ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.003
УДК 517.36

А.А. Мартинюк, академік НАН України

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

До теорії стійкості розривних динамічних систем

Диференціальні рівняння з розривною правою частиною застосовуються в задачах управління рухом, у дослідженні систем із змінною структурою, в аналізі систем автоматичного регулювання з ковзним режимом тощо. У статті викладено деякі результати дослідження стійкості, отримані для вказаного класу систем на основі методу матричнозначних функцій Ляпунова. Ці результати сформульовано в термінах знаковизначеності спеціальних матриць, які використовуються для оцінки зміни функції Ляпунова і її узагальненої похідної.

Ключові слова: *розривні системи, матричнозначні функції Ляпунова, стійкість, принцип інваріантності Ла-Салля.*

Теорія диференціальних рівнянь з розривною правою частиною (див. [1] і бібліографію там) знаходить застосування в задачах управління рухом, у дослідженні систем із змінною структурою, в аналізі систем автоматичного регулювання з ковзним режимом тощо.

У цій статті стійкість розривних динамічних систем досліджується на основі методу матричнозначних функцій Ляпунова [2]. Результати сформульовані в термінах знаковизначеності спеціальних матриць, які використовуються для оцінки зміни функції Ляпунова і її узагальненої похідної.

1. Постановка задачі. Розглядається розривна система рівнянь збуреного руху

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

де $x(t)\in R^n$ — стан системи (1) в момент $t\in T=[t_0,+\infty)$; $f\colon T\times R^n\to R^n$, $f(t,x)$ — векторфункція, означена майже всюди у відкритій області $Q\subseteq T\times R^n$, причому така, що в довільній замкнутій і обмеженій області $N\subseteq Q$ існує інтегровна функція $m(t)$, що задовольняє умову $\|f(t,x)\|<m(t)$ майже всюди в N.

Цитування: Мартинюк А.А. До теорії стійкості розривних динамічних систем. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 1. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.003

Розв'язком початкової задачі (1) у сенсі Філіпова [1] називається функція $x(t,t_0,x_0)$ така, що $x(t_0,t_0,x_0)=x_0$ і яка майже при всіх t задовольняє диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in \Phi[f](t,x), \tag{2}$$

де

$$\Phi[f](t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu\Omega=0} \overline{\text{conv}} f(t, B(x,\delta) \setminus \Omega).$$

Тут conv позначає опуклу оболонку, $\overline{\text{conv}}$ – замикання conv, $\bigcap\limits_{\mu\Omega=0}$ — перетин опуклого замикання по всіх множинах Ω міри нуль.

Далі припускатимемо, що $0 \in \Phi[f](t,0)$ при всіх $t \in T$ і $x=0$ є єдиним станом рівноваги розривної системи (1).

Необхідно вказати умови різних типів стійкості нульового розв'язку системи (1) на основі матричнозначної функції

$$U(t,x) = [v_{ij}(t,x)], \quad i,j=1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

де $v_{ii}(t,x): T \times R^n \to R_+$ і $v_{ij}(t,x): T \times R^n \to R$, $i \neq j$.

На основі функції (3) побудуємо функцію

$$v(t,x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(t,x)\theta, \quad \theta \in R_+^m, \tag{4}$$

і розглядатимемо градієнт Кларка функції $v(t,x,\theta)$ у вигляді (пор. [3, 4])

$$\partial v(t,x,\theta) = \overline{\text{conv}}\{\lim(\text{grad}_{t,x}(v(t,x,\theta))) : (t_i,x_i) \to (t,x),\ (t_i,x_i) \bar{\in} \Omega_v\},$$

де Ω_v — множина міри нуль, на якій функція $v(t,x,\theta)$ не визначена.

Повною похідною функції $v(t,x,\theta)$ вздовж розв'язків системи (1) називатимемо вираз

$$v^*(t,x(t),\theta)\big|_{(1)} = \bigcap_{\xi \in \partial v(t,x,\theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi[f](t,x) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Зауважимо, що вираз $v^*(t,x,\theta)\big|_{(1)}$ може бути замінено виразом $D^+v(t,x,\theta)\big|_{(1)}$ майже всюди на T, де $D^+v(t,\cdot)$ — права верхня похідна Діні функції (4), яка обчислюється згідно з формулою

$$D^+v(t,x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} D^+U(t,x)\theta. \tag{7}$$

Тут $D^+U(t,x)\big|_{(1)}$ обчислюється покомпонентно.

2. Достатні умови стійкості в сенсі Ляпунова. Нагадаємо означення стійкості стану $x=0$ системи (1).

Стан рівноваги $x=0$ системи (1) стійкий, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ і $t_0 \in [0,+\infty)$ існує $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$ таке, що за будь-яких $x_0 \in R^n$, для яких $\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon)$, виконується нерівність $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при всіх $t \geqslant t_0$.

Якщо система (1) така, що згадану вище величину $\delta(t_0, \varepsilon)$ можна вибрати незалежною від t_0, то стан рівноваги $x = 0$ системи (1) буде рівномірно стійким.

Асимптотична стійкість та рівномірна асимптотична стійкість визначаються аналогічно із залученням додаткової умови $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Далі розглядатимемо випадки, коли функція (4) є регулярною ліпшицевою функцією або має неперервні частинні похідні першого порядку.

Нагадаємо, що функція v є регулярною в точці z за умови, що v є ліпшицева в околі z і допускає похідну за напрямком $\dot{v}(z,u)$ для всіх u, причому $\dot{v}(z,u) = \overset{\circ}{v}(z,u)$, де

$$\overset{\circ}{v}(z,u) = \limsup\{[v(w + hu) - v(w)]h^{-1} : w \to z,\ h \to 0\}.$$

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *така, що для неї існує матричнозначна функція* (3) *і вектор* $\theta \in R_+^m$ *такі, що функція* (4) *регулярно ліпшицева,* $v(t, 0, \theta) = 0$ *при всіх* $t \in T$ *. Якщо існують постійні* $m \times m$ *-матриці* , $j = 1, 2, 3$ *, і векторні функції порівняння* $\phi_j(\|x\|) \in K$ *(KR-класу),* $j = 1, 2, 3$ *, такі, що*

1) $\phi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\phi_1(\|x\|) \leqslant v(t, x, \theta) \leqslant \phi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_2\phi_2(\|x\|)$ *при всіх* $(t, x) \in T \times Q$;

2) $v^*(t, x, \theta)\big|_{(1)} \leqslant \phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|)$ *при всіх* $(t, x) \in T \times Q$,

то стан рівноваги $x = 0$ *системи* (1)*:*

(а) стійкий, якщо матриця A_1 *додатно визначена, матриця* $A_2 = 0$ *, а матриця* A_3 *напіввизначено від'ємна;*

(б) рівномірно стійкий, якщо A_1 *і* A_2 *додатно визначені і матриця* A_3 *напіввизначено від'ємна;*

(в) асимптотично рівномірно стійкий, якщо матриці A_1 *і* A_2 *визначено додатні і матриця* A_3 *визначено від'ємна.*

Якщо умови теореми 1 *виконуються при всіх* $(t, x) \in T \times R^n$ *і функціях порівняння* $\phi_i(\|x\|) \in KR$ *-класу, то твердження (а)—(в) мають місце в цілому.*

Зауваження 1. Твердження теореми 1 залишаються в силі, якщо вираз $v^*(t, x, \theta)\big|_{(1)}$ замінити на $D^+v(t, x, \theta)\big|_{(1)}$ і

$$D^+v(t, x, \theta)\big|_{(1)} \leqslant \phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|)$$

майже всюди на T .

Зауваження 2. Твердження теореми 1 залишаються в силі, якщо вираз $v^*(t, x, \theta)\big|_{(1)}$ замінити на $D_h^+v(t + h, x + hy, \theta)\big|_{h=0}$, де $y = \dot{x} = f(t, x)$ і умову *2* замінити такою:

$$D_h^+v(t + h, x + hy, \theta)\big|_{h=0} \leqslant \phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|)$$

майже всюди на T .

Якщо функція (4) має неперервні частинні похідні першого порядку, то має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *така, що для неї існує матричнозначна функція* (3) *і вектор* $\theta \in R_+^n$ *такі, що функція* (4) *має неперервні частинні похідні першого порядку,* $v(t, 0, \theta) = 0$ *при всіх* $t \in T$.

Якщо існують постійні $m\times m$ *-матриці* A_j, $j=1,2,3$, *і векторні функції порівняння* $\phi_j(\|x\|)\in K(KR)$ *-класу,* $j=1,2,3$, *такі, що*

1) $\phi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\phi_1(\|x\|)\leqslant v(t,x,\theta)\leqslant\phi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_2\phi_2(\|x\|)$ *при всіх* $(t,x)\in T\times Q$ *;*

2) $\sup\limits_{y\in\Phi[f](t,x)}[v_t(t,x,\theta)+(\mathrm{grad} v_x(t,x,\theta),y)]\leqslant\phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|)$,

то твердження (а)—(в) теореми 1 *про стан рівноваги* $x=0$ *системи* (1) *залишаються в силі за умов, зазначених у цій теоремі.*

Якщо умови теореми 2 *виконуються при всіх* $(t,x)\in T\times R^n$ *і функції порівняння* $\phi_i(\|x\|)\in KR$ *-класу,* $j=1,2,3$, *то твердження (а)—(в) теореми* 1 *мають місце в цілому.*

Зауваження 3. Якщо в системі (1) вектор-функція $f(t,x)$ є кусково неперервною і функція $v(t,x,\theta)\in C(T\times Q\times R_+^m,R_+)$, то умову *2* у теоремі 2 можна замінити нерівністю

$$\dot v(t,x,\theta)\equiv v_t(t,x,\theta)+(\mathrm{grad} v_x(t,x,\theta),f(t,x))\leqslant\phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|),$$

яка має виконуватися в області неперервності вектор-функції $f(t,x)$.

Зауваження 4. Якщо в теоремі 2 умову *2* замінити на нерівність

$$\inf_{y\in\Phi[f](t,x)}[v_t(t,x,\theta)+(\mathrm{grad} v_x(t,x,\theta),y)]\leqslant\phi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\phi_3(\|x\|),$$

то твердження (*а*)—(*в*) мають місце в сенсі слабкої рівномірної стійкості (слабкої асимптотичної стійкості).

3. Принцип інваріантності Ла-Салля. Розглянемо автономну розривну систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \tag{8}$$

де $f(x):D\to R^n$, $D\subset R^n$. Припустимо, що область $D\subset R^n$ розділена гладкою поверхнею γ на області σ_+ і σ_- так, що $D=\sigma_-\bigcup\gamma\bigcup\sigma_+$ вектор-функція $f(x)$ неперервна в областях σ_- і σ_+. Поверхню розриву γ визначимо рівнянням $\alpha(x(t)=0)$, області σ_- та σ_+ визначаються так: $\sigma_-=\{x\in D:\alpha(x(t))<0\}$, $\gamma=\{x\in D:\alpha(x(t))=0\}$ та $\sigma_+=\{x\in D:\alpha(x(t))>0\}$.

Далі означимо векторні функції

$$f^-(x)=\lim_{x^*\in\sigma_-\,x^*\to x}f(x^*),\quad f^+(x)=\lim_{x^*\in\sigma_+\,x^*\to x}f(x^*),\quad x\in\gamma,$$

згідно з роботою [4]. Опуклу регуляризацію розривної системи (8) виконаємо на основі функції $F(x)$, яка визначається за формулою

$$F(x)=\begin{cases}f^-(x) & \text{при}\quad x\in\sigma_-,\\ f_\beta(x) & \text{при}\quad x\in\gamma,\ \beta\in[0,1],\\ f^+(x) & \text{при}\quad x\in\sigma_+,\end{cases}$$

де $f_\beta(x)=\beta f^-(x)+(1-\beta)F^+(x)$.

Для системи (8) побудуємо матричнозначну функцію

$$U(x)=[v_{ij}(x)],\quad i,j=1,2, \tag{9}$$

елементи $v_{ij}(x)$ якої будуються так:

$v_{11}(x): \sigma_- \to R_+$ і співвідноситься з рівнянням $\dfrac{dx}{dt} = f^-(x), \quad x \in \sigma_-$;

$v_{22}(x): \sigma_+ \to R_+$ і співвідноситься з рівнянням $\dfrac{dx}{dt} = f^+(x), \quad x \in \sigma_+$;

$v_{12}(x) = v_{21}(x): \sigma \to R$ і співвідноситься з рівнянням $\dfrac{dx}{dt} = f_\beta(x), \quad x \in \gamma, \ \beta \in [0,1]$.

На основі функції (9) побудуємо скалярну функцію

$$v(x, \theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(x) \theta, \quad \theta \in R_+^2, \tag{10}$$

і припустимо, що $v: R^n \times R_+^2 \to R_+$.

Для функції (10) розглядатимемо узагальнений градієнт Кларка

$$\partial v(x, \theta) = \overline{\mathrm{co}} \{\lim \nabla v(x_i, \theta)|_{x_i} \to x, \quad x_i \notin \Omega_v\},$$

де Ω_v — множина міри нуль, у якій вираз $\nabla v(x, \theta)$ не визначено.

Нехай $x(t) \in S(x_0)$ — розв'язок системи (8) у сенсі Філіпова і $v(x, \theta): D \times R_+^2 \to R_+$ — локально ліпшицева неперервна та регулярна функція. Нехай функція $v(x(t), \theta)$ абсолютно неперервна і майже всюди існує похідна $dv(x(t), \theta)/dt$ в силу системи (8). Крім того,

$$\frac{dv(x(t), \theta)}{dt} \in \mathring{v}(x(t), \theta),$$

де

$$\mathring{v}(x(t), \theta) = \bigcap_{\xi \in \partial v(x(t), \theta)} \xi^{\mathrm{T}} K[f](x(t)).$$

Для функції (10) розглядатимемо зв'язну компоненту W_c множини $\{x \in R^n : v(x, \theta) \leqslant c\}$ і множину $Z_v = \{x \in R^n : \mathring{v}(x, \theta) \leqslant 0\}$. Має місце таке твердження.

Теорема 3 (пор. [4]). *Припустимо, що для системи* (8) *на основі функції* (9) *побудовано функцію* (10)*, яка локально ліпшицева та регулярна, і виконуються умови:*

1) існує постійна $c > 0$ така, що $0 \in W_c$ і множина W_c обмежена;

2) для будь-якого $x_0 \in W_c$ розв'язок системи (8) *$x(t) \in S(x_0)$ і множина Z_v така, що підмножина M є найбільшою слабо інваріантною в множині $Z_v \cup W_c$.*

Тоді $\mathrm{dist}(x(t), M) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 3.2 зі статті [4], де використовується звичайна скалярна функція Ляпунова.

Далі розглядатимемо множини $Q_1 = \{x \in R^n : c(x) < 0\}$, $Q_2 = \{x \in R^n : c(x) = 0\}$, де $c(x)$ — неперервна регулярна функція, і $\overline{\Omega} l = \{x \in R^n : v(x, \theta) \leqslant l\}$, де $l = \sup\limits_{x \in Q_1} v(x, \theta)$.

Має місце таке твердження.

Теорема 4 (пор. [4]). *Припустимо, що для системи* (8) *побудовано функцію* (10)*, яка є локально ліпшицевою та регулярною. Якщо виконуються умови:*

1) існує неперервна функція $c(x)$ така, що при всіх $x \in R^n$ виконується $\max \mathring{v}(x(t), \theta) \leqslant -c(x)$;

2) множина $\overline{\Omega}_l$ *обмежена,*
то для будь-якого $x_0 \in \Omega_l$ *має місце включення* $x(t) \in \overline{\Omega}_l$ *при всіх* $x(\cdot) \in S(x_0)$.

Крім того, якщо $x(\cdot)$ *— обмежений розв'язок і* M *— найбільша слабо інваріантна підмножина множини* $\overline{\Omega}_l \cup Q_2$, *то* $\operatorname{dist}(x(t), M) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 4 дає можливість досліджувати систему (8) з хаотичною поведінкою траєкторій, а спосіб побудови функції $v(x, \theta)$ полегшує проблему побудови відповідної функції Ляпунова для розривної системи (8).

4. Підсумки. У разі використання матричнозначної функції (3) проблема аналізу стійкості стану $x = 0$ системи (1) зводиться до алгебраїчної проблеми, що полягає в перевірці знаковизначеності $m \times m$-матриць A_j, $j = 1, 2, 3$.

У теоремах 3, 4 формулюється принцип інваріантності Ла-Салля з урахуванням функції Ляпунова (10), для якої передбачається негативність повної похідної $\overset{\circ}{v}(x(t), \theta)$.

Зауважимо, що розривні системи досліджувалися за допомогою векторної функції Ляпунова у роботі [5] і на основі матричнозначних відображень, що зберігають стійкість, у роботі [6]. Становить інтерес поширення теорем 1—4 на розривні системи з неточними значеннями параметрів [7].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с правой разрывной частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.
2. Martynyuk A.A. Stability of motion: The role of multicomponent Lyapunov's functions. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. 305 p.
3. Clarke F.N. Optimization and nonsmooth analysis. New York: Wiley, 1983. 320 p.
4. Deriviére S., Aziz-Alaoui M.A. An invariance principle for discontinuous righthand sides dynamical systems. *Res. Reports. Dept. Math. Univ. Sherbrooke*. 2006. № 31. P. 1—13.
5. Stipanovic D.M., Siljak D.D. Connective stability of discontinuous interconnected systems via parameter-dependent Lyapunov functions. Proceedings of the 2001 American Control Conference (Arlington, VA, USA, 25—27 June, 2001). Arlington, 2001. P. 4189—4196. https://doi.org/10.1109/ACC.2001.945633
6. Мартынюк А.А. Об устойчивости движения разрывных динамических систем. *Докл. АН*. 2004. **397**, № 3. P. 308—312.
7. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Uncertain dynamical systems. Stability and motion control. Boca Raton: CRC Press, 2012. 296 p.

Надійшло до редакції 02.08.2022

REFERENCES

1. Filippov, A. F. (1985). Differential equations with discontinuous right-hand. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Martynyuk, A. A. (2007). Stability of motion: The role of multicomponent Lyapunov's functions. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
3. Clarke, F. N. (1983). Optimization and nonsmooth analysis. New York: Wiley.
4. Deriviére, S. & Aziz-Alaoui, M. A. (2006). An invariance principle for discontinuous righthand sides dynamical systems. Res. Reports, Dept. Math. Univ. Sherbrooke, No. 31, pp. 1-13.
5. Stipanovic, D. M. & Siljak, D. D. (2001, June). Connective stability of discontinuous interconnected systems via parameter-dependent Lyapunov functions. Proceedings of the 2001 American Control Conference (pp. 4189-4196). Arlington, VA. https://doi.org/10.1109/ACC.2001.945633
6. Martynyuk, A. A. (2004). On stability of motion of discontinuous dynamical systems. Dokl. Acad. Nauk, 397, No. 3, pp. 308-312 (in Russian).
7. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Ya. A. (2012). Uncertain dynamical systems. Stability and motion control. Boca Raton: CRC Press.

Received 02.08.2022

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE THEORY OF STABILITY OF DISCONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS

The theory of differential equations with a discontinuous right-hand side finds application in problems of motion control, in the study of systems with variable structure, in the analysis of automatic control systems with sliding regime and others. The purpose of this article is to present some results of the study of stability obtained for the specified class of systems based on the method of Lyapunov's matrix-valued functions. These results are formulated in terms of the sign-definiteness of special matrices, which are used to estimate the change in the Lyapunov function and its generalized derivative.

Keywords: *discontinuous systems, matrix-valued Lyapunov functions, stability, La-Salle invariance principle.*