96(085)+521.97

Лазоренко П. Ф.

КАТАЛОГ СКЛОНЕНИЙ 254 ЗВЕЗД В ОКРЕСТНОСТЯХ 72 ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ РАДИОИСТОЧНИКОВ

(Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 2635—84 Деп).

Наблюдения выполнены в системе FK4 на вертикальном круге ГАО АН УССР в 1979—1982 гг. При обработке учтены поправки 2-минутных штрихов; рассмотрено влияние зальной рефракции на измерения горизонтального гнутия. Поправки склонений звезд и параметры инструмента определялись совместно методом наименьших квадратов. Склонения приводятся в двух вариантах: на эпоху наблюдений и равноденствие J 2000.0, а также на эпоху и равноденствие B 1950.0. Средняя ошибка каталожного положения в зените 0.12″.

УДК 524.45NGC6910—325.2:524.3(083.3)

|Герц Э. А.|

КАТАЛОГ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД В ОБЛАСТИ РАССЕЯННОГО СКОПЛЕНИЯ NGC 6910

(Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 1797—84 Деп.)

По снимкам, полученным на двойном длиннофокусном астрографе ГАО АН УССР ($F = 5000$, $D = 400$ мм) с разностью эпох 21.09 и 20.23 лет, определены относительные собственные движения 848 звезд в области рассеянного скопления NGC 6910. Результаты приведены с учетом ошибок уравнения блеска. Среднеквадратичные погрешности определения собственного движения звезды ±0.0058 в год по X и ±0.0054″ в год по $У$.