СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Н.А. ВАРЕНЮК, $\boxed{\text{Е.Ф. ГАЛБА}}$, И.В. СЕРГИЕНКО, Н.И. ТУКАЛЕВСКАЯ

УДК 512.61:519.61

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ СО СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ

Аннотация. Получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами (одна весовая матрица положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная) в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней. На основании таких разложений построены и изучены итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами. Рассмотрены различные варианты взвешенных псевдообратных матриц со смешанными невырожденными весами и построены их разложения в матричные степенные ряды.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы с индефинитными и смешанными весами, матричные степенные ряды, итерационные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами дано в [1]. Понятие косой псевдообратной матрицы введено в [2]. В [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц в [1] совпадает с множеством косых псевдообратных матриц в [2]. Определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами дано в [4]. Там же даны необходимые и достаточные условия существования рассмотренного варианта псевдообратных матриц с вырожденными весами.

В работах [5–7] исследованы другие варианты взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами (см. также обзорную статью [8]) и определены необходимые и достаточные условия их существования, а также приведены взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами.

Обзорная статья [9] посвящена методам вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В [10] введено понятие *ML*-взвешенной псевдообратной матрицы. В [11] дано определение взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными индефинитными весами и приведены достаточные условия существования этих матриц. Взвешенные псевдообратные матрицы с индефинитными невырожденными весами исследованы в [12]. В этой работе доказана теорема существования и единственности взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами, дано представление этих матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, получены разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней, предельные представления этих матриц, построены регуляризованные итерационные методы для их вычисления. В [13] получено представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза и другие взвешенные псевдообратные матрицы. В [14] даны разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней, отличные от предложенных в [12], а также построены регуляризованные итерационные методы для их вычисления.

В настоящей работе на основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными и смешанными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, леммы о диагонализации симметризуемых положительно-определенными симметризаторами матриц с помощью взвешенного ортогонального преобразования, неравенств для матричных норм обосновано разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с положительными показателями степеней, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. На основе разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с положительными показателями степеней построены и исследованы итерационные процессы для их вычисления. Рассмотрены различные варианты взвешенных псевдообратных матриц со смешанными невырожденными весами и построены их разложения в матричные степенные ряды. Отметим, что некоторые результаты без доказательств описаны в [15].

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ, ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная, положительно-полуопределенная или знаконеопределенная матрица. В $\mathbb{R}^n$ введем скалярное произведение по формуле $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^{\mathrm{T}} v$, E — единичная матрица. Если метрическая матрица H положительно-определенная или положительно-полуопределенная, то обычным способом можно нормировать пространство $\mathbb{R}^n$, положив $|| u ||_H = (u, u)_H^{1/2}$. В первом случае функция $|| u ||_H$ будет определять эллипсоидальную норму, а во втором — эллипсоидальную полунорму.

Отметим, что исследованию n-мерных векторных пространств со знаконеопределенной метрикой (со знаконеопределенным скалярным произведением) уделено значительно меньше внимания [16–20], чем с положительно-определенной и неотрицательной метрикой.

Определим взвешенную норму прямоугольной матрицы с симметричными невырожденными весовыми матрицами. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V = V^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденные матрицы. Для множества матриц A в [12] норма введена соотношением

$$|| A ||_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{|| AVx ||_{H^2}}{|| x ||_{E_n}} = \sup_{x\neq 0} \frac{|| HAVx ||_{E_m}}{|| x ||_{E_n}} = \sup_{x\neq 0} \frac{(VA^{\mathrm{T}} H^2 AVx, x)_{E_m}^{1/2}}{|| x ||_{E_n}}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размер.

В [12] показано, что функция (1) является аддитивной (обобщенной) матричной нормой, которая определяется формулой

$$|| A ||_{HV} = [\lambda_{\max} (VA^{\mathrm{T}} H^2 AV)]^{1/2}, \quad (2)$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [12] получены следующие соотношения для матричных норм с невырожденными весами.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричные невырожденные матрицы, тогда справедливы соотношения

$$|| AB ||_{HV} \le || A ||_{HM} \, || B ||_{M^{-1}V}, \quad || AB ||_{HV} \le || A ||_{HM^{-1}} \, || B ||_{MV}. \quad (3)$$

Определение 1. Вещественную матрицу U будем называть симметризуемой слева или справа, если существует такая симметричная невырожденная матрица H, что выполняются соответственно равенства $HU = U^{\mathrm{T}} H$ и $UH = HU^{\mathrm{T}}$.

Определение 2. Квадратную вещественную матрицу Q будем называть H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если выполняется условие $Q^{\mathrm{T}} HQ = E$, где H — симметричная положительно-определенная матрица.

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства, причем симметризаторами, в основном, являлись симметричные положительно-определенные матрицы, а в работах [19, 21, 22] изучались H-самосопряженные матрицы, здесь H предполагалась симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей.

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами (одна весовая матрица положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная) в матричные степенные ряды и произведения использовано утверждение следующей леммы [12].

Лемма 2. Симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором H матрица U может быть приведена к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существует такая H-взвешенная ортогональная матрица Q, что

$$Q^{\mathrm{T}} HUQ = \Lambda, \tag{4}$$

и матрица U представима в виде

$$U = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} H, \tag{5}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы U, а столбцы матрицы Q образуют полную систему собственных векторов матрицы U.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C = C^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Рассмотрим систему матричных уравнений

$$AXA = A,\; XAX = X,\; (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX,\; (CXA)^{\mathrm{T}} = CXA \tag{6}$$

при двух условиях для весовых матриц B и C:

— когда матрица C положительно-определенная, а B — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(A^{\mathrm{T}} BA) = rk(A); \tag{7}$$

— когда матрица B положительно-определенная, а C — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(AC^{-1} A^{\mathrm{T}}) = rk(A), \tag{8}$$

где обозначено $rk(L)$ ранг матрицы L.

Следовательно, далее будет рассмотрено два варианта взвешенных псевдообратных матриц, определяемых условиями (6), (7) и (6), (8).

В [12] показано, что система матричных уравнений (6), когда весовые матрицы B и C невырожденные знаконеопределенные при выполнении условий (7) и (8), имеет единственное решение $X = A^{+}_{BC}$, причем матрица A^{+}_{BC} представима в виде:

$$A^{+}_{BC} = C^{-1} SA^{\mathrm{T}} B, \tag{9}$$

где $S = f(A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}} BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det\,[\lambda E - A^{\mathrm{T}} BAC^{-1}],$$

а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Отметим, что задачи (6), (7) и (6), (8) являются частными случаями задачи (6)–(8). Поэтому для этих задач справедлива формула (9).

В [12] также установлена справедливость равенств

$$
\begin{gathered}
SA^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}},\ SA^{\mathrm{T}}BAC^{-1}=A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}S,\ C^{-1}S=(C^{-1}S)^{\mathrm{T}},\\
A_{BC}^{+}AC^{-1}A^{\mathrm{T}}=C^{-1}A^{\mathrm{T}},\ A^{\mathrm{T}}BAA_{BC}^{+}=A^{\mathrm{T}}B.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Лемма 3. Матрицы $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ коммутируют, имеют общую систему собственных векторов и их нуль-пространства совпадают.

Доказательство. Прежде всего отметим, что матрицы $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ симметризуемые симметризатором C и поэтому имеют полную систему собственных векторов, ортонормированных в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_C$. В [12] показано, что матрица $A_{BC}^{+}A$ является многочленом от матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$, т.е. представима в виде

$$
\begin{gathered}
A_{BC}^{+}A=f(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)=\\
=-\alpha_k^{-1}[(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^k+\alpha_1(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA],
\end{gathered}
\tag{11}
$$

откуда очевидно следует перестановочность матриц $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$. Поскольку матрица $A_{BC}^{+}A$ является многочленом от матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$, все собственные векторы матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ будут собственными векторами матрицы $A_{BC}^{+}A$ [23]. В силу последнего обстоятельства и того факта, что матрицы $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ являются матрицами простой структуры, следует, что эти матрицы имеют общую систему собственных векторов.

Теперь покажем, что собственные векторы матриц $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$, соответствующие нулевому собственному значению, совпадают. Из представления матрицы $A_{BC}^{+}A$ формулой (11) следует, что все собственные векторы матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$, соответствующие нулевому собственному значению, будут собственными векторами матрицы $A_{BC}^{+}A$, соответствующие нулевому собственному значению этой матрицы. В силу первого уравнения в (6) имеем $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAA_{BC}^{+}$. Из этого равенства следует, что собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению матрицы $A_{BC}^{+}A$, будут собственными векторами, соответствующими нулевому собственному значению матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$. Следовательно, нуль-пространства матриц $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ совпадают.

Лемма 3 доказана.

Аналогично доказательству леммы 3 на основании представления матрицы AA_{BC}^{+}:

$$
\begin{gathered}
AA_{BC}^{+}=f(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)=\\
=-\alpha_k^{-1}[(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^k+\alpha_1(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B],
\end{gathered}
$$

полученного в [12], доказывается следующая лемма.

Лемма 4. Матрицы AA_{BC}^{+} и $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$ коммутируют, имеют общую систему собственных векторов и их нуль-пространства совпадают.

Лемма 5. Матрицы A, $A_{BC}^{+}A$ и $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$ при выполнении условия (7) имеют один и тот же ранг.

Доказательство. Равенство $rk(A)=rk(A_{BC}^{+}A)$ следует из первого равенства в (6). Действительно, $rk(A)=rk(AA_{BC}^{+}A)\le rk(A_{BC}^{+}A)\le rk(A)$. Равенство $rk(A)=$

$=rk(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)$ следует из (7) и того факта, что умножение на невырожденную матрицу не изменяет ранга матрицы-произведения.

Аналогично имеем.

Лемма 6. Матрицы A, AA_{BC}^{+} и $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$ при выполнении условия (8) имеют один и тот же ранг.

В [12] показано, что матрица A_{BC}^{+} также представима в виде:

$$A_{BC}^{+}=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2, \tag{12}$$

и установлены равенства

$$\begin{gathered} A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}},\ S_2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B=AC^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2, \\ S_2^{\mathrm{T}}B=(S_2^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}},\ S_2L=AA_{BC}^{+}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $S_2=-\alpha_k^{-1}[(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{k-1}+\alpha_1(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E]$, α_p, $p=1,\ldots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)=\det[\lambda E-AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Последнее обстоятельство будет использовано при получении одного из двух вариантов разложений взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ВАРИАНТ 1

На основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (9), равенств (10) и утверждений лемм 1–6 обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная. Далее рассмотрим случай, когда матрица C положительно-определенная, а B — знаконеопределенная, т.е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (7).

Теорема 1. Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной положительно-определенной матрицы $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0<\alpha<0{,}5[\rho(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)]^{-1}, \tag{14}$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+}=\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)^{k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B, \tag{15}$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (6), (7), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Доказательство. Пусть $L=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет собой произведение симметричных положительно-определенной матрицы C^{-1} и знаконеопределенной матрицы $A^{\mathrm{T}}BA$ и согласно [24] имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $A^{\mathrm{T}}BA$. Матрица L симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором C, а справа — симметризатором C^{-1}. В силу условия (14) матрицы $\frac{1}{2}E-\alpha L$ и $\frac{1}{2}E+\alpha L$ невырожденные симметризуемые слева симметризатором C, а справа — симметризатором C^{-1}. Нетрудно убедиться, что $\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k$, $k=1,2,\ldots$, — симметризуемые слева симметризатором C матрицы. Поэтому для них имеют место утверждения леммы 2.

Обозначим $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ собственные значения матрицы L. Пусть Q — C-взвешенная ортогональная матрица, которая приводит матрицы L, $\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k$, $k=1,2,\ldots$, к диагональному виду. Рассмотрим одно из слагаемых матричного ряда (14). В силу утверждения леммы 2 (формулы (4), (5)) с учетом (9), (10) получим

$$\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm T}BA\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha C^{-1}A^{\mathrm T}BA\right)^k C^{-1}A^{\mathrm T}B=$$

$$=\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k C^{-1}A^{\mathrm T}BAC^{-1}SA^{\mathrm T}B=$$

$$=\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k C^{-1}A^{\mathrm T}BAC^{-1}A^{\mathrm T}BAC^{-1}S^2A^{\mathrm T}B=$$

$$=\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k L^2C^{-1}S^2A^{\mathrm T}B=$$

$$=Q\left(\frac{1}{2}E+\Lambda\right)Q^{\mathrm T}CQ\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k Q^{\mathrm T}CQ\Lambda^2Q^{\mathrm T}CC^{-1}S^2A^{\mathrm T}B=$$

$$=Q\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k \Lambda^2Q^{\mathrm T}S^2A^{\mathrm T}B,$$

т.е.

$$\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k C^{-1}A^{\mathrm T}B=$$

$$=Q\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k \Lambda^2Q^{\mathrm T}S^2A^{\mathrm T}B. \tag{16}$$

Поскольку $\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k=\operatorname{diag}\left\{\left(\frac{1}{2}-\alpha\lambda_i\right)^k\right\}$ и при выполнении условия (14) число $\left|\left(\frac{1}{2}-\alpha\lambda_i\right)\right|<1$, матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными $\frac{2}{1+2\alpha\lambda_i}$, а матричный ряд $\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k\Lambda$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными единице при $\lambda_i\neq 0$ и нулю при $\lambda_i=0$, в силу чего

$$\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k\Lambda^2=\Lambda. \tag{17}$$

Учитывая (16), (17), (5), (10), (9), получаем

$$\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k C^{-1}A^{\mathrm T}B=Q\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k\Lambda^2Q^{\mathrm T}S^2A^{\mathrm T}B=$$

$$= Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} S^2 A^{\mathrm{T}} B = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} C C^{-1} S^2 A^{\mathrm{T}} B = L C^{-1} S^2 A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= C^{-1} A^{\mathrm{T}} B A C^{-1} S^2 A^{\mathrm{T}} B = C^{-1} S^2 A^{\mathrm{T}} B A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B = C^{-1} S A^{\mathrm{T}} B = A^{+}_{BC},$$

т.е. разложение взвешенной псевдообратной матрицы (15) с весами, рассмотренными в теореме 1, в матричный степенной ряд с положительными показателями степеней.

Теорема 1 доказана.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ВАРИАНТ 2

На основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (12), равенств (13) и утверждений лемм 1–6 обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды, когда обе весовые матрицы симметричные, причем матрица C невырожденная знаконеопределенная, а B — положительно-определенная, т.е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (8).

Теорема 2. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0 < \alpha < 0{,}5[\rho(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)]^{-1}, \tag{18}$$

имеет место соотношение

$$A^{+}_{BC} = \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B \left(\frac{1}{2}E - \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B\right)^{k} \left(\frac{1}{2}E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B\right), \tag{19}$$

где A^{+}_{BC} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (6), (8), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Доказательство. Пусть $L = AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет собой произведение симметричных знаконеопределенной матрицы $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}$ и положительно-определенной матрицы B и согласно [24] имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Матрица L симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором B, а справа — симметризатором B^{-1}. В силу условия (18) матрицы $\frac{1}{2}E - \alpha L$ и $\frac{1}{2}E + \alpha L$ невырожденные симметризуемые слева симметризатором B, а справа — симметризатором B^{-1}. Нетрудно убедиться, что матрицы $\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, симметризуемые слева симметризатором B. Поэтому для них имеют место утверждения леммы 2.

Обозначим $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)\,(i = 1, \ldots, n)$ собственные значения матрицы L. Пусть Q — B-взвешенная ортогональная матрица, которая приводит матрицы L, $\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, к диагональному виду. Рассмотрим одно из слагаемых матричного ряда (19). В силу утверждения леммы 2 (формулы (4), (5)) с учетом (12), (13) получим

$$C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k}\left(\frac{1}{2}E + \alpha L\right) = C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k}\left(\frac{1}{2}E + \alpha L\right) =$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2L^2\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\Lambda^2Q^{\mathrm{T}}BQ\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^kQ^{\mathrm{T}}BQ\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)Q^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\frac{1}{2}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\Lambda^2\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)Q^{\mathrm{T}}B,$$

т.е.

$$C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha L\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha L\right)=$$
$$=\frac{1}{2}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\Lambda^2\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha\Lambda\right)Q^{\mathrm{T}}B. \qquad (20)$$

Учитывая равенства (17), (20), (12), (13), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right)^k\left(\frac{1}{2}E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right)=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^2\left(\frac{1}{2}E-\alpha\Lambda\right)^k(E+\alpha\Lambda)Q^{\mathrm{T}}B=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}B=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2L=A_{BC}^+S_2L=A_{BC}^+AA_{BC}^+=A_{BC}^+,$$

т.е. разложение взвешенной псевдообратной матрицы (19), определенной условиями (6), (8), в матричный степенной ряд с положительными показателями степеней.

4. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Вначале используем разложение (15) для построения итерационных процессов вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам, определенным условиями (6), (7). Положим

$$X_k=\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}E-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)^iC^{-1}A^{\mathrm{T}}B,\ k=1,2,\ldots \qquad (21)$$

Тогда для вычисления приближения к A_{BC}^+ получим итерационный процесс

$$X_1=\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)C^{-1}A^{\mathrm{T}}B,$$
$$X_k=\left(\frac{1}{2}E-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)X_{k-1}+\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)C^{-1}A^{\mathrm{T}}B,\ k=2,3,\ldots \qquad (22)$$

Теорема 3. Итерационный процесс (22) сходится, причем имеет место оценка

$$\|A_{BC}^+-X_k\|_{C^{1/2}V}\le q^k\|A_{BC}^+\|_{C^{1/2}V}, \qquad (23)$$

где A_{BC}^+ — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (6), (7),

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица, которая входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы, $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица, $q = \left\| \frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA \right\|_{C^{1/2}V} = \rho\left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA \right) < 1$.

Доказательство. Сходимость последовательности матриц, определенной в (22), к взвешенной псевдообратной матрице при $k \to \infty$ следует из того факта, что эта последовательность построена на основе матричного ряда (15). Дадим оценку уменьшения нормы погрешности после k-й итерации.

Пусть $L = C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA$, $F = \frac{1}{2} E - \alpha L$, тогда в силу (15), (21) и перестановочности матриц F^k и $\frac{1}{2} E + \alpha L$ получим

$$A_{BC}^{+} - X_k = \left(\frac{1}{2} E + \alpha L \right) \sum_{i=k}^{\infty} F^i C^{-1} A^{\mathrm{T}} B = \left(\frac{1}{2} E + \alpha L \right) F^k \sum_{i=0}^{\infty} F^i C^{-1} A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= F^k \left(\frac{1}{2} E + \alpha L \right) \sum_{i=0}^{\infty} F^i C^{-1} A^{\mathrm{T}} B = \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^k A_{BC}^{+}.$$

С учетом первых двух равенств в (6), четвертого равенства в (10) и того обстоятельства, что матрица $A_{BC}^{+} A$ идемпотентная, последнее равенство запишем в виде

$$A_{BC}^{+} - X_k = \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^k A_{BC}^{+} = \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right) A_{BC}^{+} A A_{BC}^{+} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha A_{BC}^{+} A C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA A_{BC}^{+} A \right) A_{BC}^{+} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-1} \left(\frac{1}{2} (A_{BC}^{+} A)^2 - \alpha A_{BC}^{+} A L \right) A_{BC}^{+} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-1} A_{BC}^{+} A \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L \right) A_{BC}^{+} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-2} \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha A_{BC}^{+} A L A_{BC}^{+} A \right) \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L \right) A_{BC}^{+} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} E - \alpha L \right)^{k-2} A_{BC}^{+} A \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L \right)^2 A_{BC}^{+} = \ldots = \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L \right)^k A_{BC}^{+},$$

т.е.

$$A_{BC}^{+} - X_k = \left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L \right)^k A_{BC}^{+}. \tag{24}$$

Покажем, что абсолютная величина собственных значений матрицы $\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L$, где α определено формулой (14), меньше единицы. Для этого используем утверждения лемм 3 и 5. Из первого и четвертого равенств в (6) соответственно следует, что матрица $A_{BC}^{+} A$ идемпотентная и симметризуемая матрицей симметризации C. Таким образом, матрица $A_{BC}^{+} A$ есть взвешенная проекционная матрица. Ее собственные значения принимают два значения: 0 и 1. В силу последнего обстоятельства и утверждения лемм 3 и 5 следует, что ненулевые собственные значения матрицы $\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha L$ равны $\mu_i = \frac{1}{2} - \alpha \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, где λ_i — собственные значения матрицы L, а r — ранг матрицы $\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha L$. Из определения α соотношением (14) следует $|\mu_i|<1$.

Обозначим $W=\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha L$. Пусть в (3) $M=C^{1/2}$, тогда на основании второго соотношения в (3) имеем

$$\| WA_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le \| W\|_{C^{1/2}C^{-1/2}}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}. \qquad (25)$$

Поскольку матрица W симметризуема слева симметризатором C и собственные значения матрицы-произведения квадратных матриц при перестановке не изменяются, на основании (2) из (25) получим

$$\| WA_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le [\rho(C^{-1/2}W^{\mathrm{T}}CWC^{-1/2})]^{1/2}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}=$$

$$=[\rho(C^{-1/2}CW^{2}C^{-1/2})]^{1/2}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}=[\rho(C^{1/2}W^{2}C^{-1/2})]^{1/2}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}=$$

$$=[\rho(W^{2})]^{1/2}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}=q\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V},$$

т.е.

$$\| W\|_{C^{1/2}C^{-1/2}}=q,\ \| WA_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le q\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}, \qquad (26)$$

где

$$q=\left\| \frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right\|_{C^{1/2}V}=\rho\left(\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right)<1. \qquad (27)$$

Теперь, учитывая (25)–(27) и то обстоятельство, что для любой квадратной матрицы справедливо неравенство $\| W^{k}\|\le \| W\|^{k}$ (см., например, [24]) при любом $k=1,2,\ldots$, из (24) получаем

$$\| A_{BC}^{+}-X_{k}\|_{C^{1/2}V}=\left\| \left(\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha L\right)^{k}A_{BC}^{+}\right\|_{C^{1/2}V}=$$

$$=\| W^{k}A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le \| W^{k}\|_{C^{1/2}C^{-1/2}}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le$$

$$\le \| W\|_{C^{1/2}C^{-1/2}}^{k}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}=q^{k}\| A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V},$$

т.е. оценку (23), что завершает доказательство теоремы 3.

Теперь используем разложение (19) для построения итерационных процессов вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам, определенным условиями (6), (8). Положим

$$X_{k}=\sum_{i=0}^{k-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right)^{i}\left(\frac{1}{2}E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right),\ k=1,2,\ldots \qquad (28)$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_{1}=C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right),$$

$$X_{k}=\left(\frac{1}{2}E-\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right)X_{k-1}+C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right),\ k=2,3,\ldots \qquad (29)$$

Теорема 4. Итерационный процесс (29) сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+}-X_{k}\|_{HB^{-1/2}}\le q^{k}\| A_{BC}^{+}\|_{HB^{-1/2}}, \qquad (30)$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (6), (8), $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определенная матрица, которая входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица, $q = \left\| \frac{1}{2} AA_{BC}^{+} - \alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B \right\|_{HB^{-1/2}} =$ $= \rho\left(\frac{1}{2} AA_{BC}^{+} - \alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right) < 1$.

Доказательство. Сходимость последовательности матриц, определенной в (29), к взвешенной псевдообратной матрице при $k \to \infty$ следует из того факта, что эта последовательность построена на основе матричного ряда (19). Дадим оценку уменьшения нормы погрешности после k-й итерации.

Пусть $L = AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$, $F = \frac{1}{2}E - \alpha L$, тогда в силу (19), (28) и перестановочности матриц F^k и $\frac{1}{2}E + \alpha L$ получим

$$A_{BC}^{+} - X_k = \sum_{i=k}^{\infty} C^{-1}A^{\mathrm{T}}BF^{i}\left(\frac{1}{2}E + \alpha L\right) = C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E + \alpha L\right)F^{k}\sum_{i=0}^{\infty}F^{i} =$$

$$= C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E + \alpha L\right)\sum_{i=0}^{\infty}F^{i}F^{k} = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k}.$$

С учетом первых двух равенств в (6), пятого равенства в (10) и того обстоятельства, что матрица AA_{BC}^{+} идемпотентная, последнее равенство запишем в виде

$$A_{BC}^{+} - X_k = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}A_{BC}^{+} - \alpha A_{BC}^{+}L\right)\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}A_{BC}^{+}AA_{BC}^{+} - \alpha A_{BC}^{+}L\right)\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-1} = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-1} =$$

$$= A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}(AA_{BC}^{+})^{2} - \alpha LAA_{BC}^{+}\right)\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-1} =$$

$$= A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)AA_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-1} = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha AA_{BC}^{+}LAA_{BC}^{+}\right)\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-2} =$$

$$= A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)AA_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-2} =$$

$$= A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)^{2}AA_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}E - \alpha L\right)^{k-2} = \ldots = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)^{k},$$

т.е.

$$A_{BC}^{+} - X_k = A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L\right)^{k}. \tag{31}$$

Покажем, что абсолютная величина собственных значений матрицы $\frac{1}{2}AA_{BC}^{+} - \alpha L$, где α определено формулой (18), меньше единицы. Для этого используем утверждения лемм 4 и 6. Из первого и четвертого равенств в (6) соответственно следует, что матрица AA_{BC}^{+} идемпотентная и симметризуемая матрицей симметризации B. Таким образом, матрица AA_{BC}^{+} есть взвешенная проекционная матрица. Ее собственные значения принимают два значения: 0 и 1. В силу последнего обстоятельства и утверждения лемм 4 и 6 следует, что ненулевые собственные значения матрицы $\frac{1}{2}AA_{BC}^{+}-\alpha L$ равны $\mu_i=\frac{1}{2}-\alpha\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,r$, где λ_i — собственные значения матрицы L, а r — ранг матрицы $\frac{1}{2}AA_{BC}^{+}-\alpha L$. Из определения α соотношением (18) следует $|\mu_i|<1$.

Обозначим $W=\frac{1}{2}AA_{BC}^{+}-\alpha L$. Пусть в (3) $M=B^{-1/2}$, тогда на основании первого соотношения в (3) имеем

$$||A_{BC}^{+}W||_{HB^{-1/2}}\le||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}\,||W||_{B^{1/2}B^{-1/2}}=||W||_{B^{1/2}B^{-1/2}}\,||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}. \quad (32)$$

Поскольку матрица W симметризуема слева симметризатором B и собственные значения матрицы-произведения квадратных матриц при перестановке не изменяются, на основании (2) из (32) получим

$$||A_{BC}^{+}W||_{HB^{-1/2}}\le[\rho(B^{-1/2}W^{\mathrm{T}}BWB^{-1/2})]^{1/2}||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}=$$

$$=[\rho(B^{-1/2}BW^{2}B^{-1/2})]^{1/2}||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}=$$

$$=[\rho(B^{1/2}W^{2}B^{-1/2})]^{1/2}||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}=[\rho(W^{2})]^{1/2}||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}=q\,||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}},$$

т.е.

$$||W||_{B^{1/2}B^{-1/2}}=q,\ ||A_{BC}^{+}W||_{HB^{-1/2}}\le q\,||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}, \quad (33)$$

где

$$q=\left\|\frac{1}{2}A_{BC}^{+}A-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA\right\|_{HB^{-1/2}}=\rho\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+}-\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B\right)<1. \quad (34)$$

Теперь, учитывая (32)–(34) и то обстоятельство, что для любой квадратной матрицы справедливо неравенство $||W^k||\le||W||^k$ (см, например, [24]) при любом $k=1,2,\ldots$, из (31) получаем

$$||A_{BC}^{+}-X_k||_{HB^{-1/2}}=\left\|A_{BC}^{+}\left(\frac{1}{2}AA_{BC}^{+}-\alpha L\right)^{k}\right\|_{HB^{-1/2}}=||W^{k}A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}\le$$

$$\le||W^{k}||_{B^{1/2}B^{-1/2}}\,||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}\le$$

$$\le||W||_{B^{1/2}B^{-1/2}}^{k}\,||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}}=q^{k}||A_{BC}^{+}||_{HB^{-1/2}},$$

т.е. оценку (30), что и завершает доказательство теоремы 4.

Таким образом, получены итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весовыми матрицами. Из оценок (23), (30) следует, что погрешность приближения зависит от количества итераций и величины q, определенной в теоремах 3 и 4. Очевидно, что параметр α необходимо выбирать таким, чтобы величина q была минимальной для данной задачи. При решении прикладных задач исходные данные, как правило, задаются с погрешностью, кроме того, погрешность в решения вносят ошибки округления. Следовательно, актуальна задача согласования числа итераций, величины погрешности исходных данных и ошибок округления для получения необходимой точности приближенного решения итерационными методами. Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку вычисление псевдообратных матриц относится к классу некорректных задач (нет непрерывной зависимости решения задачи от изменения исходных данных).

Отметим, что взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами, построенное в [25], использовалось для анализа влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами (см., например, [26–30]).

Значительное количество работ (см. [9, 31, 32] и ссылки к ним) посвящено построению и исследованию итерационных процессов и регуляризованных итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными и положительно-полуопределенными весовыми матрицами, основанные на разложениях этих матриц в матричные степенные ряды и произведения. Для вычисления нормальных псевдорешений с наперед заданной точностью систем с симметричными разреженными полуопределенными матрицами в [33] предложен метод трехэтапной регуляризации. Для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами, когда одна из весовых матриц знаконеопределенная, в [12, 14] построены и исследованы регуляризованные итерационные процессы на основе полученных в цитируемых работах разложений взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней.

5. ДРУГИЕ ВАРИАРИАНТЫ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Ранее рассматривались два варианта взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами, определенных условиями (6), (7) и (6), (8). Для вычисления приближений к этим псевдообратным матрицам в разд. 4 построены и исследованы итерационные методы. Описаны случаи, когда обе идемпотентные матрицы: AX и XA, согласно определению 1 симметризуемые слева симметризаторами B и C. Далее рассмотрим еще три вида взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными весами. Для этого используем легко проверяемое утверждение.

Лемма 7. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C = C^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденные матрицы и выполняются условия $AXB = (AXB)^{\mathrm{T}}$, $XAC = (XAC)^{\mathrm{T}}$, тогда $B^{-1}AX = (B^{-1}AX)^{\mathrm{T}}$, $C^{-1}XA = (C^{-1}XA)^{\mathrm{T}}$.

Вначале рассмотрим случай, когда идемпотентные матрицы AX и XA согласно определению 1 симметризуемые справа невырожденными симметризаторами B и C, т.е. приведем систему матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AXB)^{\mathrm{T}} = AXB,\ (XAC)^{\mathrm{T}} = XAC. \tag{35}$$

В силу леммы 7 можно записать следующую систему матричных уравнений, эквивалентную системе (35):

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (B^{-1}AX)^{\mathrm{T}} = B^{-1}AX,\ (C^{-1}XA)^{\mathrm{T}} = C^{-1}XA. \tag{36}$$

Рассмотрим систему матричных уравнений (36) при двух условиях для весовых матриц B и C:

— когда матрица C положительно-определенная, а B — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(A^{\mathrm{T}}B^{-1}A) = rk(A); \tag{37}$$

— когда матрица B положительно-определенная, а C — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(ACA^{\mathrm{T}}) = rk(A). \tag{38}$$

Следовательно, рассмотрим два варианта взвешенных псевдообратных матриц, определяемых условиями (36), (37) и (36), (38).

Тогда на основании теоремы 1 имеет место следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (35), (37) (или (36), (37)), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной положительно-определенной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0< \alpha < 0{,}5[\rho(CA^{\mathrm{T}} B^{-1} A)]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \left(\frac{1}{2} E + \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} E - \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right)^{k} C A^{\mathrm{T}} B^{-1}, \qquad (39)$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (36), (37) (или (35), (37)), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

На основании теоремы 2 имеет место следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (35), (38), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0< \alpha < 0{,}5[\rho(ACA^{\mathrm{T}} B^{-1})]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=0}^{\infty} C A^{\mathrm{T}} B^{-1} \left(\frac{1}{2} E - \alpha A C A^{\mathrm{T}} B^{-1}\right)^{k} \left(\frac{1}{2} E + \alpha A C A^{\mathrm{T}} B^{-1}\right), \qquad (40)$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (36), (38) (или (35), (38)), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Рассмотрим задачу построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (35), (37) и (35), (38). Для вычисления приближения к A_{BC}^{+} на основании разложения (39) получим итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_1 = \left(\frac{1}{2} E + \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right) C A^{\mathrm{T}} B^{-1}, \\ X_k = \left(\frac{1}{2} E - \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right) X_{k-1} + \left(\frac{1}{2} E + \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right) C A^{\mathrm{T}} B^{-1}, \ k = 2, 3, \ldots \end{gathered} \qquad (41)$$

На основании теоремы 3 имеем следующее утверждение относительно сходимости итерационного процесса (41) и оценки уменьшения нормы начальной погрешности после k-й итерации.

Итерационный процесс (41) сходится, причем имеет место оценка

$$|| A_{BC}^{+} - X_k ||_{C^{-1/2} V} \leq q^k || A_{BC}^{+} ||_{C^{-1/2} V},$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (35), (37), $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица, которая входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы, $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица, $q = \left\| \frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A \right\|_{C^{1/2} V} = \rho\left(\frac{1}{2} A_{BC}^{+} A - \alpha C A^{\mathrm{T}} B^{-1} A\right) < 1.$

Для вычисления приближения к A_{BC}^{+} на основании разложения (40) получим итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_1 = C A^{\mathrm{T}} B^{-1} \left(\frac{1}{2} E + \alpha A C A^{\mathrm{T}} B^{-1}\right), \\ X_k = \left(\frac{1}{2} E - \alpha A C A^{\mathrm{T}} B^{-1}\right) X_{k-1} + C A^{\mathrm{T}} B^{-1} \left(\frac{1}{2} E + \alpha A C A^{\mathrm{T}} B^{-1}\right), \ k = 2, 3, \ldots \end{gathered} \qquad (42)$$

На основании теоремы 4 имеем следующее утверждение относительно сходимости итерационного процесса (42) и оценки уменьшения нормы начальной погрешности после k-й итерации.

Итерационный процесс (42) сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_k \|_{HB^{1/2}} \le q^k \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{1/2}},$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (35), (38), $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определенная матрица, которая входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица, $q = \left\| \frac{1}{2} AA_{BC}^{+} - \alpha ACA^{\mathrm{T}} B^{-1} \right\|_{HB^{1/2}} = \rho \left(\frac{1}{2} AA_{BC}^{+} - \alpha ACA^{\mathrm{T}} B^{-1} \right) < 1.$

Теперь рассмотрим случай, когда идемпотентная матрица AX согласно определению 1 симметризуемая слева невырожденным симметризатором B, а XA — симметризуемая справа невырожденным симметризатором C, т.е. рассмотрим систему матричных уравнений

$$AXA = A, \ XAX = X, \ (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX, \ (XAC)^{\mathrm{T}} = XAC. \tag{43}$$

В силу леммы 7 можно записать следующую систему матричных уравнений, эквивалентную системе (43):

$$AXA = A, \ XAX = X, \ (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX, \ (C^{-1}XA)^{\mathrm{T}} = C^{-1}XA. \tag{44}$$

Рассмотрим систему матричных уравнений (44) при двух условиях для весовых матриц B и C:

— когда матрица C положительно-определенная, а B — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(A^{\mathrm{T}} BA) = rk(A); \tag{45}$$

— когда матрица B положительно-определенная, а C — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(ACA^{\mathrm{T}}) = rk(A). \tag{46}$$

Следовательно, рассмотрим два варианта взвешенных псевдообратных матриц, определяемых условиями (43), (45) и (43), (46) или (44), (45) и (44), (46).

Тогда на основании теоремы 1 имеет место разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (43), (45), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной положительно-определенной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0 < \alpha < 0{,}5\,[\rho(CA^{\mathrm{T}} BA)]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \left(\frac{1}{2} E + \alpha CA^{\mathrm{T}} BA \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} E - \alpha CA^{\mathrm{T}} BA \right)^{k} CA^{\mathrm{T}} B,$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (43), (45) (или (44), (45)), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

На основании теоремы 2 имеет место разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (43), (46), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0 < \alpha < 0{,}5\,[\rho(ACA^{\mathrm{T}} B)]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+}=\sum_{k=0}^{\infty}CA^{\mathrm{T}}B\left(\frac{1}{2}E-\alpha ACA^{\mathrm{T}}B\right)^{k}\left(\frac{1}{2}E+\alpha ACA^{\mathrm{T}}B\right),$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (43), (46) (или (44), (46)), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Теперь рассмотрим случай, когда идемпотентная матрица AX согласно определению 1 симметризуемая справа невырожденным симметризатором B, а XA — симметризуемая слева невырожденным симметризатором C, т.е. рассмотрим систему матричных уравнений

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (AXB)^{\mathrm{T}}=AXB,\ (CXA)^{\mathrm{T}}=CXA. \tag{47}$$

В силу леммы 7 можно записать следующую систему матричных уравнений, эквивалентную системе (47)

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (B^{-1}AX)^{\mathrm{T}}=B^{-1}AX,\ (CXA)^{\mathrm{T}}=CXA. \tag{48}$$

Рассмотрим систему матричных уравнений (48) при двух условиях для весовых матриц B и C:

— когда матрица C положительно-определенная, а B — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(A^{\mathrm{T}}B^{-1}A)=rk(A), \tag{49}$$

— когда матрица B положительно-определенная, а C — невырожденная знаконеопределенная при

$$rk(AC^{-1}A^{\mathrm{T}})=rk(A). \tag{50}$$

Следовательно, рассмотрим два варианта взвешенных псевдообратных матриц, определяемых условиями (47), (49) и (47), (50) или (48), (49) и (48), (50).

Тогда на основании теоремы 1 имеет место разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (47), (49), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной матрицы $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0<\alpha<0{,}5[\rho(C^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}A)]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+}=\left(\frac{1}{2}E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}A\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}E-\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}A\right)^{k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1},$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (47), (49) или (48), (49), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

На основании теоремы 2 имеет место разложение взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (47), (50), в матричный степенной ряд.

Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$0<\alpha<0{,}5[\rho(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1})]^{-1},$$

имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+}=\sum_{k=0}^{\infty}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}\left(\frac{1}{2}E-\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B^{-1}\right),$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (47), (50) или (48), (50), $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложено и обосновано разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней. Предполагается, что обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная. Математическими аппаратами исследования являются представление взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц и взвешенное спектральное разложение симметризуемых матриц. На основе разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды построены и исследованы итерационные процессы для их вычисления. Обоснован выбор итерационных параметров, обеспечивающий сходимость итерационных процессов. Получены оценки уменьшения норм погрешности приближенного решения после k-й итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Amer.Statist. Assoc*. 1964. Vol. 59, N 308. P. 1078–1111.
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math*. 1968. Vol. 16, N 5. P. 931–944.
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. A note on the oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. Vol. 20, N 2. P. 173–175.
4. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 8. С. 1347–1363.
6. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 1. С. 80–101.
7. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 47, № 1. С. 14–33.
8. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф. Взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 5. С. 56–80.
9. Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. Т. 54, № 3. С. 65–93.
10. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore–Penroze inverses. *Linear Algebra and Appl.* 1974. N 9. P. 155–167.
11. Rao C.R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley, 1971. 240 p.
12. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 6. С. 752–772.
13. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через другие псевдообратные матрицы. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 17–25.
14. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 67–80.
15. Варенюк Н.А., Галба Є.Ф., Сергієнко І.В., Тукалевська Н.І. Ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами на основі їх розвинення у матричні степеневі ряди. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2020. № 8. С. 19–25.
16. Понтрягин Л.С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. *Известия АН СССР. Сер. матем*. 1944. Т. 8. С. 243–280.
17. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948.
18. Bognar J. Indefinite inner product spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1974.
19. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and indefinite scalar products. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser, 1983.
20. Azizov T.Ya., Iohvidov I.S. Linear operators in spaces with an indefinite metric. Chichester: John Wiley and Sons, Ltd., 1989.
21. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices. *Z. angew. Math. und Mech*. 1984. Vol. 64, N 9. P. 439–441.
22. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1992. Т. 32, № 8. С. 155–169.
23. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. Москва: Наука. 1984. 319 с.
24. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.

25. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition. *SIAM J. Numer. Anal*. 1976. Vol. 13, N 1. P. 76–83.
26. Wei Y., Wang D. Condition numbers and perturbation of the weighted Moore–Penrose inverse and weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput.* 2003. Vol. 145. P. 45–58.
27. Wei Y. A note on the sensitivity of the solution of the weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput*. 2003. Vol. 145. P. 481–485.
28. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 44, № 6. С. 83–95.
29. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 3. С. 422–430.
30. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. Т. 32, № 3. С. 142–145.
31. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. I. Положительно-определенные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. Т. 44, № 1. С. 47–73.
32. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. II. Вырожденные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. Т. 44, № 3. С. 75–102.
33. Химич А.Н., Попов А.В., Полянко В.В. Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 6. С. 159–174.

Надійшла до редакції 03.07.2020

Н.А. Варенюк, Є.Ф. Галба, І.В. Сергієнко, Н.І. Тукалевська

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗВАЖЕНИХ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ ЗІ ЗМІШАНИМИ ВАГАМИ

Анотація. Отримано і досліджено розвинення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами (одна вагова матриця додатно-означена, а інша — невироджена знаконевизначена) в матричні степеневі ряди з додатними показниками степенів. На основі таких розвинень побудовано і вивчено ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць зі змішаними вагами. Розглянуто різні варіанти зважених псевдообернених матриць зі змішаними невиродженими вагами і побудовано їхні розвинення в матричні степеневі ряди.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці з індефінітними і змішаними вагами, матричні степеневі ряди, ітераційні методи.

N.A. Vareniuk, E.F. Galba, I.V. Sergienko, N.I. Tukalevska

ITERATIVE METHODS FOR CALCULATION OF WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH MIXED WEIGHTS

Abstract. The decompositions of weighted pseudoinverse matrices with mixed weights (one of weighted matrix is positive definite and other is nonsingular indefinite) into matrix power series with positive exponents are obtained and investigated. Iterative methods for calculation of weighted pseudoinverce matrices with mixed weights are generated and investigated on the basis of the obtained expansions of weighted pseudoinverse matrices. Different variants of weighted pseudoinverce matrices with mixed nonsingular weights are analyzed and developed into matrix power series.

Keywords: weighted pseudoinverse matrices with indefinite and mixed weights, matrix power series, iterative methods.

Варенюк Наталия Анатольевна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvareniuk@ukr.net.

Галба Евгений Федорович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев.

Сергиенко Иван Васильевич,
академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: incyb@incyb.kiev.ua.

Тукалевская Нелля Ивановна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украини, Киев, e-mail: Tukalevska@nas.gov.ua.