

## БЕЗСІТКОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В МАТЕРІАЛАХ З АНІЗОТРОПІЄЮ

**Анотація.** Описано безсітковий метод розв'язування тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі. Для розв'язування крайової задачі застосовано комбінацію методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод фундаментальних розв'язків дає змогу отримати однорідний розв'язок, а метод подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій — частинний розв'язок крайової задачі. Наведено результати чисельних розв'язків двох тестових задач, отриманих з використанням розробленого методу, а також обчислено середню відносну, середню абсолютну та максимальну похибки.

**Ключові слова:** безсітковий метод, крайові задачі, анізотропні матеріали, метод подвійного заміщення, метод фундаментальних розв'язків, анізотропні радіальні базисні функції.

### СТАН ПРОБЛЕМИ

Дослідження прикладних проблем, зокрема проблем теплообміну в складних тривимірних областях, потребує розроблення нових підходів до обчислювальних методів наближеного розв'язування. Один з таких підходів наведено у роботі І.В. Сергієнка і В.С. Дейнеки [1], де розглянуто використання псевдообернених матриць для ідентифікації деяких параметрів обернених задач нестационарної теплопровідності багатокомпонентних тіл за скінченну кількість арифметичних дій.

Одним з перспективних підходів є використання безсіткових методів розв'язування крайових задач, що базуються на застосуванні радіальних базисних функцій. На відміну від методу скінченних елементів [2] у безсіткових методах область визначення розв'язку крайової задачі є набором рівномірно або довільно розподілених вузлів, до яких «прив'язуються» базисні функції. Алгоритми, що реалізують безсіткові схеми, не матимуть потреби у прив'язці до інтерполяційної сітки на відміну від сіткових методів і тому легко інтегруються в системи автоматизованого проектування.

Монаган, Гінгольд [3] і Люсі [4] в 1977 р. запропонували використовувати перший безсітковий метод Лагранжа для моделювання задач астрофізики під назвою методу згладжених гідродинамічних частинок (smoothed particle hydrodynamics method — SPH). Він ґрунтується на заміні рідини набором рухомих частинок і перетворенні основних диференціальних рівнянь з частинними похідними в інтеграли з функцією ядра [5]. У 1992 р. Найролес і Тузот [6] розробили метод дифузного елемента (diffuse element method — DEM). У 1994 р. Беличко та інші [7] розробили безелементний метод Гальоркіна (element-free Galerkin method — EFGM), який являє собою розширену версію DEM. У 1995 р. Лю запропонував метод репродукованих ядерних частинок (reproducing kernel particle method — RKPM) [8], який базується на методі згладжених гідродинамічних частинок. У 1996 р. Онат та інші [9, 10] розробили метод скінченних точок (finite point method — FPM), який спочатку використовували для моделювання задач течії рідини, а згодом стали застосовувати для розв'язування задач механіки, зокрема задач деформації пружної пластини.

У 1990 р. Канза вперше застосував радіальні базисні функції (РБФ) для розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними. Він запропонував безсіткову схему, основувану на комбінації методу колокації та мультіквадратичних радіальних базисних функцій [11, 12]. Лі та інші [13] у 2003 р. запропонували альтернативний безсітковий підхід, який ґрунтується на застосуванні радіальних базисних функцій. Ця схема названа локальною мультіквадратичною апроксимацією (local multiquadric approximation — LMQA). Радіальні базисні функції також використовували у методі подвійного заміщення (dual reciprocity method — DRM) [14], методі фундаментальних розв'язків (method of fundamental solutions — MFS) [15] і методі граничного вузла (boundary knot method — ВКМ) [16].

Ростамян і Шихрезай [17] як радіальні базисні функції застосували теплові поліноми (heat polynomials) для чисельного розв'язання оберненої задачі теплопровідності. Ван та інші [18] розробили безсітковий підхід, що ґрунтується на комбінації методу колокації віртуальних границь (virtual boundary collocation method — VBCM) та методу аналогового рівняння (analog equation method — АЕМ) у поєднанні з радіальними базисними функціями, яким послуговувались для розв'язування нестационарних задач теплопровідності у функціонально-градієнтних матеріалах. Сяо та інші [19] запропонували новий безсітковий метод граничного типу для розв'язання двовимірних стаціонарних задач теплопровідності в композитних матеріалах, який поєднує метод фундаментальних розв'язків та метод колокації Треффца (collocation Trefftz method — СТМ). Для моделювання багатошарових композитних матеріалів у цьому підході використано метод декомпозиції області (domain decomposition method — DDM). Для моделювання явищ теплопереносу в системах твердих частинок Караджанакіс та інші [20] застосували новий підхід, оснований на використанні оператора обміну силою частинок з поправкою на дискретизацію (the discretization-corrected particle strength exchange operator — DC PSE) та безсіткового локального методу Петрова–Гальоркіна (meshless local Petrov–Galerkin method — MLPG).

Перевага безсіткових методів полягає у спрощенні процедур моделювання та чисельного розв'язання складних задач з урахуванням особливостей геометрії області та неоднорідності матеріалів. Відомо, що теплофізичні характеристики багатьох твердих тіл визначаються анізотропією. У цій ситуації коефіцієнт теплопровідності представимо у вигляді симетричного тензора другого рангу:

$$k = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $k_{xy} = k_{yx}$ ,  $k_{xz} = k_{zx}$ ,  $k_{yz} = k_{zy}$ .

Існує безліч природних і синтетичних матеріалів, у яких теплопровідність змінюється залежно від напрямку. Наприклад, до анізотропних матеріалів належать кристали, дерево, осадові породи, метали, які зазнали потужного холодного пресування, ламіновані листи, кабелі, теплозахисні матеріали для космічних апаратів, композитні матеріали тощо. Деревина має різну теплопровідність уздовж і впоперек волокон. У ламінованих листах теплопровідність не однакова уздовж і впоперек ламінування. Останнім часом анізотропні матеріали застосовують у різних галузях науки і техніки, тому актуальним є розроблення сучасних методів чисельного розв'язання крайових задач в анізотропному середовищі.

Захір-уд-Дін та інші [21] запропонували безсіткову схему, основувану на використанні мультіквадратичних радіальних базисних функцій для розв'язання двовимірних стаціонарних задач теплопровідності в анізотропних і неоднорідних сере-

довищах з нелокальними багатоточковими граничними умовами. Інший безсітковий підхід до розв'язання задач нестационарної теплопровідності в анізотропних неоднорідних середовищах запропонували Гуань та інші [22, 23]. Підхід базується на комбінації методу крихких точок (fragile points method — FPM), який використовують для просторової дискретизації та локальної варіаційної ітераційної схеми (local variational iteration scheme — LVI), яку застосовують для дискретизації за часом.

Мета цього дослідження — подальший розвиток безсіткового методу розв'язання тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі. Метод ґрунтується на комбінації методу подвійного заміщення (з використанням анізотропних радіальних базисних функцій) з методом фундаментальних розв'язків.

#### ІТЕРАЦІЙНА СХЕМА

Диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності у довільній замкненій області  $\Omega \subset R^3$ , що обмежена  $\partial\Omega$ , має вигляд [24]

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) + g, \quad (2)$$

де  $\rho = \rho(x, y, z)$  — щільність,  $c_p = c_p(x, y, z)$  — питома теплоємність за постійного тиску,  $u = u(x, y, z, t)$  — температура,  $g = g(x, y, z, t)$  — внутрішнє джерело тепла.

У покоординатному записі рівняння (2) отримає такий вигляд:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g. \end{aligned} \quad (3)$$

Нехай  $\partial\Omega = \sum_{i=1}^3 \partial\Omega_i$  та  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Крайові умови для такої задачі можна визначити за допомогою будь-якої комбінації такого типу:

$$\begin{aligned} \text{температурне поле: } & u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\ \text{тепловий потік: } & \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial \nu} = \bar{q}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \\ \text{теплообмін: } & \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial \nu} = -h(u(x, y, z, t) - u_\infty(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_3, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left( k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( k_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \left( k_{zx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, z)$ ,  $n$  — зовнішній вектор нормалі,  $h$  — коефіцієнт теплообміну,  $u_\infty(x, y, z, t)$  — температура навколишнього середовища.

Початкові умови задамо у вигляді

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

Запишемо рівняння (3) так:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k_{xx}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial k_{xz}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + k_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial k_{yx}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{yx} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial k_{yy}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial k_{yz}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + k_{yz} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \\
& + \frac{\partial k_{zx}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial k_{zy}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + k_{zy} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial k_{zz}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + k_{zz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g. \quad (5)
\end{aligned}$$

Для однорідного середовища, коли теплофізичні характеристики постійні, анізотропне рівняння теплопровідності (5) з урахуванням симетричності тензора теплопровідності  $k$  спрощується до вигляду

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = & k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\
& + 2 \left( k_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + k_{yz} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) + g. \quad (6)
\end{aligned}$$

Нехай

$$L(k)u = k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left( k_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + k_{yz} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right),$$

тоді рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = L(k)u + g. \quad (7)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності (7) можна звести до послідовності неоднорідних модифікованих рівнянь Гельмгольца для анізотропного однорідного середовища. Застосовуючи  $\theta$ -схему методу скінченних різниць для дискретизації за часом [25], отримаємо

$$\rho c_p \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \theta(L(k)u^n + g^n) + (1-\theta)(L(k)u^{n-1} + g^{n-1}), \quad (8)$$

де  $\Delta t$  — крок за часом,  $u^n = u(x, y, z, n\Delta t)$ ,  $g^n = g(x, y, z, n\Delta t)$ ,  $\theta$ ,  $0 < \theta \leq 1$ , — ваговий коефіцієнт.

Позначимо змінену температуру

$$v^n = u^n + \frac{1-\theta}{\theta} u^{n-1}. \quad (9)$$

Застосуємо співвідношення (9) і запишемо рівняння (8) у вигляді

$$L(k)v^n - \lambda^2 v^n = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n, \quad (10)$$

де  $\lambda^2 = \frac{\rho c_p}{\theta \Delta t}$ .

На кожному часовому кроці будемо розв'язувати крайову задачу з диференціальним рівнянням Гельмгольца, застосовуючи комбінацію методу подвійного заміщення [14] з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків [15]. За допомогою методу фундаментальних розв'язків отримуємо однорідний розв'язок, а за допомогою методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій — частинний розв'язок.

Розв'язок рівняння (10) можна представити у вигляді суми однорідного розв'язку  $v_h^n$  та частинного розв'язку  $v_p^n$ :  $v^n = v_h^n + v_p^n$ .

Рівняння для отримання частинного розв'язку має вигляд

$$L(k)v_p^n - \lambda^2 v_p^n = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n.$$

Для побудови частинного розв'язку  $v_p^n$  не потрібно задовольняти граничні умови, його можна знайти, використовуючи метод подвійного заміщення.

Систему для отримання однорідного розв'язку  $v_h^n$  представимо у такому вигляді:

$$\begin{cases} L(k)v_h^n(x, y, z) - \lambda^2 v_h^n(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ v_h^n(x, y, z) = \bar{u}(x, y, z) - v_p^n(x, y, z), & (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial v_h^n(x, y, z)}{\partial \nu} = \bar{q}(x, y, z) - \frac{\partial v_p^n(x, y, z)}{\partial \nu}, & (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \\ \left( \frac{\partial v_h^n}{\partial \nu} + h v_h^n \right)(x, y, z) = -\frac{\partial v_p^n(x, y, z)}{\partial \nu} - h v_p^n(x, y, z) + h u_\infty(x, y, z), & (x, y, z) \in \partial\Omega_3. \end{cases}$$

Нехай  $F^n(x, y, z) = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n$ . Наближений частинний розв'язок рівняння

$$L(k)v_p^n(x, y, z) - \lambda^2 v_p^n(x, y, z) = F^n(x, y, z)$$

на часовому кроці  $n$  можна сконструювати за допомогою анізотропних радіальних базисних функцій  $\varphi_k(x, y, z) = \varphi(r_k)$ , де  $r_k$  — геодезична відстань, яку визначають у такий спосіб:

$$r_k^2 = k^{xx}(x-x_k)^2 + k^{yy}(y-y_k)^2 + k^{zz}(z-z_k)^2 + (k^{xy} + k^{yx})(x-x_k)(y-y_k) + (k^{xz} + k^{zx})(x-x_k)(z-z_k) + (k^{yz} + k^{zy})(y-y_k)(z-z_k),$$

$$k^{-1} = \begin{bmatrix} k^{xx} & k^{xy} & k^{xz} \\ k^{yx} & k^{yy} & k^{yz} \\ k^{zx} & k^{zy} & k^{zz} \end{bmatrix} \text{ — обернений тензор теплопровідності. У випадку ізотропного середовища геодезичною відстанню буде евклідова.}$$

Функцію  $F^n(x, y, z)$  апроксимуємо так:

$$F^n(x, y, z) \cong \hat{F}^n(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \Psi_k(x, y, z), \quad (11)$$

де  $N$  — загальна кількість вузлів колокації,  $\alpha_k^n$  — невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню, а функції  $\Psi_k(x, y, z)$  — розв'язок рівняння

$$\Psi_k(x, y, z) = L(k)\varphi_k(x, y, z) - \lambda^2 \varphi_k(x, y, z).$$

Отже, (11) являє собою систему з  $N$  лінійних рівнянь відносно невідомих  $\alpha_k^n$ . Тоді частинний розв'язок  $v_p^n$  — це лінійна комбінація базисних функцій:

$$v_p^n = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \varphi_k(x, y, z).$$

Для отримання однорідного розв'язку використаємо метод фундаментальних розв'язків. На  $n$ -у часовому кроці однорідний розв'язок  $v_h^n$  апроксимуємо формулою

$$v_h^n = \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x-x_i, y-y_i, z-z_i),$$

де  $M$  — загальна кількість вузлів джерел на фіктивній поверхні  $\partial\hat{\Omega}$ , що охоплює область  $\Omega$  (рис. 1);  $\beta_i^n$  — невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню;  $u^*(x-x_i, y-y_i, z-z_i) = \frac{1}{4\pi r_i} e^{-\lambda r_i}$  — фунда-

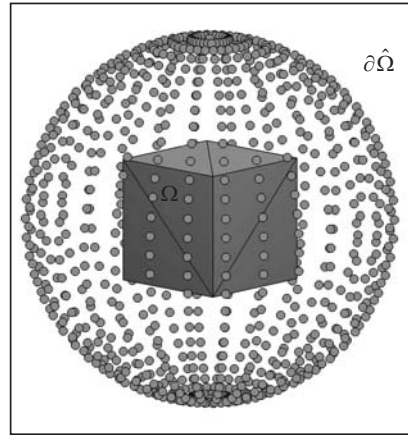


Рис. 1. Розташування вузлів на фіктивній поверхні

ментальний розв'язок модифікованого оператора Гельмгольца  $L(k) - \lambda^2$ ;  $r_i$  — геодезична відстань між вузлами  $(x, y, z) \in \partial\Omega$  і  $(x_i, y_i, z_i) \in \partial\hat{\Omega}$ .

Потрібно визначити оптимальне розміщення фіктивної поверхні. Вона може бути сферою, центр якої збігається з геометричним центром області визначення розв'язку. Зі збільшенням радіуса сфери підвищується точність одержаного розв'язку, але погіршується обумовленість системи лінійних рівнянь і навпаки. На практиці, як компроміс, значення радіуса фіктивної поверхні зазвичай вибирають таким, що дорівнює п'яти розмірам області розв'язку.

У вузлах, рівномірно розташованих на фіктивній поверхні, розміщують базисні функції, які являють собою фундаментальні розв'язки однорідного модифікованого рівняння Гельмгольца.

Лінійна комбінація фундаментальних розв'язків  $u^*(x-x_i, y-y_i, z-z_i)$  за визначенням задовольняє модифікованому рівнянню Гельмгольца в усіх вузлах області розв'язку. Коефіцієнти  $\beta_i^n$  обирають так, щоб задовольнити крайовим умовам (4) в обраних вузлах на границі області визначення розв'язку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i) = \bar{u}(x_j, y_j, z_j) - v_p^n(x_j, y_j, z_j), \quad 1 \leq j \leq K_1, \\ \sum_{i=1}^M \beta_i^n \frac{\partial u^*(x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i)}{\partial v} = \bar{q}(x_j, y_j, z_j) - \\ - \frac{\partial v_p^n(x_j, y_j, z_j)}{\partial v}, \quad K_1+1 \leq j \leq K_2, \\ \sum_{i=1}^M \beta_i^n \left( \frac{\partial}{\partial v} + h \right) u^*(x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i) = - \frac{\partial v_p^n(x_j, y_j, z_j)}{\partial v} - \\ - h v_p^n(x_j, y_j, z_j) + h u_\infty(x_j, y_j, z_j), \quad K_2+1 \leq j \leq K, \end{array} \right. \quad (12)$$

де  $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^{K_1} \in \partial\Omega_1$ ,  $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=K_1+1}^{K_2} \in \partial\Omega_2$ ,  $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=K_2+1}^K \in \partial\Omega_3$ ,  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^M \in \partial\hat{\Omega}$ .

Після розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12) відносно коефіцієнтів  $\beta_i^n$  загальний розв'язок  $v^n$  отримуємо за формулою

$$v^n = v_p^n + v_h^n = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \varphi_k(x, y, z) + \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x - x_i, y - y_i, z - z_i).$$

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12) можна скористатися методами, запропонованими в роботі [26].

#### ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Проілюструємо застосування побудованої безсіткової схеми на прикладі двох тестових задач та проведемо оцінювання точності отриманих розв'язків.

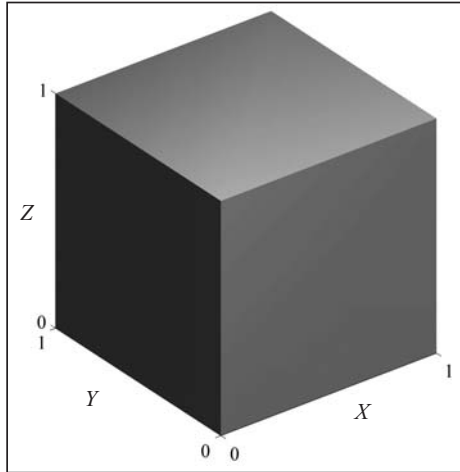


Рис. 2. Область розв'язку крайової задачі

**Задача 1.** Розглянемо тривимірну нестационарну крайову задачу теплопровідності на одиничній області у формі куба  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  (рис. 2).

**Постановка задачі.** Нестационарне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + g, \quad (20)$$

де  $\rho = 1$ ,  $c_p = 1$ ,  $\theta = 1$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N$  — кількість інтерполяційних вузлів.

Компоненти тензора теплопровідності задано так:

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Внутрішнє джерело тепла:  $g(x, y, z, t) = 5$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ .

Крайові умови:  $u(x, y, z, t) = 0$ ,  $(x, y, z) \in \partial\Omega$ .

Початкові умови:  $u(x, y, z, 0) = 0$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ .

Базисною функцією для апроксимації частинного розв'язку визначено анізотропну мультікватратичну радіальну базисну функцію  $\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$  з параметром форми  $\varepsilon = 1$ .

На рис. 3 наведено візуалізацію наближеного розв'язку цієї крайової задачі для  $t = 1$ .

Для отримання оцінки точності апроксимації використовуємо середню відносну похибку  $\operatorname{rerr}(u)$ , середню абсолютну похибку  $\operatorname{aerr}(u)$  і максимальну похибку  $\operatorname{merr}(u)$ , які обчислюються за формулами

$$\operatorname{rerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{L} \frac{\sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\sum_{j=1}^L (u_j)^2}},$$

$$\operatorname{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2},$$

$$\operatorname{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j|,$$

де  $u_j$  та  $\tilde{u}_j$  — відповідно аналітичні та чисельні розв'язки у вузлах  $(x_j, y_j, z_j) \in \Omega$ , а  $L$  — загальна кількість інтерполяційних вузлів.

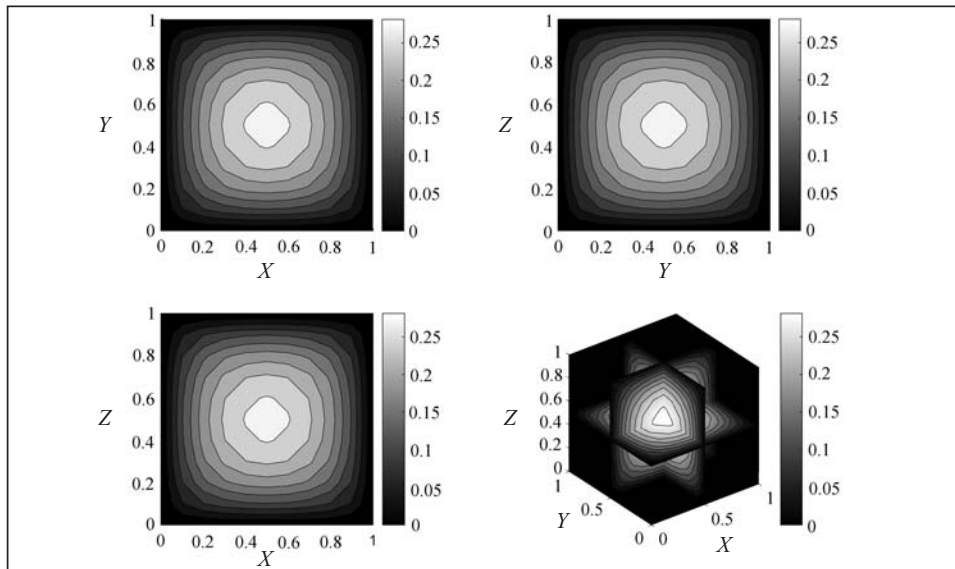


Рис. 3. Візуалізація наближеного розв'язку задачі 1

Аналітичний розв'язок для цієї крайової задачі має вигляд

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{m,n,k}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l_3} z\right), \quad (13)$$

де

$$u_{m,n,k}(t) = \int_0^t \left[ \frac{8}{l_1 l_2 l_3 \rho c_p} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} g(\xi, \eta, \zeta, t) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} \eta\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l_3} \zeta\right) d\xi d\eta d\zeta \right] \times \\ \times \exp(-A_{m,n,k}(t-\tau)) d\tau;$$

$$A_{m,n,k} = a_{xx} \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + a_{yy} \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 + a_{zz} \left(\frac{\pi k}{l_3}\right)^2; \quad a_{xx} = \frac{k_{xx}}{\rho c_p}, \quad a_{yy} = \frac{k_{yy}}{\rho c_p}, \quad a_{zz} = \frac{k_{zz}}{\rho c_p};$$

$\{l_i\}_{i=1}^3$  — геометричні розміри куба;  $g(\xi, \eta, \zeta, t)$  — внутрішнє джерело тепла.

Точність підсумовування потрійного ряду Фур'є в рівнянні (13) для кожного коефіцієнта  $m, n, k$  обмежено 100 ітераціями. Причина вибору такої точності підсумовування потрійного ряду Фур'є полягає у тому, що у разі підсумовування такої кількості членів ряду досягається точність машинного обчислення, а під час обрахунку більшої кількості членів ряду накопичується значна похибка округлювання.

У табл. 1 наведено похибки наближеного розв'язку крайової задачі 1 для  $t = 1$  відносно аналітичного розв'язку (13) для різної кількості інтерполяційних вузлів  $N$ .

**Таблиця 1.** Похибки розв'язку крайової задачі 1

Кількість інтерполяційних вузлів $N$	Середня відносна похибка $\text{err}_r(u)$	Середня абсолютна похибка $\text{err}_a(u)$	Максимальна похибка $\text{err}_m(u)$
27	9.252489e-01	2.600300e-01	1.351155
125	2.191730e-02	2.146430e-02	4.680613e-02
216	9.835198e-03	1.361558e-02	2.588780e-02
1331	1.178247e-04	4.652063e-04	2.073421e-03



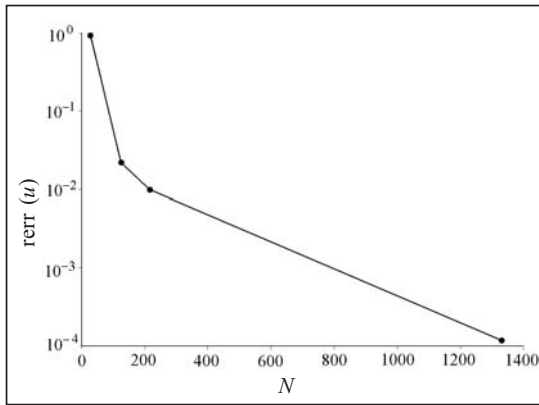


Рис. 4. Графік залежності середніх відносних похибок  $rerr(u)$  від кількості інтерполяційних вузлів  $N$  для задачі 1

На рис. 4 наведено графік залежності середніх відносних похибок  $rerr(u)$  від кількості інтерполяційних вузлів  $N$  для задачі 1.

**Задача 2.** Розглянемо задачу 1 з іншими компонентами тензора теплопровідності

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Базисною функцією для апроксимації частинного розв'язку визначено анізотропну мультиквадратичну радіальну базисну функцію  $\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$  з параметром форми  $\varepsilon = 1$ .

На рис. 5 наведено візуалізацію наближеного розв'язку крайової задачі для  $t = 1$ . Аналітичний розв'язок для цієї крайової задачі задають рівнянням (13). У табл. 2 наведено похибки наближеного розв'язку задачі 2 для  $t = 1$  відносно аналітичного розв'язку (13) для різної кількості інтерполяційних вузлів  $N$ .

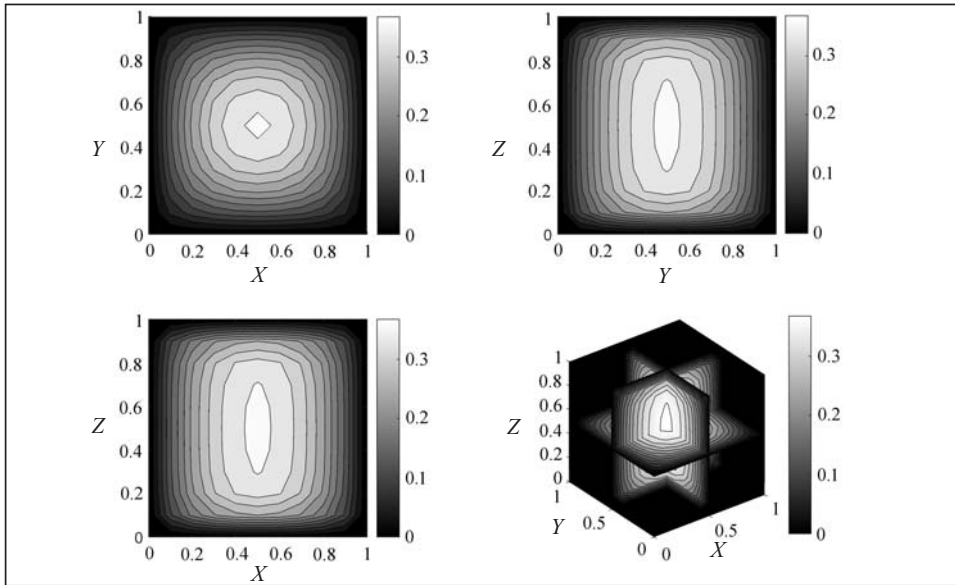


Рис. 5. Візуалізація наближеного розв'язку задачі 2

**Таблиця 2.** Похибки розв'язку крайової задачі 2

Кількість інтерполяційних вузлів $N$	Середня відносна похибка $rerr(u)$	Середня абсолютна похибка $aerr(u)$	Максимальна похибка $merr(u)$
27	1.859792e-01	6.837013e-02	3.552616e-01
125	1.483728e-02	2.059828e-02	5.096209e-02
216	6.734991e-03	1.340875e-02	2.806351e-02
1331	1.095657e-03	6.326208e-03	3.034338e-02

На рис. 6 наведено графік залежності середніх відносних похибок  $\text{err}(u)$  від кількості інтерполяційних вузлів  $N$  для задачі 2.

Отже, в дослідженнях представлено безсітковий метод розв'язання тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі та його переваги. Запропонована безсіткова схема ґрунтується на методі подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій та методі фундаментальних розв'язків.

У процесі розв'язання тестових задач отримано аналітичні розв'язки. Чисельні розв'язки тестових задач у разі використання розробленого методу порівнювались з аналітичними, були порашовані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки. Числові результати підтверджують, що з використанням розробленого безсіткового методу можна отримати високоточні розв'язки тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі вже на невеликій кількості вузлів.

Нові перспективи для практичної реалізації безсіткових методів відкриваються з використанням атомарних функцій як базисних [27]. Темою майбутнього дослідження авторів є побудова атомарної радіальної базисної функції трьох незалежних змінних для диференціального оператора Гельмгольца з урахуванням анізотропії та її подальше використання для чисельного розв'язання тривимірних нестационарних задач теплопровідності.

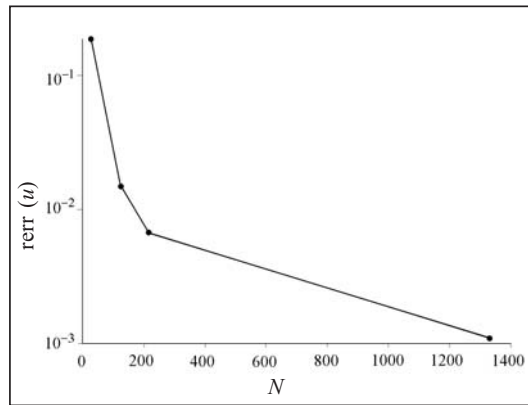


Рис. 6. Графік залежності середніх відносних похибок  $\text{err}(u)$  від кількості інтерполяційних вузлів  $N$  для задачі 2

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численное решение некоторых обратных задач нестационарной теплопроводности с использованием псевдообратных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 5. С. 49–70.
2. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Вариационные постановки и дискретизация краевой задачи теории упругости при заданных на границе области напряжениях. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 6. С. 46–60.
3. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1977. Vol. 181, N 3. P. 375–389. <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>.
4. Lucy B.L. A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astronomical Journal*. 1977. Vol. 82, N 12. P. 1013–1024. <https://doi.org/10.1086/112164>.
5. Liu G.R. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method. CRC Press, 2003.
6. Nayroles B., Touzot G., Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*. 1992. Vol. 10. P. 307–318. <https://doi.org/10.1007/BF00364252>.
7. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, N 2. P. 229–256. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>.
8. Liu W.K., Jun S., Li S., Jonathan A., Belytschko T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995. Vol. 38, N 10. P. 1655–1679. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381005>.

9. Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 315–346. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01088-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01088-2).
10. Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. A finite point method in computational mechanics. Application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996. Vol. 39, N 22. P. 3839–3866. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R).
11. Kansa E.J. Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 127–145. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T).
12. Kansa E.J. Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K).
13. Lee C.K., Liu X., Fan S.C. Local multiquadric approximation for solving boundary value problems. *Computational Mechanics*. 2003. Vol. 30. P. 396–409. <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0416-5>.
14. Ingber M.S., Chen C.S., Tanski J.A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 60, N 13. P. 2183–2201. <https://doi.org/10.1002/nme.1043>.
15. Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1985. Vol. 22, N 4. P. 644–669. <https://doi.org/10.2307/2157574>.
16. Hon Y.C., Chen W. Boundary knot method for 2D and 3D Helmholtz and convection–diffusion problems under complicated geometry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003. Vol. 56, N 13. P. 1931–1948. <https://doi.org/10.1002/nme.642>.
17. Rostamian M., Shahrezae A. Application of meshless methods for solving an inverse heat conduction problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 9, N 1. P. 64–83.
18. Wang H., Qin Q-H., Kang Y-L. A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 38. P. 51–60. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0720-3>.
19. Xiao J.-E., Ku C.-Y., Huang W.-P., Su Y., Tsai Y.-H. A novel hybrid boundary-type meshless method for solving heat conduction problems in layered materials. *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8, N 10. P. 1–24. <https://doi.org/10.3390/app8101887>.
20. Karagiannakis N.P., Bali N., Skouras E.D., Burganos V.N. An efficient meshless numerical method for heat conduction studies in particle aggregates. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, N 3. P. 1–19. <https://doi.org/10.3390/app10030739>.
21. Zaheer-ud-Din, Ahsan M., Ahmad M., Khan W., Mahmoud E.E., Abdel-Aty A.-H. Meshless analysis of nonlocal boundary value problems in anisotropic and inhomogeneous media. *Mathematics*. 2020. Vol. 8, N 11. P. 1–19. <https://doi.org/10.3390/math8112045>.
22. Guan Y., Grujicic R., Wang X., Dong L., Atluri S.N. A new meshless “fragile points method” and a local variational iteration method for general transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media. Part I: Theory and implementation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. An International Journal of Computation and Methodology*. 2020. Vol. 78, N. 2. P. 71–85. <https://doi.org/10.1080/10407790.2020.1747278>.
23. Guan Y., Grujicic R., Wang X., Dong L., Atluri S.N. A new meshless “fragile points method” and a local variational iteration method for general transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media. Part II: Validation and discussion. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. An International Journal of Computation and Methodology*. 2020. Vol. 78, N 2. P. 86–109. <https://doi.org/10.1080/10407790.2020.1747283>.
24. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. 2nd edition. London: Oxford University Press, 1959. 510 p.
25. Langtangen H.P. Introduction to computing with finite difference methods. University of Oslo, 2014. 97 p.
26. Сергиенко И.В., Химич А.Н., Яковлев М.Ф. Методы получения достоверных решений систем линейных алгебраических уравнений. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 1. С. 68–80.

27. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Атомарные радиально базисные функции в численных алгоритмах решения краевых задач для уравнения Лапласа. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 44, № 4. С. 165–178.

Надійшла до редакції 11.07.2020

**Д.О. Протектор, В.М. Колодяжный, Д.А. Лисин, О.Ю. Лисина**  
**БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ**  
**ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МАТЕРИАЛАХ С АНИЗОТРОПИЕЙ**

**Аннотация.** Рассмотрен бессеточный метод решения трехмерных нестационарных задач теплопроводности в анизотропной среде. Для решения краевой задачи применяется комбинация метода двойного замещения с использованием анизотропных радиальных базисных функций с методом фундаментальных решений. Метод фундаментальных решений позволяет получить однородное решение, а метод двойного замещения с использованием анизотропных радиальных базисных функций — частное решение краевой задачи. Приводятся результаты численных решений двух тестовых задач, полученных с использованием разработанного метода, а также вычисляются средняя относительная, средняя абсолютная и максимальная погрешности.

**Ключевые слова:** бессеточный метод, краевые задачи, анизотропные материалы, метод двойного замещения, метод фундаментальных решений, анизотропные радиальные базисные функции.

**D.O. Protektor, V.M. Kolodyazhny, D.O. Lisin, O.Yu. Lisina**  
**A MESHLESS METHOD FOR SOLVING THREE-DIMENSIONAL**  
**NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN ANISOTROPIC MATERIALS**

**Abstract.** The article deals with a meshless method for solving three-dimensional nonstationary heat conduction problems in anisotropic materials. A combination of dual reciprocity method using anisotropic radial basis function and method of fundamental solutions is used to solve the boundary-value problem. The method of fundamental solutions is used to obtain the homogenous part of the solution; the dual reciprocity method with the use of anisotropic radial basis functions allows obtaining a partial solution. The article shows the results of numerical solutions of two benchmark problems obtained by the developed numerical method; average relative, average absolute, and maximum errors are calculated. **Keywords:** meshless method, boundary-value problems, anisotropic materials, dual reciprocity method, method of fundamental solution, anisotropic radial basis functions..

**Keywords:** meshless method, boundary-value problems, anisotropic materials, dual reciprocity method, method of fundamental solution, anisotropic radial basis functions.

**Протектор Денис Олегович,**  
аспірант Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,  
e-mail: d.protector@karazin.ua.

**Колодяжный Владимир Максимович,**  
доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, e-mail: vladmax1949@ukr.net.

**Лісін Денис Олександрович,**  
кандидат техн. наук, доцент кафедри Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна,  
e-mail: d.lisin@karazin.ua.

**Лісіна Ольга Юліївна,**  
кандидатка фіз.-мат. наук, доцентка кафедри Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, e-mail: o.lisina@karazin.ua.