

УДК 534.222.2

## О НЕЛИНЕЙНОМ ОТКЛИКЕ СЛОЯ НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

© Л.Е. Собисевич, А.Л. Собисевич, 2004

Объединенный институт физики Земли имени О.Ю.Шмидта РАН, г. Москва

Проблеми нелінійної акустичної діагностики викликають підвищену зацікавленість у зв'язку з перспективами рішення важливих прикладних задач. Нелінійний відклик, що спостерігається при акустичному опроміненні мікропузирків газу в рідині, тріщин та флюїдонасичених пор у твердому тілі, затиснутого контакту шорстких поверхонь, використовується при діагностиці матеріалів, конструкцій і геологічних структур. Відновлення характеристик розсіюючої неоднорідності вимагає аналізу складних зворотніх задач томографічного типу. Для їх успішного рішення необхідні прямі дані з нелінійного відображення, проходження, розсіяння хвиль, але їх вкрай мало. За цих обставин необхідно узагальнити рішення класичних лінійних задач, розглянувши їх в нелінійній постановці.

Проблемы нелинейной акустической диагностики привлекают повышенный интерес в связи с перспективами решения важных прикладных задач. Нелинейный отклик, который наблюдается при акустическом облучении микропузырьков газа в жидкости, трещин и флюидонасыщенных пор в твёрдом теле, поджатого контакта шероховатых поверхностей, используется при диагностике материалов, конструкций и геологических структур. Восстановление характеристик рассеивающей неоднородности требует анализа сложных обратных задач томографического типа. Для их успешного решения нужны прямые данные по нелинейному отражению, прохождению, рассеянию волн, но их крайне мало. Это обстоятельство диктует необходимость обобщить решения классических линейных задач, рассмотрев их в нелинейной постановке.

Nonlinear acoustic diagnostics questions attract higher attention in connection with the perspective of solving of important applied problems. Nonlinear response, that is observed when acoustic beaming of gas micro-bubbles in liquid, splits and fluid saturated pores in solids, rough surface contact, is used in diagnostics of materials, structures and geological configurations. The reconstruction of characteristics of scattering irregularity needs the analysis of difficult inverse problems of tomography. For successful solution, it is important to have the straight nonlinear reverberation data, but they are not enough. This fact requires generalization of the general linear problem solutions under nonlinear consideration.

Проблеми нелинейної акустичної діагностики приваляють підвищений інтерес в зв'язку з перспективами рішення важливих прикладних задач. Нелінійний відклик, який спостерігається при акустичному облученні мікропузирків газу в жидкості, тріщин і флюїдонасичених пор в твёрдом теле, поджатого контакта шероховатых поверхностей, використовується при діагностиці матеріалів, конструкцій і геологічних структур. К примеру, величина акустического отклика облака пузырьков в воде соответствует нелинейному параметру  $\varepsilon \sim 10^3$ , в то время, как для воды без пузырьков  $\varepsilon \approx 3.5$ , а для воздуха  $\varepsilon = 1.2$ .

Вообще говоря, восстановление характеристик рассеивающей неоднородности требует анализа сложных обратных задач томографического типа. Для их успешного решения нужны прямые данные по нелинейному отражению, прохождению, рассеянию волн, но их крайне мало. Это обстоятельство диктует необходимость обобщить решения классических линейных задач, рассмотрев их в нелинейной постановке.

Задача о падении плоской волны на слой занимает особое место. Она довольно проста и может быть решена аналитически. Кроме того, она имеет непосредственное отношение к описанию отклика пелены всплывающих пузырьков в воде или плоского шероховатого контакта. Наконец, слой служит моделью более сложных неоднородностей; его отклик позволяет представить себе спектральный состав и структуру поля иных нелинейных рассеивателей.

Рассмотрим слой, плоские границы которого расположены при  $x = 0$  и  $x = h$  (рис. 1).

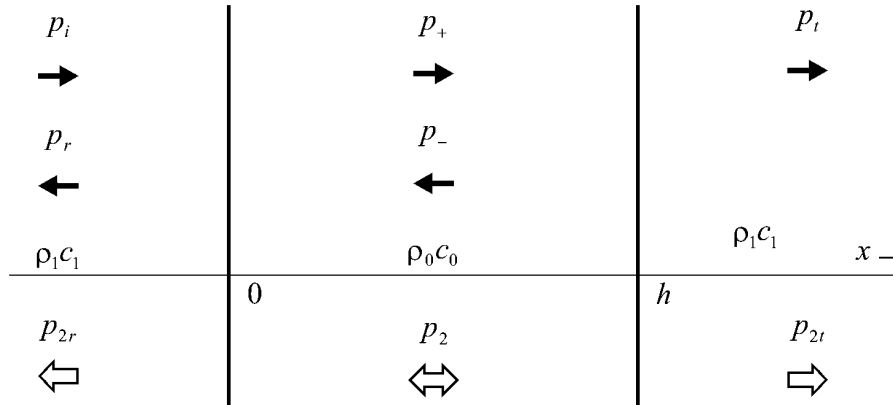


Рис. 1. К задаче о падении плоской волны на слой.

Внутри него находится среда, характеризующая плотностью  $\rho_0$ , скоростью распространения звуковых волн  $c_0$  и параметром нелинейности  $\varepsilon_0$ . Слой окружен средой с параметрами  $\rho_1, c_1$  и  $\varepsilon_1$  соответственно. Считаем, что отношение импедансов и волновая толщина слоя малы:

$$\zeta = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1} \ll 1, \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{h}{2c_0 t_0} \ll 1,$$

здесь  $t_0$  – характерная длительность или обратная частота импульсного воздействия.

Строгое решение линейной задачи позволяет совершить предельный переход к случаю (1), отвечающему, например, тонкому слою воздуха в воде, контакту или трещине в твёрдом теле.

$$\left( \frac{d}{d\tau} + \frac{\zeta}{\Delta} \right) \begin{pmatrix} p_{\pm} \\ p_t \\ p_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta/(2\Delta) \\ \zeta/\Delta \\ -d/d\tau \end{pmatrix} p_i(\tau) \tag{2}$$

В решении (2) приняты обозначения:  $\tau = t/t_0$ ;  $p_i$  – форма падающего на слой импульса давления (со стороны отрицательных значений  $x$  на границу  $x = 0$ );  $p_t$  – форма импульса, прошедшего через слой в область  $x > h$ ;  $p_r$  – форма отражённого сигнала, бегущего навстречу падающему,  $p_+$  и  $p_-$  – две волны в слое, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$  соответственно.

Профиль прошедшего сигнала выражается через падающий формулой:

$$p_t = \frac{\zeta}{\Delta} \int_{-\infty}^{\tau} p_i(\tau') \exp \left[ -\frac{\zeta}{\Delta} (\tau - \tau') \right] d\tau' \tag{3}$$

Отражённый сигнал, в соответствии с (2), пропорционален производной (с обратным знаком) от (3) или равен разности:  $p_r = p_t - p_i$ . Легко показать также, что профили  $p_r$  и  $p_t$

взаимно ортогональны; сумма энергий, переносимых этими волнами, в точности равна энергии падающего импульса  $p_i$ . Кроме того, для тонкого слоя во всех трёх областях  $x < 0$ ,  $0 < x < h$  и  $x > h$  давления одинаковы в любой момент времени:  $p_i + p_r = p_+ + p_- = p_t$ . Очевидно, это равенство сохранится и в нелинейной задаче.

Аналогичный подход с учётом нелинейных свойств слоя приводит вместо (2) к следующему уравнению:

$$\frac{d}{d\tau} f(p) + \frac{\zeta}{\Delta} p = \frac{\zeta}{\Delta} p_i(\tau) \quad (4)$$

где  $p = p_+ + p_-$  – внутреннее поле в слое, изменение во времени которого совпадает с формой прошедшего импульса;  $f(p)$  – зависимость плотности от давления:

$$f(p) = c_0^2 \rho = p - \frac{\varepsilon_0}{c_0^2 \rho_0} p^2 + \frac{\chi_0}{(c_0^2 \rho_0)^2} p^3 + \dots \quad (5)$$

Правая часть (5) – это разложение в ряд по степеням  $p$ , справедливое для слабо нелинейного отклика;  $\varepsilon_0$ ,  $\chi_0$  – коэффициенты квадратичной и кубической нелинейностей. Заметим, что во многих случаях отклик нельзя считать малым; пример точного решения приведён ниже. Наконец, при необходимости учесть «память» среды в уравнении состояния (5) (или аналогичном соотношении «напряжение – деформация» для твёрдых тел) вместо (5) следует использовать более общие функциональные соотношения, например ряды типа Вольтерра-Фреше.

В том случае, если слой образован пеной пузырьков в воде, легко рассчитать первые члены такого ряда:

$$\rho = \int_0^\infty c^2(t_1) p(t-t_1) dt_1 - \int \int \int \varepsilon(t_1, t_2, t_3) p(t-t_1-t_2) p(t-t_1-t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (6)$$

где

$$c^2 = \frac{\rho_1 n v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_1)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho_1 n g v^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t_1} \sin\left(t_1 \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right) \sin(\omega_0 t_2) \sin(\omega_0 t_3) \quad (7)$$

и введены следующие обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{3c_0^2}{R_0^2}, \quad g = \frac{3\varepsilon_0}{4\pi R_0^3}, \quad v = \frac{4\pi R_0^2}{\rho_0}, \quad \delta = \frac{1}{2} v \rho_1 c_1 n h \quad (8)$$

здесь  $R_0$  – равновесный радиус пузырьков,  $n$  – их число в единице объёма,  $\omega_0$  – резонансная частота отдельного пузырька.

Обычно добротность  $\omega_0/(2\delta)$  колебаний слоя мала, и его отклик может быть описан уравнением (4), коэффициент которого изменён на  $\zeta/(v\Delta)$ , то есть отличается от прежнего наличием  $v = n(4\pi R_0^3/3)$  – объёмной концентрации газа.

В случае контакта шероховатых поверхностей уравнение (4) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( p - \frac{\beta}{2K^2} p^2 \right) - \frac{2K}{\rho_1 c_1} p = \frac{2K}{\rho_1 c_1} p_i \quad (9)$$

где

$$K = E \int_{h_0}^{\infty} w(l) \frac{dl}{l}, \quad \beta = E \frac{w(h_0)}{h_0} \quad (10)$$

$E$  – модуль Юнга для среды,  $w(l)$  – вероятностное распределение «высот» микровыступов шероховатой поверхности,  $h_0(P)$  – равновесная толщина слоя (в отсутствие зондирующего сигнала), зависящая от приложенного статического давления  $P$ .

Итак, отклик ряда конкретных неоднородностей описывается уравнением (4). В приближении слабой квадратичной нелинейности линейная  $p^{(1)}$  и нелинейная  $p^{(2)}$  части отклика рассчитываются с помощью пары уравнений, следующих из (4):

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} + \frac{\zeta}{\Delta} \\ \frac{d}{d\tau} + \frac{\zeta}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{\Delta} p_i \\ \frac{\varepsilon_0}{c_0^2 \rho_0} \frac{d}{d\tau} (p^{(1)})^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Заметим, что интеграл от  $p^{(2)}$  должен равняться нулю.

На рис. 2а изображен линейный  $p^{(1)}$  (прерывистые линии) и полный отклик (сплошные линии) на зондирующий импульс сжатия. При построении кривых  $\zeta/\Delta = 1$ , а параметр  $b = 2\varepsilon_0 p_0 / (c_0^2 \rho_0)$  полагался равным 1.0, 2.5, 5.0.

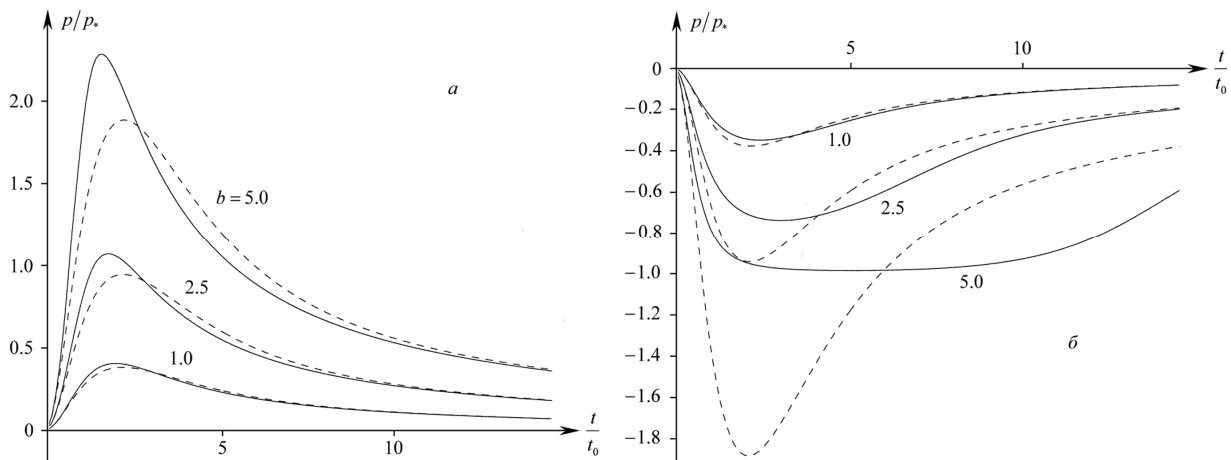


Рис. 2. Отклик слоя на воздействие одиночным импульсом сжатия (а) и разрежения (б). Сплошные линии – полный отклик, прерывистые линии – линейная часть отклика  $p^{(1)}$ . Графики построены в предположении  $\zeta/\Delta = 1$ , для трёх значений параметра  $b$ .

Если слой облучается периодическим сигналом  $p_i = p_0 \sin(\omega t)$ , при  $\tau \gg \Delta/\zeta$  устанавливается нелинейный отклик на частоте  $2\omega$ :

$$p^{(2)} = \frac{\varepsilon_0 p_0^2}{c_0^2 \rho_0} \frac{\Delta}{\zeta^2 + \Delta^2} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 4\Delta^2}} \cos(2\tau + 2\varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi_n = \arctg\left(\frac{\zeta}{n\Delta}\right) \quad (12)$$

Он достигает максимальной величины  $p_{\max}^{(2)}$  при  $\zeta/\Delta \approx 2.2$ , для  $h \approx 0.14 \lambda \zeta$ . В отсутствие неоднородности на толщине  $h$  слоя возник бы отклик на второй гармонике с амплитудой  $p_h^{(2)}$ . Отношение этих амплитуд:

$$\frac{p_{\max}^{(2)}}{p_h^{(2)}} \approx 0.3 \frac{\varepsilon_0 p_0^2}{c_0^2 \rho_0} \frac{2c_1^3 \rho_1}{\varepsilon_1 p_0^2 \omega h} \approx \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \left(\frac{c_1^2 \rho_1}{c_0^2 \rho_0}\right)^2 \quad (13)$$

определяется в первую очередь отношением плотностей сред и скоростей распространения звука в них, а не отношением их нелинейностей.

Для случая воздушного слоя, окруженного водой, оценка (13) даёт  $5.4 \cdot 10^7$ . Если слой жидкий, содержащий пузырьки воздуха, то в выражении (13) появится множитель  $\nu$ . При концентрации  $\nu \sim 10^{-4}$  отношение (13) будет порядка нескольких тысяч, что хорошо согласуется с данными экспериментов.

Рассмотрим теперь сильную деформацию слоя, используя нестепенную зависимость (5):

$$\frac{p}{p_*} = \exp\left[\frac{f(p)}{p_*}\right] - 1 \quad (14)$$

Модель (14) правильно описывает типичное поведение  $\rho(p)$  конденсированных сред: замедление роста плотности с ростом давления, связанное с увеличением «жесткости» среды; быстрое падение плотности при растягивающих усилиях; наличие предельного отрицательного давления  $-p_*$ .

Задача (4), (14) решается точно. Для неустановившегося (импульсного) отклика решение имеет вид:

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\exp\left\{\frac{\zeta}{\Delta}\left(\tau + b \int_{-\infty}^{\tau} \varphi(x) dx\right)\right\}}{C + \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left\{\frac{\zeta}{\Delta}\left(x + b \int_{-\infty}^x \varphi(x_1) dx_1\right)\right\} dx} - 1 \quad (15)$$

здесь  $C$  – постоянная интегрирования,  $b = p_0/p_*$ , а форма зондирующего импульса  $p_i = p_0 \varphi(t/t_0)$ .

Решение (15) имеет наиболее простой вид

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\left[ (1 + \tau^2)^{\pm b} e^{\tau} \right]^{\frac{\zeta}{\Delta}}}{1 + \frac{\zeta}{\Delta} \int_0^{\tau} \left[ (1 + x^2)^{\pm b} e^x \right]^{\frac{\zeta}{\Delta}} dx} - 1 \quad (16)$$

для однополярного зондирующего импульса следующего вида:

$$\varphi = \pm \frac{\tau}{1 + \tau^2} H(\tau) \quad (17)$$

где  $H$  – функция Хевисайда, знак плюс соответствует импульсу сжатия, минус – разрежения. Форма отклика слоя на воздействие импульсами сжатия и разрежения изображены на рис. 2а и 2б соответственно. Графики построены для следующих значений параметров:  $\zeta/\Delta = 1$ ,  $b = p_0/p_* = 1.0, 2.5, 5.0$ . Видно, что с ростом параметра  $b$  положительный нелинейный отклик (сплошные кривые) начинает заметно отличаться от линейного, а отрицательный (рис. 2б) – искажается до неузнаваемости. Как и следовало ожидать, значения отрицательных давлений не выходят за границу  $-p_*$ .

Кроме того, представляет значительный интерес анализ сильно нелинейного установившегося отклика на гармоническое воздействие, обобщающий результат (12). Соответствующее точное решение (4), (14) имеет вид:

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\exp\left(-\frac{\zeta}{\Delta} \cos \tau\right)}{I_0\left(\frac{\zeta}{\Delta} b\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{\zeta}{\Delta} b\right) \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + n^2 \Delta^2}} \cos(n\tau - \varphi_1)} - 1 \quad (18)$$

здесь  $I_n$  – модифицированные функции Бесселя,  $\varphi_1$  определена выше (12).

Форма отклика (18) изображена на рис. 3а для  $\zeta/\Delta = 1$ ,  $b = 1, 2, 5, 10$ . Он представляет периодическую последовательность острых пиков сжатия, перемежающихся со сглаженными разрежениями, не заходящими за предел  $p = -p_*$ .

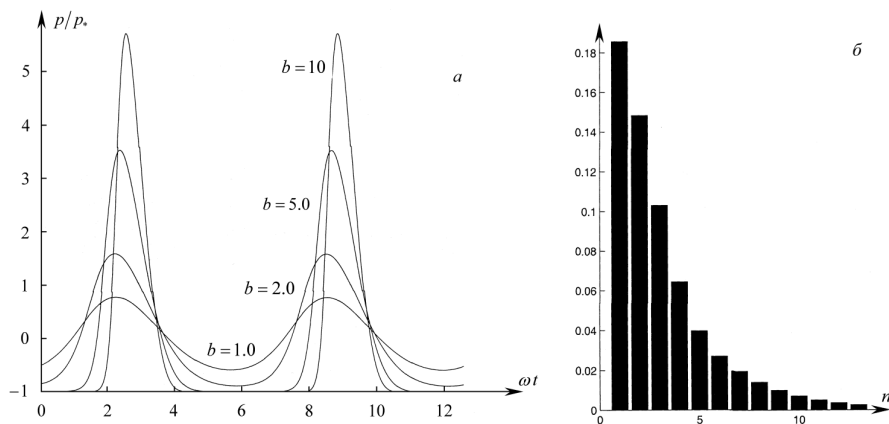


Рис. 3.

а – форма установившегося отклика на гармоническое воздействие для  $\zeta/\Delta = 1$ ,  $b = 1, 2, 5, 10$ ;

б – спектр отклика для  $b = 10$ .

Спектр, представлений на рис. 3б для  $b = 10$ , состоит из многих кратных гармоник, причём вторая и третья сравнимы по величине с амплитудой отклика на основной частоте зондирующего сигнала. Похожее поведение профилей и спектров наблюдалось экспериментально.

## Литература

1. Алексеев А.С., Глинский Б.М., Ковалевский В.В., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л. Гидрорезонансные источники сейсмических полей в технологиях активной томографии ядра Земли. //Всероссийская конференция «Внутреннее ядро Земли. Геофизическая информация о процессах в ядре». Тезисы докладов. РАН, РФФИ, МПНИГ РФ. Москва. 2000. с. 94.
2. Алексеев А.С., Глинский Б.М., Еманов А.Ф., Соловьев В.М., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Хайретдинов М.С. и др. Новые геотехнологии и комплексные геофизические методы изучения внутренней структуры и динамики геосфер. Монография. М.: ОИФЗ РАН, 2002. 475 с.
3. Собисевич А.Л. Мониторинг слоистых неоднородных сред. - ОИФЗ РАН. М.: 2001. - 354 с.
4. Селезнев М.Г., Собисевич А.Л. Современные методы механико-математического моделирования геофизической среды. - ГНИЦ ПГК (МФ) Минобр. РФ. М.: 1996. – 100 с.
5. Ляпин А.А., Селезнев М.Г., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л. Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. - ГНИЦ ПГК (МФ) МО РФ. М.: 1999. – 294 с.