УДК 539.3, 519.6

ОПЕРАТОРНО-СИМВОЛЬНЫЕ РЯДЫ ВЛАСОВА В.З. В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СИСТЕМЕ MAPLE

© В.А. Толок, В.В. Шапар, 2006

Запорожский институт имени гетмана Петра Сагайдачного МАУП, г. Запорожье

У роботі запропонований метод моделювання в системі MAPLE рішення граничних завдань теорії пружності методом початкових функцій. Розроблено формальний підхід опису і рішення завдань теорії пружності за допомогою символічних рядів Власова В.З. Для реалізації завдань в системі MAPLE розроблений спеціальний передпроцесор.

В работе предложен метод моделирования в системе MAPLE решения граничных задач теории упругости методом начальных функций. Разработан формальный подход описания и решения задач теории упругости при помощи символических рядов Власова В.З. Для реализации задач в системе MAPLE разработан специальный предпроцессор.

Simulation method of solving boundary tasks of elasticity theory using initial functions method in the system MAPLE has been proposed in the paper. Formal approach of describing and solving tasks of elasticity theory using V.Z.Vlasov symbolic series has been developed. Special preprocessor has been developed the tasks to be implemented in the system MAPLE.

В работе [1] Власов В.З. с помощью разложения в ряд Макларена по одной из координат построил новую форму общего решения двух- и трехмерной задачи теории упругости в отсутствии массовых сил. В пространстве выделяется плоскость z=0, определяются искомые величины на этой плоскости (начальные функции) и через них выражаются основные величины в пространстве – напряжения и перемещения. Важно то, что практически получались формулы с понижением размерности на единицу. В связи с громоздкостью полученных выражений, Власовым В.З. [1] были предложены символьные обозначения разложений, использующих некоторую аналогию методу разложения Макларена и разложениям экспоненциальных, гиперболических и тригонометрических функций, это позволило компактно записать сложные выражения.

В настоящей работе эта аналогия обобщается и вводится понятие так называемых операторно-символьных рядов Власова В.З., операций над ними с моделированием последних в системе MAPLE и показана возможность решения некоторых задач теории упругости (Т.У.).

В случае отсутствия массовых сил [2-4] все основные искомые величины Т.У. удовлетворяют бигармоническому уравнению:

$$\nabla\nabla U = 0. \qquad (1)$$

Операторные функции будем вводить через представление их в разложении в ряд Макларена по переменной z. Так, например, будем иметь:

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(x,y,z)^k \Big|_{z=0} \frac{z^k}{k!}=f(x,y,z)EXP(d_{xy}z)=$$

$$=f(x,y,z)CH(d_{xy}z)+f(x,y,z)SH(d_{xy}z), \qquad (2)$$

где $d_{xy}=\sqrt{\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}}$.

Если теперь построить функцию с условием, чтобы она удовлетворяла бигармоническому уравнению, то получим:

$$f(x,y,z)=f_0(x,y)\cos(d_{xy}z)+f_1(x,y)\sin(d_{xy}z)+$$

$$+f_2(x,y)\,z\cos(d_{xy}z)+f_3(x,y)\,z\sin(d_{xy}z). \qquad (3)$$

И, что важно: это $f(x,y,z)\big|_{z=0}=f_0(x,y)$ – начальная функция.

Следуя Власову В.З. [1], в виде (3) представим U(x,y,z), V(x,y,z), W(x,y,z), Z(x,y,z), Y(x,y,z), X(x,y,z) и выразим величины с индексом U_i, V_i, W_i, Z_i, Y_i, X_i ($i\neq 0$) через U_0, V_0, W_0, Z_0, Y_0, X_0. С этой целью воспользуемся соотношениями Власова В.З.[1]:

$$\frac{\partial}{\partial z}U=-\frac{\partial}{\partial x}W+X,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}V=-\frac{\partial}{\partial y}W+Y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}W=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}U+\frac{\partial}{\partial y}V\right)+Z\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}Z=-\frac{\partial}{\partial x}X-\frac{\partial}{\partial y}Y, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}Y=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}U-\frac{\partial^2}{\partial x^2}V-\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}Z,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}X=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}V-\frac{\partial^2}{\partial y^2}U-\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x}Z.$$

Далее на MAPLE проводим следующий ряд операций [5-7]:

- подставляем основные соотношения в виде (3) в систему (4) назвав ее R;

- полагая в полученной системе R z=0 и дифференцируя затем по z и снова полагая z=0, получаем относительно индексных переменных U_i, V_i, W_i, Z_i, Y_i, X_i четыре группы уравнений:

>eval(value(R), z = 0); Eval('R', z = 0) = %

$$R\big|_{z=0} = [\gamma U_1 + U_2 = -\alpha W_0 + X_0,\ \gamma V_1 + V_2 = -\beta W_0 + Y_0,\ \gamma W_1 + W_2 =$$

$$= -\frac{\nu(\alpha U_0 + \beta V_0)}{1-\nu} + \frac{(1-2\nu) Z_0}{2(1-\nu)},\ \gamma Z_1 + Z_2 = -\alpha X_0 + \beta Y_0,\ \gamma Y_1 + Y_2 = \tag{5}$$

$$= -\frac{(1+\nu)\alpha\beta U_0}{1-\nu} - \alpha^2 V_0 - \frac{2\beta^2 V_0}{1-\nu} - \frac{\nu\beta Z_0}{1-\nu},\ \gamma X_1 + X_2 =$$

$$= -\frac{(1+\nu)\alpha\beta V_0}{1-\nu} - \beta^2 U_0 - \frac{2\alpha^2 U_0}{1-\nu} - \frac{\nu\alpha Z_0}{1-\nu}],$$

>eval(diff(value(R), z), z = 0); Eval(Diff('R', z), z = 0) = %

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} R\right)\Bigg|_{z=0} = [-\gamma^2 U_0 + 2\gamma U_3 = -\alpha(\gamma W_1 + W_2) + \gamma X_1 + X_2,\ -\gamma^2 V_0 + 2\gamma V_3 =$$

$$= -\beta(\gamma W_1 + W_2) + \gamma Y_1 + Y_2,\ -\gamma^2 W_0 + 2\gamma W_3 = -\frac{\nu\big(\alpha(\gamma U_1 + U_2) + \beta(\gamma V_1 + V_2)\big)}{1-\nu} +$$

$$+ \frac{(1-2\nu)(\gamma Z_1 + Z_2)}{2(1-\nu)},\ -\gamma^2 Z_0 + 2\gamma Z_3 = -\alpha(\gamma X_1 + X_2) - \beta(\gamma Y_1 + Y_2),$$

$$-\gamma^2 Y_0 + 2\gamma Y_3 = -\frac{(1+\nu)\alpha\beta(\gamma U_1 + U_2)}{1-\nu} - \alpha^2(\gamma V_1 + V_2) - \frac{2\beta^2(\gamma V_1 + V_2)}{1-\nu} - \frac{\nu\beta(\gamma Z_1 + Z_2)}{1-\nu},$$

$$-\gamma^2 X_0 + 2\gamma X_3 = -\frac{(1+\nu)\alpha\beta(\gamma V_1 + V_2)}{1-\nu} - \beta^2(\gamma U_1 + U_2) - \frac{2\alpha^2(\gamma U_1 + U_2)}{1-\nu} - \frac{\nu\alpha(\gamma Z_1 + Z_2)}{1-\nu}],$$

> eval(diff(value(R), `$`(z, 2)), z = 0); Eval(Diff('R', `$`(z, 2)), z = 0) = %

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}R\right)\Bigg|_{z=0}=[-\gamma^2 U_1-3\gamma U_2=-\alpha\left(-\gamma W_0+2W_3\right)-\gamma X_0+2X_3,\ -\gamma^2 V_1-3\gamma V_2=$$

$$=-\beta\left(-\gamma W_0+2W_3\right)-\gamma Y_0+2Y_3,\ -\gamma^2 W_1-3\gamma W_2=-\frac{\nu\left(\alpha\left(-\gamma U_0+2U_3\right)+\beta\left(-\gamma V_0+2V_3\right)\right)}{1-\nu}+$$

$$+\frac{(1-2\nu)\left(-\gamma Z_0+Z_3\right)}{2\left(1-\nu\right)},\ -\gamma^2 Z_1-3\gamma Z_2=-\alpha\left(-\gamma X_0+2X_3\right)-\beta\left(-\gamma Y_0+Y_3\right), \qquad (6)$$

$$-\gamma^2 Y_1-3\gamma Y_2=-\frac{(1+\nu)\alpha\beta\left(-\gamma U_0+2U_3\right)}{1-\nu}-\alpha^2\left(-\gamma V_0+2V_3\right)-\frac{2\beta^2\left(-\gamma V_0+2V_3\right)}{1-\nu}-\frac{\nu\beta\left(-\gamma Z_0+Z_3\right)}{1-\nu},$$

$$-\gamma^2 X_1-3\gamma X_2=-\frac{(1+\nu)\alpha\beta\left(-\gamma V_0+2V_3\right)}{1-\nu}-\beta^2\left(-\gamma U_0+2U_3\right)-\frac{2\alpha^2\left(-\gamma U_0+2U_3\right)}{1-\nu}-\frac{\nu\alpha\left(-\gamma Z_0+Z_3\right)}{1-\nu}],$$

```
>eval(diff(value(R), `$`(z, 3)), z = 0); Eval(Diff('R', `$`(z, 3)), z = 0) = %
```

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}R\right)\Bigg|_{z=0}=[\gamma^2 U_0-4\gamma U_3=-\alpha\left(-\gamma W_1-3W_2\right)-\gamma X_1+3X_2,\ \gamma^2 V_0-4\gamma V_3=-\beta\left(-\gamma W_1-3W_2\right)$$

$$-\gamma Y_1+3Y_2,\ \gamma^2 W_0-4\gamma W_3=-\frac{\nu\left(\alpha\left(-\gamma U_1-3U_2\right)+\beta\left(-\gamma V_1-3V_2\right)\right)}{1-\nu}+\frac{(1-2\nu)\left(-\gamma Z_1-3Z_2\right)}{2\left(1-\nu\right)},$$

$$\gamma^2 Z_0-4\gamma Z_3=-\alpha\left(-\gamma X_1-3X_2\right)-\beta\left(-\gamma Y_1-3Y_2\right),$$

$$\gamma^2 Y_0-4\gamma Y_3=-\frac{(1+\nu)\alpha\beta\left(-\gamma U_1-3U_2\right)}{1-\nu}-\alpha^2\left(-\gamma V_1-3V_2\right)-\frac{2\beta^2\left(-\gamma V_1-3V_2\right)}{1-\nu}-\frac{\nu\beta\left(-\gamma Z_1-3Z_2\right)}{1-\nu},$$

$$\gamma^2 X_0-4\gamma X_3=-\frac{(1+\nu)\alpha\beta\left(-\gamma V_1-3V_2\right)}{1-\nu}-\beta^2\left(-\gamma U_1-3U_2\right)-\frac{2\alpha^2\left(-\gamma U_1-3U_2\right)}{1-\nu}-\frac{\nu\alpha\left(-\gamma Z_1-3Z_2\right)}{1-\nu}],$$

- первые три используем для выражения индексных переменных через U_0, V_0, W_0, Z_0, Y_0, X_0, а последняя группа удовлетворяется тождественно и этим доказывается полное удовлетворение уравнений Т.У.

Таким образом, получаем формулы, точно совпадающие с соотношениями в работе [1].

Для задачи плоской деформации таким же способом было получено:

$$U=\left(\cos(\gamma y)+\frac{\gamma y\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)U_0+\left(\frac{(4\nu\gamma-2\gamma)\sin(\gamma y)}{4\gamma(\nu-1)}+\frac{\gamma y\cos(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)V_0+$$

$$+\left(\frac{y\sin(\gamma y)}{4(\nu-1)}\right)Y_0-\left(\frac{(-4\nu+3)\sin(\gamma y)}{4\gamma(\nu-1)}+\frac{y\cos(\gamma y)}{4(\nu-1)}\right)X_0,$$

$$V=\left(\frac{(4\nu\gamma-2\gamma)\sin(\gamma y)}{4\gamma(\nu-1)}+\frac{\gamma y\cos(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)U_0+\left(\cos(\gamma y)-\frac{\gamma y\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)V_0+$$

$$+\left(\frac{(4\nu-3)\sin(\gamma y)}{4\gamma(\nu-1)}+\frac{y\cos(\gamma y)}{4(\nu-1)}\right)Y_0+\left(\frac{y\sin(\gamma y)}{4(\nu-1)}\right)X_0,$$

$$Y=\left(\frac{\gamma^2 y\sin(\gamma y)}{\nu-1}\right)U_0+\left(\frac{\gamma\sin(\gamma y)}{\nu-1}+\frac{\gamma^2 y\cos(\gamma y)}{\nu-1}\right)V_0+ \tag{7}$$

$$+\left(\cos(\gamma y)-\frac{\gamma y\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)Y_0+\left(\frac{(1-2\nu)\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}+\frac{\gamma y\cos(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)X_0,$$

$$X=\left(\frac{\gamma\sin(\gamma y)}{\nu-1}+\frac{\gamma^2 y\cos(\gamma y)}{\nu-1}\right)U_0+\left(\frac{\gamma^2 y\sin(\gamma y)}{\nu-1}\right)V_0+$$

$$\left(\frac{(2\nu-1)\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}+\frac{\gamma y\cos(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)Y_0+\left(\cos(\gamma y)+\frac{\gamma y\sin(\gamma y)}{2(\nu-1)}\right)X_0,$$

$$\gamma=\frac{\partial}{\partial x},$$

что также точно совпадает с соотношением в работе [1].

Для иллюстрации на MAPLE [5-7] проведем решение задачи для свободно опертой по краям толстой плиты, изгибаемой нагрузкой постоянной интенсивности P. С этой целью решение будем искать в виде рядов:

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cos(\alpha_n x),\ V_0=\sum_{n=1}^{\infty}v_n\sin(\alpha_n x),$$

$$Y_0=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\sin(\alpha_n x),\ X_0=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cos(\alpha_n x),\qquad \alpha_n=\frac{n\pi}{l}, \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), получим:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_n x)}{4\alpha_n(\nu-1)}((-2y\alpha_n^2\sinh(y\alpha_n)+4(\nu-1)\alpha_n\cosh(y\alpha_n))u_n+$$

$$+(2y\alpha_n^2\cosh(y\alpha_n)+2(1-2\nu)\alpha_n\sinh(y\alpha_n))v_n+y\alpha_n\sinh(y\alpha_n)y_n+$$

$$+(-y\alpha_n\cosh(y\alpha_n)+(4\nu-3)\sinh(y\alpha_n))x_n),$$

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_n x)}{4\alpha_n(\nu-1)}((-2y\alpha_n^2\cosh(y\alpha_n)-2(2\nu-1)\alpha_n\sinh(y\alpha_n))u_n+$$

$$+(2y\alpha_n^2\sinh(y\alpha_n)+4(\nu-1)\alpha_n\cosh(y\alpha_n))v_n+$$

$$+(y\alpha_n\cosh(y\alpha_n)-(3-4\nu)\sinh(y\alpha_n))y_n-y\alpha_n\sinh(y\alpha_n)x_n), \qquad (9)$$

$$Y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_n x)}{2(\nu-1)}(-2y\alpha_n^2\sinh(y\alpha_n)u_n+(-2\alpha_n\sinh(y\alpha_n)+2y\alpha_n^2\cosh(y\alpha_n))v_n+$$

$$+(y\alpha_n\sinh(y\alpha_n)+2(\nu-1)\cosh(y\alpha_n))y_n+((2\nu-1)\sinh(y\alpha_n)-y\alpha_n\cosh(y\alpha_n))x_n),$$

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_n x)}{2(\nu-1)}((-2\alpha_n\sinh(y\alpha_n)-2y\alpha_n^2\cosh(y\alpha_n))u_n+2y\alpha_n^2\sinh(y\alpha_n)v_n+$$

$$+((2\nu-1)\sinh(y\alpha_n)+y\alpha_n\cosh(y\alpha_n))y_n+(-y\alpha_n\sinh(y\alpha_n)+2(\nu-1)\cosh(y\alpha_n))x_n).$$

Далее, выполняя процедуру Галёркина, решаем систему:

$$\begin{cases}\int_0^1 Y\big|_{y=h}\sin(\alpha_m x)\,dx=\int_0^1 P\sin(\alpha_m x)\,dx\\ \int_0^1 X\big|_{y=h}\sin(\alpha_m x)\,dx=0\end{cases}$$

$$y_n=0, x_n=0.$$

Полученное решение имеет вид:

$$u_n = \frac{-4Pe^{ha_n}\, h\left(e^{h\alpha_n}-1\right)\left(e^{h\alpha_n}+1\right)\left(\cos(\alpha_n l)-1\right)\left(\nu-1\right)}{\alpha_n \ell(2e^{ha_n}h\alpha_n+1-e^{2ha_n})(2e^{ha_n}h\alpha_n-1+e^{2ha_n})},$$

$$v_n = \frac{-4Pe^{ha_n}\left(e^{2h\alpha_n}-1+h\alpha_n\left(e^{2h\alpha_n}+1\right)\right)\left(\cos(\alpha_n l)-1\right)\left(\nu-1\right)}{\alpha_n \ell(2e^{ha_n}h\alpha_n+1-e^{2ha_n})(2e^{ha_n}h\alpha_n-1+e^{2ha_n})}. \qquad (10)$$

Решение (10) сходится достаточно быстро, и хорошо согласуется с функцией процесса, оно представлено на графиках (рис. 1):

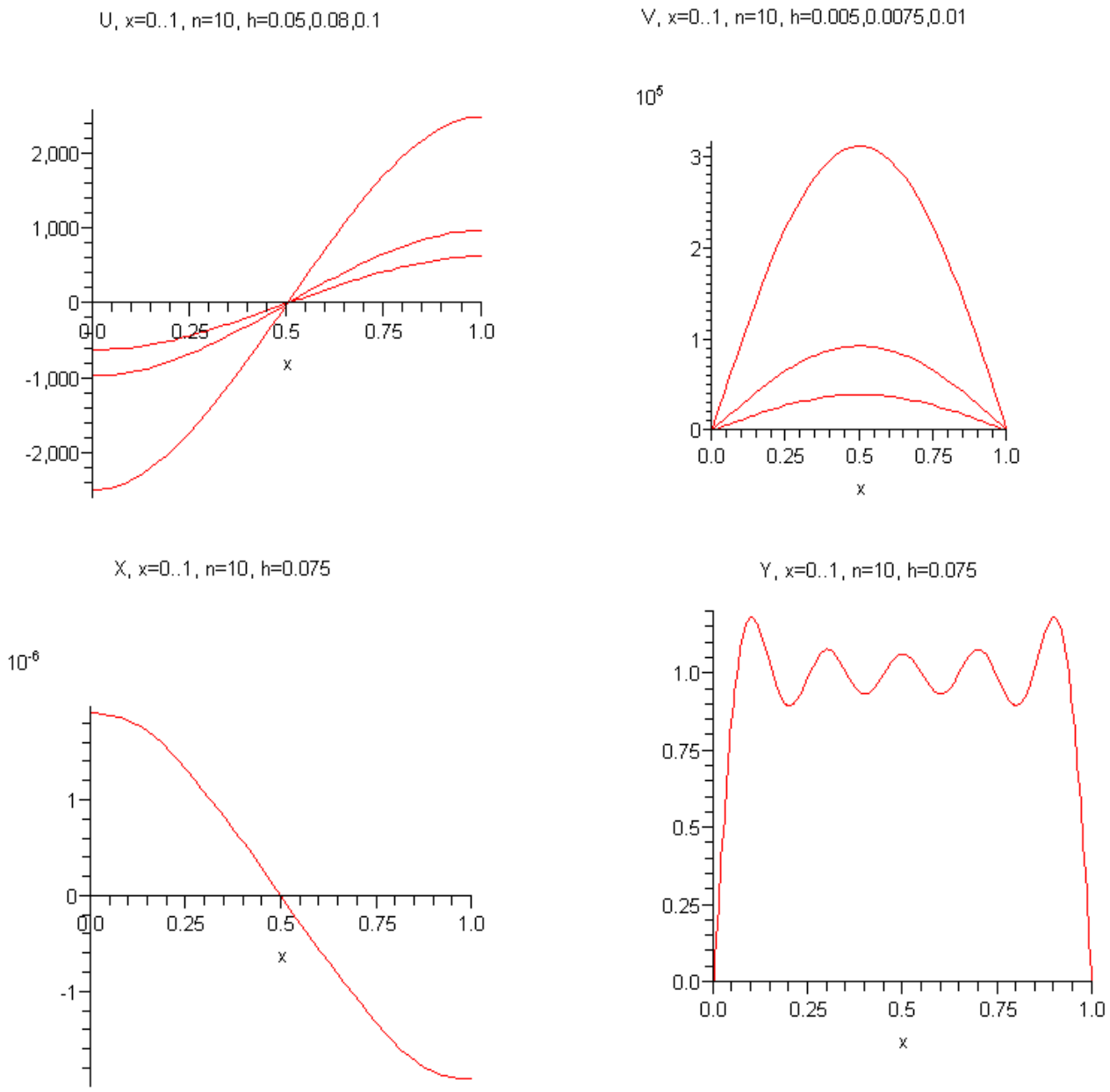

Рис.1. Графики перемещений и напряжений U,V,Y,X.

При реализации предлагаемого метода удобно использовать преобразование Фурье [3]. Решим, например, классическую задачу Фламана, решение которой описано в [3]. Так

как у нас всего два граничных условия и на бесконечности решение должно убывать, то берем следующий операторно-символический ряд:

$$\sigma_{33}=(\sigma_{33}^{0}(x_1)+x_3\,\sigma_{33}^{1})\,\mathrm{EXP}(dx\,x_3)\,. \tag{11}$$

Отметим что (11) - бигармоническая функция. После преобразования Фурье будем иметь:

$$\sigma_{33}^{F}=(A+x_3\,B)\,e^{-|q|x_3}\,,$$

$$\sigma_{13}^{F}=\frac{i\,e^{-|q|x_3}(-B+|q|A+|q|\,x_3\,B)}{q}\,, \tag{12}$$

$$\sigma_{11}^{F}=\frac{|q|\,e^{-|q|x_3}(-2B+|q|A+|q|\,x_3\,B)}{q^2}\,.$$

Причём:

$$A=\delta_{j3},\ B=i\,q\,\delta_{j3}+|q|\delta_{j3}\,. \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), получаем следующий вид изображения напряжений:

$$\sigma_{11}^{F}=e^{-|q|x_3}\left(i(2\mathrm{sign}(q)-q\,x_3)\,\delta_{j1}+(1-|q|\,x_3)\,\delta_{j3}\right),$$

$$\sigma_{13}^{F}=e^{-|q|x_3}\left((1-|q|\,x_3)\,\delta_{j1}+i\,q\,x_3\,\delta_{j3}\right), \tag{14}$$

$$\sigma_{11}^{F}=e^{-|q|x_3}\left(i\,q\,x_3\,\delta_{j1}+(1+|q|\,x_3)\,\delta_{j3}\right).$$

Используя (14), находим отображения перемещений, применив обратное преобразование Фурье, получаем решение задачи Фламана:

$$u_{31}=\frac{1}{2\pi\mu}\left((1-2\nu)\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)-\frac{x_1 x_3}{r^2}\right),$$

$$u_{33}=-\frac{1}{2\pi\mu}\left((1-2\nu)(\ln(r)+C)-\frac{x_3^2}{r^2}\right),$$

$$u_{11}=\frac{1}{2\pi\mu}\left((1-2\nu)(\ln(r)+C)+\frac{x_3^2}{r^2}\right), \qquad (15)$$

$$u_{13}=-\frac{1}{2\pi\mu}\left((1-2\nu)\mathrm{arctg}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)+\frac{x_1 x_3}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{113}=\sigma_{311}=\frac{2x_1^2 x_3}{\pi r^4}, \qquad \sigma_{133}=\sigma_{313}=\frac{2x_1 x_3^2}{\pi r^4},$$

$$\sigma_{333}=\frac{2x_3^3}{\pi r^4}, \qquad \sigma_{111}=\frac{2x_1^3}{\pi r^4}. \qquad (16)$$

Таким образом, в работе предложен метод компьютерной реализации на базе операторно-символьных рядов Власова В.З. решения граничных задач Т.У. с помощью системы MAPLE. С этой целью разработан в MAPLE специальный предпроцессор.

Литература

1. Власов В.З. и Леонтьев Н.Н. Балки плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория Упругости. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Талаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. Кац А.М. Теория Упругости. – Санкт-Петербург, 2002
5. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. – Москва, 2003.
6. Аладьев В.З. Эффективная работа в Maple 6/7. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
7. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006