УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ УНИМОДАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аннотация. Найдены точные нижние оценки вероятностей попадания неотрицательных унимодальных случайных величин μ в интервалы $(m-\alpha\sigma_\mu, m+\alpha\sigma_\mu)$, где мода m, которая совпадает с первым моментом случайной величины μ, меньше, чем среднее квадратическое отклонение: $m<\sigma_\mu$. Параметр α удовлетворяет неравенствам $0<\alpha<m/\sigma_\mu<1$. Этот результат может быть применен при расчете вероятности попадания снаряда в полосу при прицельной стрельбе.

Ключевые слова: линейные функционалы от унимодальных функций распределения, экстремальные значения линейных функционалов, преобразование Джонсона–Роджерса, точные обобщенные неравенства Чебышева для функционалов от унимодальных функций распределения.

Для сложного современного высоконадежного оружия (особенно на стадии его проектирования), как правило, неизвестны функции распределения случайной величины μ — расстояния от точки попадания снаряда до центра мишени.

Возможность иметь статистические данные для подтверждения той или иной гипотезы о законе распределения μ ограничена, однако имеющейся статистики бывает достаточно для оценки одного–двух моментов этого закона. Если, кроме этого, из физических соображений следует унимодальность распределения и мишень принять за моду, то можно получать высокие наименьшие оценки вероятности попадания снаряда в полосу, содержащую мишень, даже при наличии отклонений, превышающих моду.

Рассматриваемая работа является продолжением статьи [1, теорема 3], в которой найдены точные нижние оценки вероятностей попадания случайной величины μ в интервал $(m-\sigma_\mu,\ m+\sigma_\mu)$ в случае, когда мода m превосходит σ_μ. В данной статье исследован случай, когда $m<\sigma_\mu$. Ключевая идея, которая помогла решить эту задачу, была предложена автору член-корреспондентом НАН Украины Н.Ю. Кузнецовым, который рекомендовал ввести в рассмотрение новый параметр $\alpha>0$, удовлетворяющий неравенствам

$$0<\alpha<\frac{m}{\sigma_\mu}<1. \qquad (1)$$

Это позволило образовать симметричные относительно моды интервалы $(m-\alpha\sigma_\mu, m+\alpha\sigma_\mu)$, которые вложены один в другой и их объединение приближается к интервалу $(m-\sigma_\mu,\ m+\sigma_\mu)$ при $\alpha\to 1$; в этих интервалах (при малых α) допускались большие дисперсии (больше моды), что послужило основанием к решению поставленной задачи.

Задача 1. Пусть $\mu\ge 0$ — случайная величина с унимодальной функцией распределения (ф.р.) $F_\mu(x)$ с заданными модой $m>0$ и моментами $\int_0^\infty x dF_\mu(x)=m_1$,

$\int\limits_0^\infty x^2 dF_\mu(x) = m_2$. В таком случае известна дисперсия $\sigma_\mu^2 = m_2 - m_1^2$. Пусть выполняются следующие ограничения на параметры:

$$m = m_1 > 0, \quad 0 < m < \sigma_\mu, \quad 0 < \alpha\sigma_\mu < m. \tag{2}$$

Необходимо найти точные нижние оценки (инфимумы) вероятности

$$P\{m - \alpha\sigma_\mu < \mu < m + \alpha\sigma_\mu\} = \int\limits_{m-\alpha\sigma_\mu}^{m+\alpha\sigma_\mu} dF_\mu(x) = I(F_\mu) \tag{3}$$

и ф.р. $F_\mu(x)$, на которых они достигаются.

Перейдем от задачи 1 к эквивалентной задаче 2. Переход осуществляется с помощью преобразования [2]

$$F_\eta(x) = F_\mu(x) + (m - x) f_\mu(x), \tag{4}$$

где $F_\eta(x)$ — ф.р. случайной величины η (не обязательно унимодальной), $f_\mu(x)$ — плотность распределения случайной величины μ. Пусть $f_\mu(x)$ почти всюду дифференцируема, за исключением двух или трех точек и, возможно, моды. Пусть также

$$f_\mu(0) = 0, \quad x^3 f_\mu(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0. \tag{5}$$

Из (4) следует

$$dF_\eta(x) = (m - x) df_\mu(x). \tag{6}$$

С учетом (6), интегрируя по частям и используя условия (5), находим моменты случайной величины η:

$$s_i = \int\limits_0^\infty x^i dF_\eta(x) = (i+1)m_i - imm_{i-1}, \quad i = \overline{1, k}, \; s_0 = 1. \tag{7}$$

Из (7) при условии $m = m_1$ находим

$$s_1 = \int\limits_0^\infty x dF_\eta(x) = 2m_1 - m = m, \quad s_2 = \int\limits_0^\infty x^2 dF_\eta(x) = 3m_2 - 2m_1^2. \tag{8}$$

Из (8) следует

$$s_1 = m_1 = m, \; \sigma_\eta = \sigma_\mu \sqrt{3}. \tag{9}$$

Далее найдем функционал $I(F_\eta)$, равный исходному функционалу $I(F_\mu)$. С учетом (4), (6) и (9) получим

$$I(F_\eta) = \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{s_1 - \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}}} \frac{dF_\eta(x)}{s_1 - x} + \int\limits_{s_1 - \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}}}^{s_1 + \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}}} dF_\eta(x) + \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \int\limits_{s_1 + \frac{\alpha\sigma_\eta}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{dF_\eta(x)}{x - s_1} = I(F_\mu). \tag{10}$$

Сформулируем теперь более простую задачу 2, эквивалентную задаче 1.

Задача 2. Найти точные нижние оценки функционала (10) в классе

$$K_2 = \left\{ F_\eta : F_\eta(0-) = 0, \; \int\limits_0^\infty x dF(x) = s_1, \; \int\limits_0^\infty x^2 dF(x) = s_2, \; 0 < s_1^2 < s_2 < \infty \right\}$$

при ограничениях (2) и ф.р. $F_\eta(x)$, на которых они достигаются.

Параметрами задачи 2 являются моменты s_1, s_2 (или σ_η) и параметр α (см. (1)). Все они взаимосвязаны (см. (2)). Зная значение параметров s_1, σ_η и выбирая значение α в интервале

$$0<\alpha<\frac{s_1\sqrt{3}}{\sigma_\eta}, \tag{11}$$

получаем интервал для изменения параметра σ_η:

$$0<s_1\sqrt{3}<\sigma_\eta<\frac{s_1\sqrt{3}}{\alpha}, \tag{12}$$

и интервал попадания $\left(s_1-\frac{\alpha\,\sigma_\eta}{\sqrt{3}},\ s_1+\frac{\alpha\,\sigma_\eta}{\sqrt{3}}\right)$.

При решении задачи 2 в основной роли выступает следующая теорема.

Теорема 1. Если параметры s_1, σ_η и α удовлетворяют неравенствам (12), то инфимум функционала (10) вычисляется на ступенчатой ф.р. $F_{\eta o}$ с точками роста $x_1=0$, $z_0=s_1(2+\sqrt{2})$ и скачками в них, равными $p_1=\frac{z_0-s_1}{z_0}\approx 0.7071$; $p_2=\frac{s_1}{z_0}\approx 0.2929$. (Заметим, что точки роста зависят только от параметра s_1, а скачки постоянны.) Инфимум равен

$$I(F_{\eta 0})=\frac{\alpha\sigma_\eta 0.7071}{s_1\sqrt{3}}+\frac{\alpha\sigma_\eta 0.2929}{s_1\sqrt{3}(2.4142)}\approx\frac{\alpha\sigma_\eta 0.8284}{s_1\sqrt{3}}<0.8284\,. \tag{13}$$

Доказательство. Второй момент ф.р. $F_{\eta o}$ равен

$$s_{20}=0\cdot p_1+z_0^2p_2=z_0s_1=s_1^2\,3.4142\,.$$

Из неравенства (12) следует, что наименьшее значение дисперсии $\sigma^2_{\eta\min}$ ф.р. $F_{\eta o}$ в этой области больше $3s_1^2$. Дисперсии $\sigma^2_{\eta\min}$ соответствует наименьшее значение второго момента $s_{2\min}=\sigma^2_{\eta\min}+s_1^2>4s_1^2$ в этой же области. Итак, имеем $s_{20}=z_0s_1=s_1^2\,3.4142$ и $s_{2\min}>4s_1^2$. Отсюда следует $z_0s_1<s_{2min}$. Далее с увеличением σ_η в допустимых пределах (12) будет увеличиваться s_2. Следовательно, для каждого согласованного фиксированного набора значений параметров s_1, σ_η, α, удовлетворяющих всей области (12), будет выполняться также неравенство $z_0s_1<s_2$. Это означает. что вторая точка роста z_0 ф.р. $F_{\eta 0}$ меньше точки $B=\frac{s_2}{s_1}$ и поэтому ф.р. $F_{\eta 0}$ имеет второй момент s_{20}, меньший s_2. Этим объясняется, что $F_{\eta 0}\notin K_2$, но $F_{\eta 0}$ принадлежит замыканию множества K_2 $(F_{\eta 0}\in[K_2])$. Поэтому многочлен $U_0(x)$, соответствующий $F_{\eta 0}$, графически будет прямой линией, проходящей через точки (0, $g(0)$), $(z_0, g(z_0))$ и касающейся функции $g(x)$ в точке z_0:

$$U_0(x)=g(z_0)+g'(z_0)(x-z_0)\,.$$

Легко видеть, что этот многочлен будет удовлетворять всем необходимым и достаточным условиям, чтобы ф.р. $F_{\eta 0}$ была экстремальной (см., например [3]).

Следовательно, теорема 1 доказана.

Рассмотрим на примере процесс решения задачи 2. Пусть заданы $m=10, \sigma_{\mu 1}=16, \dfrac{m}{\sigma_{\mu 1}}=0.625$. Находим $s_1=10, \sigma_{\eta 1}=\sigma_{\mu 1}\sqrt{3}=27.7128.$ Далее следует выбрать параметр α, при этом должно выполняться строгое неравенство $0<\alpha<0.625$. Если параметр α будет даже незначительно больше, например $\alpha_1=0.626$, то интервал допустимых значений для σ_η, равный (см. (12)) (17.32–27.67), не будет содержать заданного $\sigma_{\eta 1}=\sigma_{\mu 1}\sqrt{3}=27.7128$ и тогда невозможно воспользоваться теоремой 1. Рассмотрим меньшие значения параметра α для этого же примера. Пусть $\alpha_2=0.62$. Находим интервал допустимых значений σ_η: $(17.32-27.835)$. Как видим, $\sigma_{\eta 1}$ принадлежит этому интервалу и согласно теореме 1

$$\inf_{F_\eta \in K_2} I(F_\eta) \approx \frac{0.62\times 27.7128\times 0.8284}{17.32} \approx 0.8218\,.$$

При значении параметра $\alpha_3=0.1$ имеем интервал для σ_η, равный $(17.32-173.2)$, которому принадлежит $\sigma_{\eta 1}=27.7128$ и $\inf\limits_{F_\eta \in K_2} I(F_\eta)\approx 0.1325.$

Интервалы попадания в зависимости от α будут следующими: для $\alpha_2=0.62$: $(u,v)=(0.08-19.92)$, длина равна 19,84. Для $\alpha_3=0.1$: $(u,v)=(8.4-11.6)$, длина равна 3.2.

Таким образом, с уменьшением α длина интервала попадания и инфимум вероятности попадания уменьшаются, а величина σ_η и допустимые интервалы для σ_η увеличиваются. Следовательно, чтобы получить наибольшую из наименьших вероятностей попадания в возможно больший интервал, следует выбирать параметр α, близким к отношению m/σ_μ, не превышая его.

Далее сравним результаты решения задачи из работы [4] при нормальной ф.р. случайной величины μ с заданными модой $m=10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_\mu=16$ ($m<\sigma$, $\alpha=0.625$) с результатами решения такой же задачи в классе унимодальных ф.р. с параметрами $s_1=10,\ \sigma_{\eta 1}=16\sqrt{3}=27.7128,\ \alpha=0.624$. Допустимой областью для σ_η является интервал (17.32–27.7564). Величина $\sigma_{\eta 1}=27.7128$ принадлежит этому интервалу, поэтому вычисляем инфимум по формуле (13):

$$\inf_{F_\eta \in K_2} I(F_\eta) \approx \frac{0.624\times 27.7128\times 0.8284}{17.32} \approx 0.8271\,.$$

Положим вероятность p попадания в полосу при одном выстреле равной $p=0.8271$ (в работе [4] $p=0.468$). Пусть проводится стрельба тремя выстрелами. Тогда вероятность хотя бы одного попадания в полосу составляет $P(A)=1-(1-p)^3\approx 0.995$ (в работе [4] $P(A)\approx 0{,}849$). Вероятность не менее двух попаданий в полосу составляет $P(B)=p^2(3-2p)=0{,}92$ (в [4] $P(B)=0.452$).

Таким образом, использование нормального закона распределения для вычисления вероятности различных событий при прицельной стрельбе в полосу дает заниженные оценки даже по сравнению с наименьшими оценками в классе унимодальных ф.р. с теми же двумя фиксированными моментами.

При любом законе распределения, обладающим моментами двух первых порядков, справедливо неравенство Чебышева $P\{|\eta-s_1|\ge\alpha\sigma_\eta\}\le 1/\alpha^2$ или равносильное ему неравенство $P\{|\eta-s_1|\le\alpha\sigma_\eta\}\ge 1-1/\alpha^2$. Поскольку в задаче 2 $\alpha<1$, то неравенство Чебышева дает нулевую оценку для всех $0<\alpha<1$, т.е. еще более заниженную оценку.

Введение параметра α позволяет получить разбиение области параметров m, σ_μ и соответствующих интервалов попадания для случая $m < \sigma_\mu$. Чтобы получить полное разбиение для указанных параметров, достаточно решить еще одну задачу, подобную задаче 2, при условии $m > \sigma_\mu$.

На актуальность решения задач, называемых обобщенными неравенствами Чебышева, в связи с их важными практическими применениями часто обращал внимание мой Учитель — академик НАН Украины Игорь Николаевич Коваленко [5–7], а еще ранее — Учитель Игоря Николаевича — академик НАН Украины Борис Владимирович Гнеденко [7] , их ученики и многие зарубежные математики, ссылки на которых можно найти, например, в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стойкова Л.С., Ковальчук Л.В. Точные оценки некоторых линейных функционалов от унимодальных функций распределения при неполной информации. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 6. С. 41–53.
2. Johnson N.L., Rogers C.A. The moment problem for unimodal distribution. *Ann. Math. Stat*. 1951. Vol. 22. P. 433–439.
3. Карлин С., Стаддин В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва: Наука, 1976. 568 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1973. 365 с.
5. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. Chichester: Wiley, 1997. 303 p.
6. Коваленко И.Н. Обзор моих научных работ. Учителя и соратники. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 3. С. 3–27.
7. Коваленко И.Н. Вклад вероятностно-статистической школы Бориса Владимировича Гнеденко в развитие кибернетики и информатики. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 6. С. 41–53.
8. Стойкова Л.С. Обобщенные неравенства Чебышева и их применение в математической теории надежности. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 3. С. 139–143.

Надійшла до редакції 17.08.2020

Л.С. Стойкова

ТОЧНІ ОЦІНКИ ЙМОВІРНОСТІ ПОПАДАННЯ НЕВІД'ЄМНОЇ УНІМОДАЛЬНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ У СПЕЦІАЛЬНІ ІНТЕРВАЛИ ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Анотація. Знайдено точні нижні оцінки ймовірності попадання невід'ємної унімодальної випадкової величини μ в інтервали $(m-\alpha\sigma_\mu, m+\alpha\sigma_\mu)$, де мода m збігається з першим моментом випадкової величини μ і меньше, ніж середнє квадратичне відхилення: $m < \sigma_\mu$. Параметр α задовольняє нерівностям $0 < \alpha < m / \sigma_\mu < 1$. Цей результат можна застосувати для розрахунку ймовірності попадання снаряда в смугу під час прицільної стрільби.

Ключові слова: лінійні функціонали від унімодальної функції розподілу, екстремальні значення лінійних функціоналів, перетворення Джонсона–Роджерса, точні узагальнені нерівності Чебишова для функціоналів від унімодальних функцій розподілу.

L.S. Stoikova

ACCURATE ESTIMATES OF THE PROBABILITY OF A NON-NEGATIVE UNIMODAL RANDOM VALUE INTO SPECIAL INTERVALS WITH INCOMPLETE INFORMATION

Abstract. Exact lower estimations are found for the probability that non-negative unimodal random variable μ gets in the intervals $(m-\alpha\sigma_\mu, m+\alpha\sigma_\mu)$ where the mode m coincides with fixed first moment of random variable μ, σ_μ is standard deviation and $m < \sigma_\mu$. The parameter α satisfies the inequalities $0 < \alpha < m / \sigma_\mu < 1$. The results of this study may be useful in evaluating the probability of hitting the projectile zone when aimed shooting.

Keywords: linear functionals of unimodal distribution functions, extremal values, transformation of Johnson–Rogers, exact generalized Chebyshoff inequalities for linear functionals of unimodal distribution functions.

Стойкова Лидия Степановна,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Киев, e-mail: stojk@ukr.net.