УДК 519.876.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СИСТЕМЕ MAPLE

© А.Г. Овский, В.А. Толок, 2008

Запорожский национальный университет

У роботі запропонований метод моделювання розв'язку тривимірно задачі теорії пружності методом початкових функцій в системі Maple. Розроблено формальний підхід побудови розв'язку задачі для вільно опертого тривимірного масиву. Для реалізації розв'язку в системі розроблений спеціальний препроцесор і бібліотека процедур.

В работе предложен метод моделирования решения трехмерной задачи теории упругости методом начальных функций в системе Maple. Разработан формальный подход построения решения задачи для свободно опертого трехмерного массива. Для реализации решения в системе, разработан специальный препроцессор и библиотека процедур.

The method of design in the system Maple of decision is in-process offered three-dimensional the task of theory of resiliency the initial functions. Are developed the special formal approach of construction of decision of task three-dimensional array. For realization of decision the special preprocessor and library of procedures is developed in the system.

СИСТЕМА MAPLE, ПРЕПРОЦЕССОР, ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА, АБСОЛЮТНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ, ТОНКИЕ ПЛАСТИНЫ

В настоящей работе показана возможность применения системы компьютерной алгебры Maple для математического моделирования решений трехмерных задач теории упругости. С помощью упрощающей символики В.З. Власова реализуется построение математической модели трехмерной задачи теории упругости. Предлагаемая работа является продолжением работы [5]. Результаты решения задачи об изгибе трехмерного массива сравниваются с классической теорией изгиба тонких пластин. Подробным образом в графической интерпретации выводятся абсолютные погрешности для решения по методу начальных функций в сравнении с классической теорией. Предлагаемая математическая модель может применяться также для анализа напряжено-деформированного состояния других тел.

Рассмотрим свободно защемленный по контуру основания трехмерный массив, находящийся под действием нагрузки постоянной интенсивности Q. Его размеры: длина (ось x) – S, ширина (по оси y)- R, толщина (ось z) – H. Вид массива, рис. 1.

Исходя из формулировки задачи для рассматриваемого метода [2], выбираем следующую систему координат см. рис. 1.

Выделим в теле две плоскости: начальную z=0 и параллельную ей z=H. Задаем на начальной плоскости функции U_0, V_0, W_0, X_0 ,Y_0 ,Z_0, которые зависят от переменных x, y [2]. Функции X_0 ,Y_0 ,Z_0 равны нулю, так как за начальную плоскость выбирается свободный нижний край массива. На верхнюю плоскость массива действует в направлении, обратном оси z, равномерно распределенная нагрузка Q.

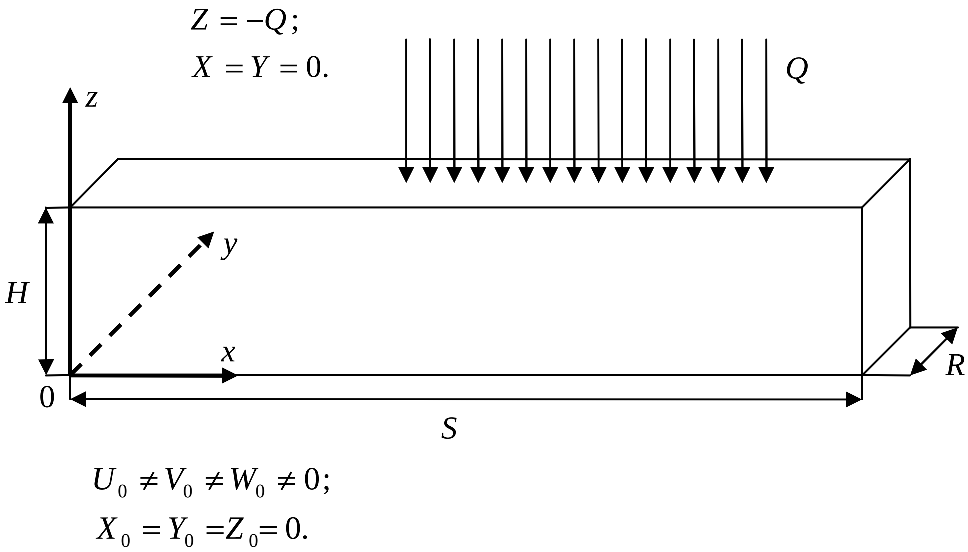


Рис. 1 - Описание задачи

Далее согласно работе [5] разрешается общая задача о равновесии твердого изотропного тела, испытывающего малые деформации в прямоугольной системе координат x, y, z. Используем результат этой работы для перемещений и напряжений.

Задаем начальные функции $U_0(x, y), V_0(x, y), W_0(x, y)$ в виде двойных тригонометрических рядов [8]:

$$U_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{S}x \ \cos\frac{m\pi}{R}y,$$

$$V_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos\frac{n\pi}{S}x \ \sin\frac{m\pi}{R}y, \qquad (1)$$

$$W_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\frac{n\pi}{S}x \ \sin\frac{m\pi}{R}y.$$

После подстановки (1) в решение трехмерной задачи [5] осуществляя переход к численным рядам для напряжений, получим:

$$\begin{cases} X=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l} \left[-\dfrac{z a_n^{\,2}\, ch\gamma_{nm} z}{\nu-1}+\dfrac{\gamma_{nm}\, sh\,\gamma_{nm}\, z}{\nu-1}+\dfrac{\nu b_m^2}{\gamma_{nm}(\nu-1)}\right] A_{nm}\sin a_n x\,\cos b_m y- \\ -\left[\dfrac{z a_n b_m\, ch\gamma_{nm} z}{\nu-1}+\dfrac{\nu a_n b_m\, sh\gamma_{nm} z}{\gamma_{nm}(\nu-1)}\right] B_{nm}\sin a_n x\cos b_m y-\dfrac{z a_n \gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1}\; C_{nm}\cos a_n x\sin b_m y \end{array}\right), \\[2ex] Y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l} -\left[\dfrac{z a_n b_m\, ch\gamma_{nm} z}{\nu-1}+\dfrac{\nu a_n b_m\, sh\gamma_{nm} z}{(\nu-1)\,\gamma_{nm}}\right] A_{nm}\cos a_n x\sin b_m y+ \\ +\left[-\dfrac{z b_m^2\, ch\gamma_{nm} z}{\nu-1}+\dfrac{\nu a_n^2\, sh\gamma_{nm} z}{\gamma_{nm}(\nu-1)}+\dfrac{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1}\right] B_{nm}\cos a_n x\sin b_m y- \\ -\dfrac{z b_m \gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1} C_{nm}\sin a_n x\cos b_m y \end{array}\right), \\[2ex] Z=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{z a_n \gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1}\; A_{nm}\cos a_n x\cos b_m y-\dfrac{z b_m \gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1}\; B_{nm}\cos a_n x\cos b_m y+ \\ +\left[\dfrac{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} z}{\nu-1}-\dfrac{z\gamma_{nm}^2 ch\gamma_{nm} z}{\nu-1}\right] C_{nm}\sin a_n x\sin b_m y \end{array}\right), \end{cases} \tag{2}$$

где $a_n=\dfrac{\pi\, n}{S}$, $b_m=\dfrac{\pi\, m}{R}$ - сокращенные обозначения;

A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} - коэффициенты двойных рядов (1), подлежащие определению;

$\gamma_{nm}=\sqrt{a_n^2+b_m^2}$ - упрощающее обозначение суммы квадратов коэффициентов.

Исходя из граничных условий, для поставленной задачи будем иметь три уравнения для напряжений, из которых выводятся коэффициенты A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}. Составим их:

$$\begin{cases} X\big|_{z=H}=0, \\ Y\big|_{z=H}=0, \\ Z\big|_{z=H}=-Q. \end{cases} \tag{3}$$

A_{nm}, B_{nm} равны нулю по условиям (3). Далее выполняем над Z из условий (3) процедуру Галеркина, используя свойство фундаментальности и ортогональности системы синусоидальных функций [3]. В результате для напряжения Z:

$$\left(\frac{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm} H}{\nu-1}-\frac{H\,\gamma_{nm}^2\, ch\gamma_{nm}\, H}{\nu-1}\right)\frac{S\,R}{4}C_{nm}=-\int_0^S\int_0^R Q\,\sin\frac{\pi\, l}{S}x\sin\frac{\pi\, p}{R}y\;dx\,dy\,, \qquad (4)$$

где $a_l=\dfrac{\pi\, l}{S}, b_p=\dfrac{\pi\, p}{R}$ - сокращенные обозначения;

$\gamma_{nm}=\sqrt{a_n^2+b_m^2}$ - упрощающее обозначение суммы квадратов коэффициентов.

Разрешив (4), находим коэффициент

$$C_{nm}=-\frac{4Q\,(\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{m\pi^2\, n\; S\, R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm}H-H\,\gamma_{nm}^2\, ch\gamma_{nm}\, H}\,.$$

Подставив C_{nm} в формулы для прогибов U, V, W в результате перехода от операторно-символических рядов к численным получим:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a_n\, z\, ch\gamma_{nm} z}{(\nu-1)}+\frac{a_n(1-2\nu)\; sh\gamma_{nm}\, z}{(\nu-1)\,\gamma_{nm}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{4Q\,(\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{m\pi^2\, n\; S\, R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm}H-H\,\gamma_{nm}^2\, ch\gamma_{nm}\, H}\right)\cos a_n x\,\sin b_m y,$$

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{b_m\, z\, ch\gamma_{nm} z}{(\nu-1)}+\frac{b_m(1-2\nu)\; sh\gamma_{nm} z}{(\nu-1)\,\gamma_{nm}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{4Q\,(\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{m\pi^2\, n\; S\, R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm}H-H\,\gamma_{nm}^2\, ch\gamma_{nm}\, H}\right)\sin a_n x\,\cos b_m y, \qquad (5)$$

$$W=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(ch\gamma_{nm}\, z-\frac{z\,\gamma_{nm} sh\gamma_{nm}\, z}{2(\nu-1)}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{4Q\,(\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{m\pi^2\, n\; S\, R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\, sh\gamma_{nm}H-H\,\gamma_{nm}^2\, ch\gamma_{nm}\, H}\right)\sin a_n x\,\sin b_m y.$$

Выписываем формулы для напряжений [2] и подставляем в них коэффициент C_{nm}:

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{z\, a_n^2\, ch\gamma_{nm}\, z}{\nu-1} - \frac{(2\, b_m^2\, \nu + a_n^2)\, sh\gamma_{nm}\, z}{(\nu-1)\ \gamma_{nm}} \right)\sin a_n x \sin b_m y\,,$$

$$\sigma_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{z\, b_m^2\, ch\gamma_{nm}\, z}{\nu-1} - \frac{(2\, a_n^2\, \nu + b_m^2)\, sh\gamma_{nm}\, z}{(\nu-1)\ \gamma_{nm}} \right)\sin a_n x \sin b_m y,$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a_n\, z\, ch\gamma_{nm} z}{(\nu-1)} + \frac{a_n (1-2\nu)\ sh\gamma_{nm} z}{(\nu-1)\, \gamma_{nm}} \right) b_m \times$$

$$\times\left(-\frac{4Q\ (\cos m\pi -1)(\cos n\pi -1)}{m\pi^2\ n\ S\ R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\ sh\gamma_{nm} H - H\, \gamma_{nm}^2\ ch\gamma_{nm}\ H} \right)\cos a_n x\ \cos b_m y + \qquad (6)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b_m\, z\, ch\gamma_{nm} z}{(\nu-1)} + \frac{b_m (1-2\nu)\ sh\gamma_{nm} z}{(\nu-1)\, \gamma_{nm}} \right) a_n \times$$

$$\times\left(-\frac{4Q\ (\cos m\pi -1)(\cos n\pi -1)}{m\pi^2\ n\ S\ R}\cdot\frac{\nu-1}{\gamma_{nm}\ sh\gamma_{nm} H - H\, \gamma_{nm}^2\ ch\gamma_{nm}\ H} \right)\cos a_n x\ \cos b_m y.$$

Для нахождения *u, v, w* необходимо *U, V, W* разделить на модуль сдвига $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ [1].

Выведем классическое решение для свободно опертой пластины. С ним будет сопоставляться предложенный метод.

Классическое решение получается из (5) и (6) путем замены численных $ch\ \gamma_{nm} z$, $sh\, \gamma_{nm} z$ на соответствующие им разложения Маклорена.

Задавая количество членов в разложениях, будем получать приближения точной теории. Взяв один член в разложении, получим классическую теорию пластин с учетом толщины *H*. Для прогиба *W* найдем:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4Q\ (\cos m\pi -1)(\cos n\pi -1)(\nu-1)}{\pi^2\ nm\ SR \left(\gamma_{nm}^2\, H + \dfrac{\gamma_{nm}^4\, H^3}{6} - \gamma_{nm}^2 H - \dfrac{\gamma_{nm}^4\, H^3}{2} \right)} \times$$

$$\times\left(ch\,\gamma_{nm}\ z - \frac{z\,\gamma_{nm}\ sh\gamma_{nm}\ z}{2(\nu-1)} \right)\sin a_n x \sin b_m y = \qquad (7)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{12\,Q\ \ (\cos m\pi -1)(\cos n\pi -1)(\nu-1)}{\pi^2\ nm\ \ \gamma_{nm}^4\ H^3\ SR}\left(ch\,\gamma_{nm}\ z - \frac{z\,\gamma_{nm}\ sh\gamma_{nm}\ z}{2(\nu-1)} \right)\sin a_n x \sin b_m y.$$

Разность гиперболических косинуса и синуса в числителе тоже необходимо разложить по предложенному способу, но перед разложением необходимо выделить в знаменателе коэффициент классической теории D [9]. Для этого результат W нужно разделить на коэффициент сдвига G. Результат имеет следующий вид:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{12Q\ (\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)(\nu-1)}{\pi^2\,nm\ \gamma_{nm}^4\,H^3\,SRG}\left(ch\,\gamma_{nm}\,z-\frac{z\,\gamma_{nm}\,sh\gamma_{nm}\,z}{2(\nu-1)}\right)\sin a_n x\sin b_m y=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{24Q\ (\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)(1-\nu^2)}{\pi^2\,nm\ \gamma_{nm}^4 H^3 E\,SR}\left(ch\,\gamma_{nm}\,z-\frac{z\,\gamma_{nm}\,sh\gamma_{nm}\,z}{2(\nu-1)}\right)\sin a_n x\sin b_m y= \qquad (8)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8Q\ (\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{\pi^2\,nm\ \gamma_{nm}^4\ D\ SR}\left(ch\,\gamma_{nm}\,z-\frac{z\,\gamma_{nm}\,sh\gamma_{nm}\,z}{2(\nu-1)}\right)\sin a_n x\sin b_m y.$$

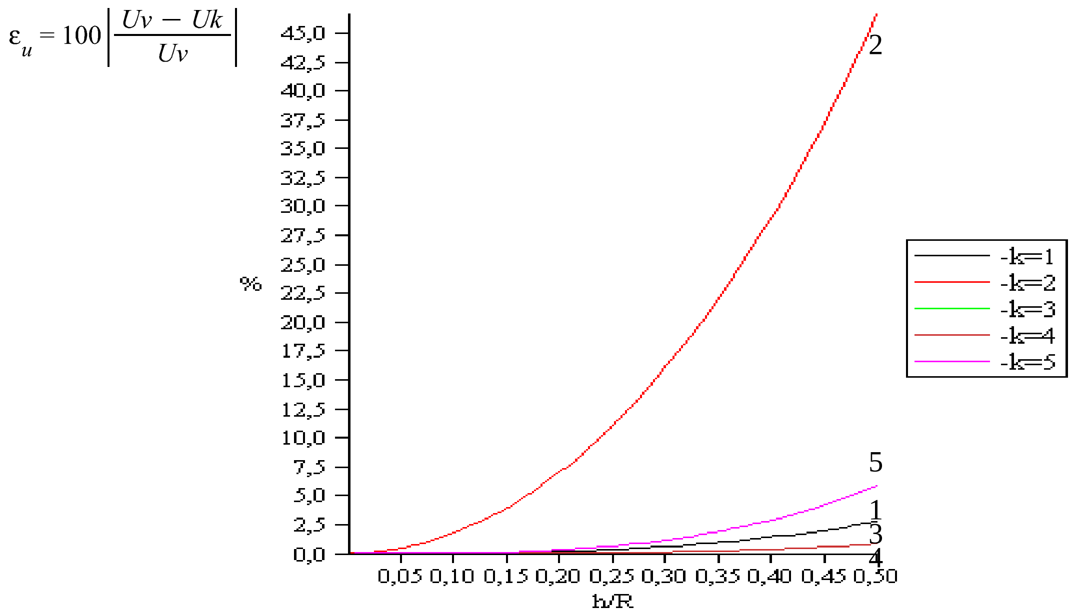
Здесь $D=\dfrac{E\,H^3}{3\,(1-\nu^2)}$ - поскольку задача ставится при z, которое меняется от 0 до H. Теперь, задав один член в разложениях $ch\ \gamma_{nm} z$, $sh\,\gamma_{nm} z$ по Маклорену в числителе, получим обычную классическую теорию пластин [6]:

$$w=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8Q\ (\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)}{\pi^2\,nm\gamma_{nm}^4\ D\ SR}\sin a_n x\sin b_m y. \qquad (9)$$

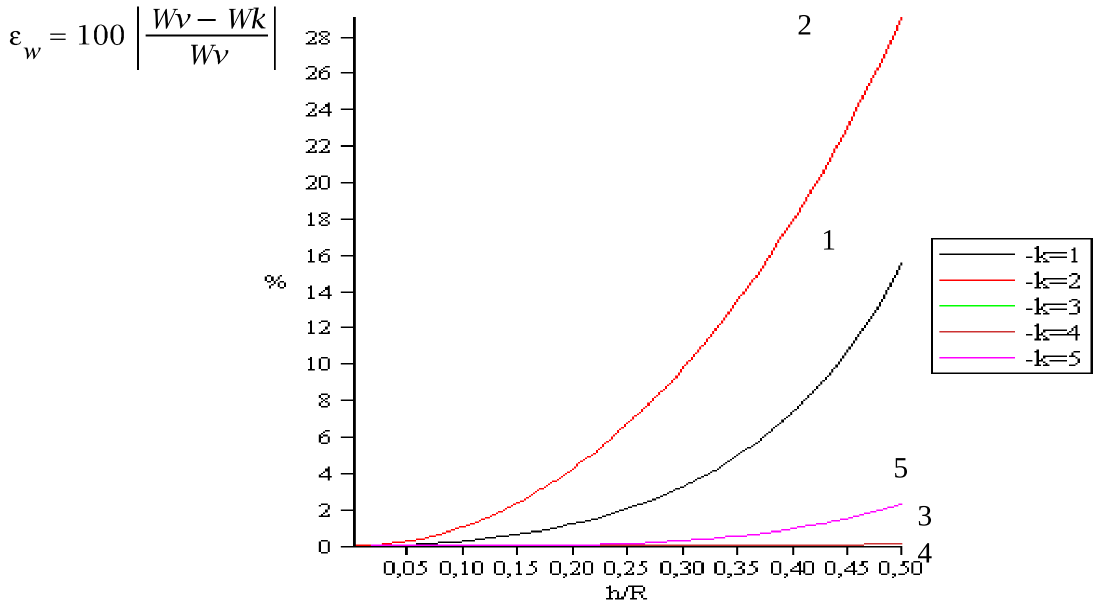
Все вышеизложенные выкладки автоматизированы и запрограммированы в Maple. Их осуществляет созданный авторами препроцессор. ЭВМ работает лишь с дискретным набором данных, бесконечные ряды численных решений (5), (6), (8) приходится ограничивать до определенного числа [7]. Таким образом, чтобы дать графическую интерпретацию выведенного решения, было взято по двадцать членов в двойных суммах рядов. Разработанная программа показывает разницу между точной и приближенной теориями в зависимости от безразмерного параметра H/R.

В процессе моделирования рассматриваемой выше задачи для заданных числовых характеристик безразмерного параметра длины S/R=5/2, безразмерного параметра ширины r=1, толщины H/R=0,5/2=0,25, были получены результаты в точках максимального различия между теориями. Эти результаты для перемещений u, w и напряжений σ_x, σ_y и соответствующих напряжениям моментов сравнивались с приближенными теориями. При росте безразмерного параметра толщины существенно влияют на величины перемещений и напряжений, неучтенные в классической теории члены высших порядков в разложениях Маклорена.

Всё это демонстрируют графики абсолютных погрешностей приближенных (k=1,2,3,4,5) теорий в сравнении с точной теорией в зависимости от параметра h/R. Для перемещения *U* в точке 0, *R*/2 и 0,5 *H/R* и прогиба *W* в точке *S*/2, *R*/2 и 0,5 *H/R*, параметр *h/R* меняется от 0,0001 до 0,5. В данных точках разность между значениями перемещений для точной и классической теорий максимальна, рис. 2.



а)



б)

Рис. 2 - Абсолютные погрешности для: а) перемещения u; б) прогиба w в %: индекс v – точная теория; индекс k – приближения (при k=1 – классика)

Для напряжения *Z* в точке 0, *R*/2 и 0,5 *H/R* на рис. 3 показаны абсолютные погрешности в зависимости от параметра толщины.

$$\varepsilon_Z = 100 \left| \frac{Zv - Zk}{Zv} \right|$$

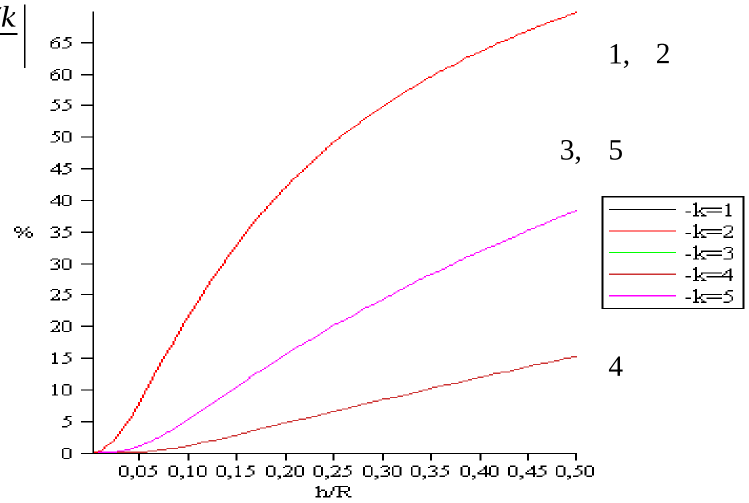


Рис. 3 - Абсолютные погрешности для Z в %:
индекс v – точная теория; индекс k – приближения (при k = 1 – классика)

Графики для абсолютных погрешностей напряжения Z в % при k=1 и k=2, k=3 и k=5 совпадают.

Аналогичным образом анализируются моменты M_x и M_y. M_x в точке S/5, R/2 и 0,5 H, M_y – точка S/2, R/2 и0,5 H. Графики изображены на рис. 4.

$$\varepsilon_{M_x} = 100 \left| \frac{M_{x\,v} - M_{x\,k}}{M_{x\,v}} \right|$$

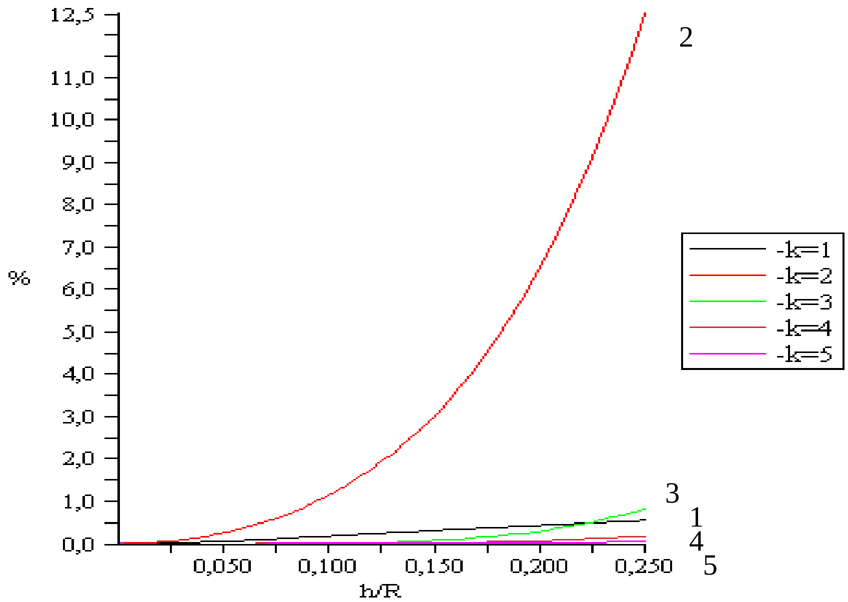


Рис. 4 а) - Абсолютные погрешности для момента M_x в %
(индекс v – точная теория; индекс k – приближения)

$$\varepsilon_{M_y} = 100\left|\frac{M_{y\,v} - M_{y\,k}}{M_{y\,v}}\right|$$

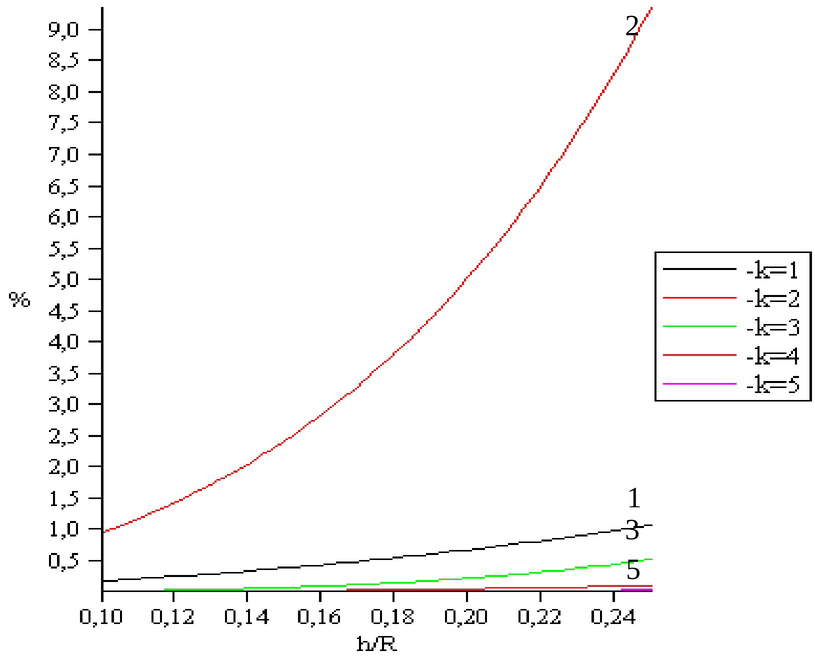


Рис. 4 б) - Абсолютные погрешности для момента M_y *в %*

(индекс v – точная теория; индекс k – приближения)

На графиках были предоставлены результаты сравнения классической и точной теорий. Все результаты получены в разработанной программе благодаря использованию графических средств системы Maple.

В работе был предложен метод решения трехмерной задачи. Все результаты были проверены и сопоставлены с классическим решением.

Рассмотренный выше метод можно применять для решения более сложных задач, где анализируется напряженно-деформированное состояние тел, путем введения в разработку новых методик. Путем усложнения граничных и начальных условий можно ставить и решать более сложные задачи для пластин, плит и т.д.

Весь процесс моделирования был реализован в Maple – новой системе программирования аналитических операций. Создав препроцессор и библиотеку, авторы смогли приспособить систему для решения сложных аналитических проблем, возникающих при решении поставленной задачи.

Литература

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости (3-е издание). - М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.

3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Талаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – с.

4. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.: ил.

5. Толок В.А., Шапар В.В. Операторно-символьные ряды Власова В.З. в решении задач теории упругости в системе Maple // Гідроакустичний журнал. – 2006. - № 3. – с. 66-74.

6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. – 508 с.

7. Матросов А.В. Maple6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 528 с.: ил.

8. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. – 933 с.

9. Треффц Е. Математическая теория упругости. - Л.-М.: Гос. тех.-теор. издат., 1934. – 166 с.