УДК 519.6:517

В.К. ЗАДІРАКА, Л.В. ЛУЦ

ОПТИМАЛЬНІ ЗА ТОЧНІСТЮ КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕССЕЛЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПІДІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. Розглянуто задачу побудови оптимальних за точністю на класах функцій та близьких до них квадратурних формул обчислення перетворення Бесселя. Для деяких класів підінтегральних функцій побудовано оптимальні за точністю оцінки похибки обчислення перетворення Бесселя, а також квадратурні формули, на яких ці оцінки досягаються.

Ключові слова: перетворення Бесселя, оптимальна за точністю квадратурна формула, інтерполяційні класи функцій, метод капелюхів, метод граничних функцій.

Обчислення інтегралів, що містять функції Бесселя (перетворень Бесселя), є основним щодо багатьох практичних задач математичного моделювання та для розв'язання задач цифрового оброблення сигналів і зображень. Зокрема, можна навести низку задач математичної фізики, астрономії, теорії пружності, теорії потенціалів, розповсюдження електромагнітних хвиль, теплопровідності, прикладної статистики тощо. У більшості випадків такі перетворення не можна виконати аналітично, і потрібно застосовувати чисельні методи. У цій роботі розглянуто задачу побудови оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення перетворення Бесселя. Для деяких класів підінтегральних функцій побудовано оптимальні за точністю оцінки похибки обчислення перетворення Бесселя, а також квадратурні формули, на яких ці оцінки досягаються.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо обчислення з мінімально можливою похибкою інтеграла вигляду

$$I_m(\alpha, f) = \int_0^1 f(x) J_m(\alpha x)\, dx, \tag{1}$$

де $J_m(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{m+2k}$ — функція Бесселя першого роду порядку m, m — невід'ємне ціле число. Тут $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ — гама-функція (для цілих невід'ємних n гама-функція $\Gamma(n) = (n-1)!$).

Допустимо, що $f(x) \in F$, F — множина функцій, визначених на відрізку $[0, 1]$ та заданих не більше, ніж N значеннями $f(x_\nu) = f_\nu$ у вузлових точках x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$, $x_\nu \in [0, 1]$. Нехай L_N — множина всіх квадратурних формул $l_N(f)$, що використовують інформацію про значення функції $f(x)$ не більше, ніж у N точках. Позначимо $R = R(f, l_N, \alpha, m)$ результат наближеного обчислення $I_m(\alpha, f)$ за допомогою квадратурної формули $l_N(f)$. Розглянемо такі характеристики:

$$\begin{gathered} V(f, \alpha, m, l_N) = \rho(I_m(\alpha, f), R), \\ V(F, \alpha, m, l_N) = \sup_{f \in F} V(f, \alpha, m, l_N), \\ V_N = V(F, \alpha, m) = \inf_{l_N \in L_N} V(F, \alpha, m, l_N), \end{gathered} \tag{2}$$

де $\rho(I_m(\alpha, f), R)$ — похибка чисельного інтегрування: $\rho(I_m(\alpha, f), R) = = | I_m(\alpha, f) - R |$.

Квадратурну формулу $l_N^*(f)$, на якій досягається оптимальна оцінка V_N, будемо називати оптимальною за точністю квадратурною формулою. Якщо $V(F, \alpha, m, \bar{l}_N) \le V_N + \eta$, $\eta > 0$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за точністю формулою обчислення $I_m(\alpha, f)$ з точністю до η. Якщо $\eta = o(V_N)$ або $\eta = O(V_N)$, то $\bar{l}_N$ називається асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності відповідно.

Для обчислення оцінок похибки чисельного інтегрування $I_m(\alpha, f)$ на класах підінтегральних функцій F використовують метод капелюхів [1]. Він дає змогу отримати оцінку похибки $V(F, \alpha, m)$, а не похибку. Це зумовлює застосовність цього методу для побудови лише оптимальної з точністю до η квадратурної формули.

Підвищення «потенційної спроможності» квадратурних формул може бути здійснене шляхом «звуження» відповідного класу F на інтерполяційні класи F_N, які визначаються належністю класу F та ще $2N$ фіксованими значеннями інформаційного оператора: $\{x_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1}$ [2]. Функції, які належать до таких (інтерполяційних) класів, не розрізняються квадратурними формулами (для всіх них наближене значення інтеграла буде одне і те ж саме). Для побудови та обґрунтування оптимальних за точністю і близьких до них квадратурних формул обчислення $I_m(\alpha, f)$ в класах F_N застосовують метод граничних функцій [3].

У цій роботі розглядатимемо такі класи підінтегральних функцій:

1) C_L — клас функцій $f(x)$, визначених на $[0, 1]$, що задовольняють умові Ліпшиця з константою L:

$$| f(x') - f(x'') | \le L | x' - x'' |, \ x', x'' \in [a, b];$$

2) $C_{L,N}$ — клас функцій $f(x) \in C_L$, заданих фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованої сітки x_i, $i = \overline{0, N-1}$;

3) $W_{r,L}$, $r > 1$, — клас функцій, що мають $(r-1)$-у неперервну похідну, причому $f^{(r-1)}(x) \in C_L$;

4) $W_{2,N,L}$ — клас функцій, що належать класу $W_{2,L}$, і вихідна інформація про $f(x)$ задано фіксованими значеннями функції та її першої похідної у вузлах фіксованої сітки x_i, $i = \overline{0, N-1}$.

Для спрощення викладок допустимо, що $f(x)$ визначена точно на відрізку $[0, 1]$ у вузлах рівномірної сітки $\{x_\nu = \nu h, \nu = \overline{0, N-1}, h = 1/N\}$.

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТІ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ БЕССЕЛЯ ДЛЯ КЛАСІВ C_L, $W_{r,L}$, $W_{2,L}$

Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай $f(x) \in C_L$, m — невід'ємне ціле число. Тоді для оптимальної оцінки похибки обчислення інтеграла (1) у разі великих значень α $\left(\alpha \ge \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} m + \pi M\right.$, M — кількість нулів функції $J_m(\alpha x)$ на $[0, 1]$) справедлива така оцінка знизу:

$$V_N(C_L, \alpha, m) \ge L C_1 \frac{1}{\alpha N}, \tag{3}$$

де $C_1 = \dfrac{C_2}{4} \displaystyle\int_0^\alpha | J_m(\eta) | d\eta$, C_2 — деяка константа, що залежить від α та m.

Доведення. Щоб побудувати оцінку (3), застосуємо метод отримання оцінок знизу для похибок чисельного інтегрування [1], відомий також під назвою методу капелюхів.

Відомо, що для невід'ємних m усі нулі функції $J_m(z)$ є дійсними та ізольованими [4, с. 32]. Допустимо, що $J_m(\alpha x)$ на $[0,1]$ змінює знак M разів у точках $x_i^0 \in [0,1]$, $i=\overline{0,\ M-1}$. Розіб'ємо крок h на l рівних частин ($l>M$ — натуральне число) і розглянемо сітку $\{x_p = p\tau,\ p=\overline{0,\ Nl}, \tau = h/l\}$. Позначимо $\Delta_{p^*} = [x_{p^*}, x_{p^*+1}]$ такі відрізки $[x_p, x_{p+1}]$, які задовольняють умові $x_i^0 \notin \Delta_{p^*}$. Визначимо функцію $f_1^*(x)$:

$$f_1^*(x) = \begin{cases} L(x-x_{p^*})\,\mathrm{sign}\,(J_m(\alpha x)), & x \in [x_{p^*}, (x_{p^*}+x_{p^*+1})/2], \\ L(x_{p^*+1}-x)\,\mathrm{sign}\,(J_m(\alpha x)), & x \in [(x_{p^*}+x_{p^*+1})/2, x_{p^*+1}], \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{p^*} \Delta_{p^*}. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f_1^*(x_i)=0$, $i=\overline{0,\ N-1}$, і $f_1^*(x) \in C_L$.

Знайдемо оцінку

$$|I_m(\alpha, f_1^*)| = \left| \int_0^1 f_1^*(x) J_m(\alpha x) dx \right| = \left| \sum_{p^*} \int_{\Delta_{p^*}} f_1^*(x) J_m(\alpha x) dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{p^*} \left\{ \int_{x_{p^*}}^{(x_{p^*}+x_{p^*+1})/2} L(x-x_{p^*})\,|J_m(\alpha x)|\,dx + \int_{(x_{p^*}+x_{p^*+1})/2}^{x_{p^*+1}} L(x_{p^*+1}-x)\,|J_m(\alpha x)|\,dx \right\} \right|.$$

Зробимо заміну змінних $x = \dfrac{\eta}{\alpha} + x_{p^*}$ та отримаємо

$$|I_m(\alpha, f_1^*)| = \frac{L}{\alpha^2} \sum_{p^*} \left\{ \int_0^{\alpha\tau/2} \eta\,|J_m(\eta+\alpha x_{p^*})|\,d\eta + \int_{\alpha\tau/2}^{\alpha\tau} (\alpha\tau-\eta)\,|J_m(\eta+\alpha x_{p^*})|\,d\eta \right\}.$$

Застосуємо теорему про середнє значення до кожного інтеграла:

$$|I_m(\alpha, f_1^*)| = \frac{L}{\alpha^2} \sum_{p^*} \left\{ |J_m(\eta^1_{p^*})| \int_0^{\alpha\tau/2} \eta\,d\eta + |J_m(\eta^2_{p^*})| \int_{\alpha\tau/2}^{\alpha\tau} (\alpha\tau-\eta)\,d\eta \right\} =$$

$$= \frac{L}{\alpha^2} \sum_{p^*} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right)^2 |J_m(\eta^1_{p^*})| + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\tau}{2}\right)^2 |J_m(\eta^2_{p^*})| \right\} =$$

$$= \frac{L}{\alpha}\frac{\tau}{4} \sum_{p^*} \left\{ \frac{\alpha\tau}{2} |J_m(\eta^1_{p^*})| + \frac{\alpha\tau}{2} |J_m(\eta^2_{p^*})| \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{h}{4l} L \sum_{p^*} \left\{ \frac{\alpha\tau}{2} |J_m(\eta^1_{p^*})| + \frac{\alpha\tau}{2} |J_m(\eta^2_{p^*})| \right\}, \tag{4}$$

де $\eta^1_{p^*} \in [\alpha x_{p^*}, \alpha(x_{p^*}+x_{p^*+1})/2]$, $\eta^2_{p^*} \in [\alpha(x_{p^*}+x_{p^*+1})/2, \alpha x_{p^*+1}]$. Сума у правій частині (4) апроксимує $\int_0^\alpha |J_m(\eta)|\,d\eta$.

Відомо [4], що у випадку $z \to \infty$ має місце таке асимптотичне представлення функцій Бесселя:

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(z^{-3/2}). \tag{5}$$

До того ж для додатних нулів функції $J_m(z)$ з великими номерами справедлива наближена рівність

$$x_k^{(m)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m + \pi k,$$

де k — номер додатного нуля (нулі $x_1^{(m)}$, $x_2^{(m)}$, … нумеровані у порядку зростання, починаючи з найменшого додатного нуля).

Звідси випливає, що оскільки за умовою теореми α — велике, то найбільший на $[0,1]$ нуль x_{M-1}^0 функції $J_m(\alpha x)$ задовольняє умові $x_{M-1}^0 \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m + \pi M \le \alpha$, внаслідок цього кількість нулів функції $J_m(\alpha x)$ на $[0,1]$ задовольняє умові $M \le \frac{\alpha}{\pi} - \frac{m}{2} - \frac{3}{4}$. Отже, значення l може бути вибране не більшим за деяку константу. Допустимо, що $l \le C_2$. Тоді

$$|I_m(\alpha, f_1^*)| \ge LC_1 \frac{h}{\alpha}, \text{ де } C_1 = \frac{1}{4C_2} \int_0^{\alpha} |J_m(\eta)| d\eta .$$

Розглянемо функцію $f_2^*(x) = -f_1^*(x)$. Внаслідок того що будь-яка квадратурна формула, побудована за значеннями цих функцій у вузлах x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$, дає нульовий результат, маємо $R(f_1^*, l_N, \alpha, m) = R(f_2^*, l_N, \alpha, m) = 0$, а оскільки $I_m(\alpha, f_1^*) = -I_m(\alpha, f_2^*)$, то

$$V(f_1^*, \alpha, m, l_N) + V(f_2^*, \alpha, m, l_N) = |I_m(\alpha, f_1^*) - R| + |R - I_m(\alpha, f_2^*)| \ge$$
$$\ge |(I_m(\alpha, f_1^*) - R) + (R - I_m(\alpha, f_2^*))| = 2|I_m(\alpha, f_1^*)|.$$

Через те що для будь-якої квадратурної формули $l_N(f)$

$$V(C_L, \alpha, m, l_N) \ge \max\{V(f_1^*, \alpha, m, l_N), V(f_2^*, \alpha, m, l_N)\} \ge$$
$$\ge \frac{V(f_1^*, \alpha, m, l_N) + V(f_2^*, \alpha, m, l_N)}{2} = |I_m(\alpha, f_1^*)| \ge LC_1 s^{1/2} h,$$

нижня межа за всіма квадратурними формулами має вигляд $V_N(C_L, \alpha, m) \ge LC_1 \frac{h}{\alpha}$.

Теорему повністю доведено.

Для обчислення інтеграла (1) на класі C_L побудуємо квадратурну формулу, що базується на апроксимації функції $f(x) \in C_L$ кусково-постійною функцією $f_3^*(x)$, яка на відрізках $x \in [x_{\nu-1/2}, x_{\nu+1/2}]$, $\nu = \overline{0, N-1}$, дорівнює $f_{3,\nu}^*(x) = f_\nu$. Тут

$$x_{\nu-1/2} = x_\nu - \Delta x_\nu / 2, \ \nu = \overline{1, N-1}, \ x_{-1/2} = x_0,$$
$$x_{\nu+1/2} = x_\nu + \Delta x_\nu / 2, \ \nu = \overline{0, N-2}, \ x_{N-1/2} = x_N .$$

Підставимо $f_3^*(x)$ у формулу (1) і отримаємо

$$R_1(\alpha, m) = \int_0^1 f_3^*(x) J_m(\alpha x) dx = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} J_m(\alpha x) dx. \tag{6}$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай $f(x) \in C_L$, m — невід'ємне ціле число. Тоді у разі великих значень α квадратурна формула (6) є оптимальною за порядком точності, причому

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le LC_3 \frac{1}{\alpha N}, \quad C_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta. \tag{7}$$

Доведення. Проведемо оцінювання:

$$\rho(I_m(\alpha, f), R_1(\alpha, m)) = \left| \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} [f(x) - f(x_\nu)] J_m(\alpha x)\, dx \right| \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} |f(x) - f(x_\nu)| \cdot |J_m(\alpha x)|\, dx \le L \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} |x - x_\nu| \cdot |J_m(\alpha x)|\, dx =$$

$$= L \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1/2}} (x - x_\nu) \cdot |J_m(\alpha x)|\, dx + \int_{x_{\nu+1/2}}^{x_{\nu+1}} (x_{\nu+1} - x) \cdot |J_m(\alpha x)|\, dx \right] \le$$

$$\le L \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\frac{h}{2} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1/2}} |J_m(\alpha x)|\, dx + \frac{h}{2} \int_{x_{\nu+1/2}}^{x_{\nu+1}} |J_m(\alpha x)|\, dx \right] =$$

$$= L \frac{h}{2} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta = L \frac{1}{2\alpha N} \int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta. \tag{8}$$

Оскільки оцінка $\rho(I_m, R_1)$ справедлива для будь-якої функції $f(x) \in C_L$, то вона справедлива і для $V(C_L, \alpha, m, R_1)$.

Доведення завершується порівнянням оцінки знизу для $V_N(C_L, \alpha, m)$ (3) та оцінки зверху для $V(C_L, \alpha, m, R_1)$ (8).

Теорему повністю доведено.

Зауваження 1. Оскільки $|J_m(y)| \le 1$ $\forall y$ і $|J_m(y)| \le C_4 y^{-1/3}$ $\forall y \ge 1$ [5], $\forall m$, де C_4 — константа, незалежна від y і m, то для $\alpha > 1$

$$\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le \int_0^1 |J_m(\eta)|\, d\eta + \int_1^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le 1 + C_4 \int_1^{\alpha} \eta^{-1/3} d\eta = 1 + \frac{3}{2} C_4 (\alpha^{2/3} - 1).$$

Отже, матимемо таку константу C_5, незалежну від α та m, що $\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le C_5 \alpha^{2/3}$ і

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le L \frac{1}{2\alpha N} \int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le C_5 \frac{L}{2N\sqrt[3]{\alpha}}.$$

Зауваження 2. З урахуванням асимптотичного наближення (5) для будь-якого фіксованого m та великих значень α отримуємо

$$\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le \int_0^{\sqrt{\alpha}} |J_m(\eta)|\, d\eta + \int_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} |J_m(\eta)|\, d\eta \le$$

$$\le \sqrt{\alpha} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} \eta^{-1/2} d\eta + C_6 \left| \int_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} \eta^{-3/2} dx \right|.$$

Отже, матимемо таку константу C_7, незалежну від α та m, що $\int\limits_0^{\alpha} | J_m(\eta) | d\eta \le C_7 \sqrt{\alpha}$ і

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le L \frac{1}{2\alpha N} \int\limits_0^{\alpha} | J_m(\eta) | d\eta \le LC_7 \frac{1}{2N\sqrt{\alpha}}.$$

Розглянемо клас функцій $W_{r,L}$.

Теорема 3. Нехай $f(x) \in W_{r,L}$, m — невід'ємне ціле число. Тоді для оптимальної оцінки похибки обчислення інтеграла (1) у разі великих значень α справедлива така оцінка знизу:

$$V_N(W_{r,L}, \alpha, m) \ge LC_8 \frac{1}{\alpha N^r}, \tag{9}$$

де $C_8 = \dfrac{r!}{(2C_9)^{2r}(2r+1)!} \int\limits_0^{\alpha} | J_m(\eta) | d\eta$, C_9 — деяка константа, що залежить від α та m.

Доведення. Щоб отримати оцінку (9), застосуємо метод капелюхів.

Допустимо, що $J_m(\alpha x)$ на $[0,1]$ змінює знак M разів у точках $x_i^0 \in [0,1]$, $i = \overline{0, M-1}$. Розіб'ємо крок h на l рівних частин ($l > M$ — натуральне число) і розглянемо сітку $\{x_p = p\tau,\ p = \overline{0, Nl}, \tau = h/l\}$. Позначимо $\Delta_{p^*} = [x_{p^*}, x_{p^*+1}]$ такі відрізки $[x_p, x_{p+1}]$, що задовольняють умові $x_i^0 \notin \Delta_{p^*}$. Визначимо функцію $f_4^*(x)$ [6]:

$$f_4^*(x) = \begin{cases} \dfrac{LN^r}{r!2^{2r}} (x - x_{p^*})^r (x_{p^*+1} - x)^r \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_{p^*})), & x \in \Delta_{p^*}, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{p^*} \Delta_{p^*}. \end{cases}$$

Вочевидь, що $f_4^*(x_i) = 0$, $i = \overline{0, N-1}$, а з результатів роботи [6] випливає, що $f_4^*(x) \in W_{r,L}$.

Проведемо оцінювання

$$| I_m(\alpha, f_4^*) | = \left| \int\limits_0^1 f_4^*(x) J_m(\alpha x) dx \right| = \left| \sum_{p^*} \int\limits_{\Delta_{p^*}} f_4^*(x) J_m(\alpha x) dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{p^*} \int\limits_{\Delta_{p^*}} \frac{LN^r}{r!2^{2r}} (x - x_{p^*})^r (x_{p^*+1} - x)^r | J_m(\alpha x) | dx \right|.$$

Зробимо заміну змінних $x = \eta/\alpha + x_{p^*}$ та отримаємо

$$| I_m(\alpha, f_4^*) | = \frac{LN^r}{\alpha r! 2^{2r}} \sum_{p^*} \int\limits_0^{\alpha\tau} \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^r \left(\tau - \frac{\eta}{\alpha}\right)^r | J_m(\eta + \alpha x_{p^*}) | d\eta .$$

Застосуємо теорему про середнє значення до кожного інтеграла в сумі:

$$| I_m(\alpha, f_4^*) | = \frac{2LN^r}{r!(2\alpha)^{2r+1}} \sum_{p^*} \left\{ | J_m(\eta_{p^*}) | \int\limits_0^{\alpha\tau} \eta^r (\alpha\tau - \eta)^r d\eta \right\} =$$

$$= \frac{2LN^r}{r!(2\alpha)^{2r+1}} \sum_{p^*} \left\{ |J_m(\eta_{p^*})| \int_0^{\alpha\tau} \eta^r (\alpha\tau - \eta)^r \, d\eta \right\} =$$

$$= \frac{2LN^r}{r!(2\alpha)^{2r+1}} (\alpha\tau)^{2r} B(r+1, r+1) \sum_{p^*} \alpha\tau |J_m(\eta_{p^*})| =$$

$$= \frac{LN^r B(r+1, r+1)}{r! 2^{2r} \alpha} \left(\frac{1}{Nl} \right)^{2r} \sum_{p^*} \alpha\tau |J_m(\eta_{p^*})| = \frac{LB(r+1, r+1)}{r!(2l)^{2r} \alpha N^r} \sum_{p^*} \alpha\tau |J_m(\eta_{p^*})|, \quad (10)$$

де $\eta_{p^*} \in [\alpha x_{p^*}, \alpha x_{p^*+1}]$, $B(r+1, r+1) = \dfrac{(r!)^2}{(2r+1)!}$ — інтеграл Ейлера першого роду. Сума у правій частині (10) апроксимує $\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)| \, d\eta$.

Як було засвідчено під час доведення теореми 1, для великих значень α кількість нулів функції $J_m(\alpha x)$ на $[0, 1]$ задовольняє умові $M \le \dfrac{\alpha}{\pi} - \dfrac{m}{2} - \dfrac{3}{4}$. Отже, значення l може бути визначене не більшим за деяку константу. Допустимо, що $l \le C_9$. Тоді

$$|I_m(\alpha, f_4^*)| \ge \frac{Lr!}{(2r+1)!(2C_9)^{2r} \alpha N^r} \int_0^{\alpha} |J_m(\eta)| \, d\eta = LC_8 \frac{1}{\alpha N^r},$$

де $C_8 = \dfrac{r!}{(2C_9)^{2r}(2r+1)!} \displaystyle\int_0^{\alpha} |J_m(\eta)| \, d\eta$.

Розглянемо функцію $f_5^*(x) = -f_4^*(x)$. Внаслідок того що будь-яка квадратурна формула, побудована за значеннями цих функцій у вузлах x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$, дає нульовий результат, маємо $R(f_4^*, l_N, \alpha, m) = R(f_5^*, l_N, \alpha, m) = 0$, а оскільки $I_m(\alpha, f_4^*) = -I_m(\alpha, f_5^*)$, то

$$V(f_4^*, \alpha, m, l_N) + V(f_5^*, \alpha, m, l_N) = |I_m(\alpha, f_4^*) - R| + |R - I_m(\alpha, f_5^*)| \ge$$

$$\ge |(I_m(\alpha, f_4^*) - R) + (R - I_m(\alpha, f_5^*))| = 2|I_m(\alpha, f_4^*)|.$$

Оскільки для будь-якої квадратурної формули $l_N(f)$ маємо

$$V(W_{r,L}, \alpha, m, l_N) \ge \max\{V(f_4^*, \alpha, m, l_N), V(f_5^*, \alpha, m, l_N)\} \ge$$

$$\ge \frac{V(f_4^*, \alpha, m, l_N) + V(f_5^*, \alpha, m, l_N)}{2} = |I_m(\alpha, f_4^*)| \ge LC_8 \frac{1}{\alpha N^r},$$

то й нижня межа за всіма квадратурними формулами оцінюється як $V_N(W_{r,L}, \alpha, m) \ge LC_8 \dfrac{1}{\alpha N^r}$.

Теорему повністю доведено.

Легко довести, що згідно з умовами теореми 3 квадратурна формула

$$R_2(\alpha, m) = \int_0^1 S_\Delta(x) J_m(\alpha x) \, dx \quad (11)$$

є оптимальною за порядком точності. Тут $S_\Delta(x)$ — простий поліноміальний сплайн на сітці $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ за умови, що $f(x) - S_\Delta(x)$ задовольняє певні крайові умови [7, теорема 4.4.1] і матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи рівнянь для сплайна, обмежена.

Розглянемо клас $W_{2,L}$. Нехай у вузлових точках x_ν задано значення деякої функції $f(x) \in W_{2,L}$ та її похідної $f'(x)$: $f(x_\nu) = f_\nu$, $f'(x_\nu) = f'_\nu$, $\nu = \overline{0, N-1}$. Для обчислення перетворення Бесселя (1) на цьому класі побудуємо квадратурну формулу, що базується на апроксимації функції $f(x)$ ермітовим кубічним сплайном $S_3(x)$, який на відрізках $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $\nu = \overline{0, N-1}$, має вигляд

$$S_3(x) = \varphi_1(t) f_\nu + \varphi_2(t) f_{\nu+1} + \varphi_3(t) h f'_\nu + \varphi_4(t) h f'_{\nu+1}, \tag{12}$$

де $\varphi_1(t) = (1-t)^2 (1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2 (3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -(1-t)t^2$, $t = (x - x_\nu)/h$.

Підставимо $S_3(x)$ у формулу (1):

$$R_3(\alpha, m) = I_m(\alpha, S_3) = \int_0^1 S_3(x) J_m(\alpha x) dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (\varphi_1(t) f_\nu + \varphi_2(t) f_{\nu+1} + \varphi_3(t) h f'_\nu + \varphi_4(t) h f'_{\nu+1}) J_m(\alpha x)\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f_\nu + 3t^2 (f_{\nu+1} - f_\nu) - 2t^2 (f_{\nu+1} - f_\nu) + htf'_\nu -$$

$$- ht^2 (2f'_\nu + f'_{\nu+1}) + ht^3 (f'_\nu + f'_{\nu+1})) J_m(\alpha x)\, dx. \tag{13}$$

Має місце така теорема.

Теорема 4. Нехай $f(x) \in W_{2,L}$, m — невід'ємне ціле число. Тоді для великих значень α квадратурна формула (13) є оптимальною за порядком точності, причому

$$V(W_{2,L}, \alpha, m, R_3) \le LC_{10} \frac{1}{\alpha N^2}, \quad C_{10} = \frac{1}{16} \int_0^\alpha |J_m(\eta)|\, d\eta. \tag{14}$$

Доведення. Виконаємо оцінювання:

$$\rho(I_m(\alpha, f), R_3(\alpha, m)) = \left| \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [f(x) - S_3(x)] J_m(\alpha x) dx \right| \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |f(x) - S_3(x)|\, |J_m(\alpha x)|\, dx.$$

У роботі [8] доведено, що у випадку, коли $f(x) \in W_{2,L}$, маємо $|f(x) - S_3(x)| \le \le \dfrac{Lh^2}{16}$ на кожному відрізку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Отже,

$$\rho(I_m(\alpha, f), R_3(\alpha, m)) \le \frac{Lh^2}{16} \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |J_m(\alpha x)|\, dx \le L \frac{1}{16 \alpha N^2} \int_0^\alpha |J_m(\eta)|\, d\eta. \tag{15}$$

Оскільки оцінка $\rho(I_m, R_3)$ справедлива для будь-якої функції $f(x) \in W_{2,L}$, то вона справедлива і для $V(W_{2,L}, \alpha, m, R_3)$.

Доведення завершується порівнянням оцінки знизу для $V_N(W_{r,L}, \alpha, m)$ (9) у випадку $r = 2$ та оцінки зверху для $V(W_{2,L}, \alpha, m, R_3)$ (15).

Теорему повністю доведено.

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ТОЧНІСТЮ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ БЕССЕЛЯ ДЛЯ КЛАСІВ $C_{L,N}$, $W_{2,N,L}$

Розглянемо більш вузькі (інтерполяційні) класи функцій F_N [2]: $C_{L,N}$ та $W_{2,N,L}$. Клас $C_{L,N}$ відповідає випадку, коли $\{f_\nu\}_0^{N-1}$ фіксовані, а клас $W_{2,N,L}$ відповідає випадку, коли фіксовані $\{f_\nu\}_0^{N-1}$ та $\{f'_\nu\}_0^{N-1}$.

Для побудови оптимальних за точністю квадратурних формул обчислення перетворення Бесселя (1) на класах $C_{L,N}$, $W_{2,N,L}$ застосуємо метод граничних функцій [3], що полягає у визначенні чебишовського центра $I_m^*(\alpha, f)$ і чебишовського радіуса ρ^* області невизначеності розв'язку задачі (1) на функціях класу F_N:

$$I_m^*(\alpha, f) = \frac{I_m^+(\alpha, f) + I_m^-(\alpha, f)}{2},$$
$$\rho^*(\alpha, m, f) = \frac{I_m^+(\alpha, f) - I_m^-(\alpha, f)}{2}, \tag{16}$$

де $I_m^+(\alpha, f) = \sup\limits_{f \in F_N} I_m(\alpha, f)$, $I_m^-(\alpha, f) = \inf\limits_{f \in F_N} I_m(\alpha, f)$ — мажоранта і міноранта множини можливих значень інтеграла (1) на функціях класу F_N.

Задача визначення мажоранти $I_m^+(\alpha, f)$ та міноранти $I_m^-(\alpha, f)$ області невизначеності інтеграла (1) потребує побудови функцій $f^+(x) \in F_N$, $f^-(x) \in F_N$, на яких вони відповідно досягаються:

$$I_m^+(\alpha, f) = \int_a^b f^+(x) J_m(\alpha x) dx, \; I_m^-(\alpha, f) = \int_a^b f^-(x) J_m(\alpha x) dx. \tag{17}$$

Тоді оптимальна квадратурна формула має вигляд

$$I_m^*(\alpha, f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f^+(x) + f^-(x)) J_m(\alpha x) dx, \tag{18}$$

а чебишовський радіус має вигляд

$$\rho^*(\alpha, m, f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f^+(x) - f^-(x)) J_m(\alpha x) dx. \tag{19}$$

Отже, для побудови $I_m^*(\alpha, f)$ і $\rho^*(\alpha, m, f)$ відповідно до вигляду (18) і (19) необхідно визначити функції $f^+(x)$ і $f^-(x)$, а також функції

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(f^+(x) + f^-(x)), \tag{20}$$

$$\rho^*(x) = \frac{1}{2}(f^+(x) - f^-(x)), \tag{21}$$

які відповідно задають чебишовський центр і чебишовський радіус області невизначеності класу F_N.

Розглянемо клас $C_{L,N}$. Вочевидь, що на кожному елементарному відрізку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ клас функцій $C_{L,N}$ обмежений прямими $f_\nu \pm L(x - x_\nu)$ і $f_{\nu+1} \pm L(x_{\nu+1} - x)$, які попарно перетинаються у точках $\bar{x}_\nu = \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} - \frac{|\Delta f_\nu|}{2L}$ і $\bar{\bar{x}}_\nu = \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} + \frac{|\Delta f_\nu|}{2L}$. Для спрощення подальших викладок припустимо, що всі точки $x_i^0 \in [0, 1]$, $i = \overline{0, M-1}$, у яких функція $J_m(\alpha x)$ змінює знак, належать множині вузлів x_ν. Тоді з урахуванням коливань функції Бесселя на кожному елементарному відрізку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ визначимо функції $f^\pm(x) \in C_{L,N}$ так:

а) $f^\pm(x) = f_\nu \pm L(x - x_\nu) \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu))$ для $x \in [x_\nu, \bar{x}_\nu]$;

б) $f^\pm(x) = \frac{1}{2}\{(1 \pm \operatorname{sign}(\Delta f_\nu))(f_\nu \pm L(x - x_\nu) \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu))) +$
$+ (1 \mp \operatorname{sign}(\Delta f_\nu))(f_{\nu+1} \pm L(x_{\nu+1} - x) \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)))\}$ для $x \in [\bar{x}_\nu, \bar{\bar{x}}_\nu]$;

в) $f^{\pm}(x) = f_{\nu+1} \pm L(x_{\nu+1} - x)\,\mathrm{sign}\,(J_m(\alpha x_\nu))$ для $x \in [\bar{\bar{x}}_\nu, x_{\nu+1}]$.

Тут $\mathrm{sign}\,(J_m(\alpha x_\nu))$ — знак функції $J_m(\alpha x)$ на проміжку $(x_\nu, x_{\nu+1})$.

Має місце така теорема.

Теорема 5. Нехай $f(x) \in C_{L,N}$, всі нулі $x_i^0 \in [0,1]$, $i = \overline{0, M-1}$, функції $J_m(\alpha x)$ належать множині вузлів x_ν, m — невід'ємне ціле число. Тоді для будь-яких α квадратурна формула

$$R_4(\alpha, m) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_{6,\nu}^*(x) J_m(\alpha x)\,dx, \tag{22}$$

$$f_{6,\nu}^*(x) = \begin{cases} f_\nu, & x \in [x_\nu, \bar{x}_\nu], \\ f_\nu + L(x - x_\nu)\,\mathrm{sign}\,(\Delta f_\nu), & x \in [\bar{x}_\nu, \bar{\bar{x}}_\nu], \\ f_{\nu+1}, & x \in [\bar{\bar{x}}_\nu, x_{\nu+1}], \\ \qquad \nu = \overline{0, N-2}, & \\ f_{N-1}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \tag{23}$$

де $\bar{x}_\nu = \dfrac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} - \dfrac{|\Delta f_\nu|}{2L}$, $\bar{\bar{x}}_\nu = \dfrac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} + \dfrac{|\Delta f_\nu|}{2L}$, є оптимальною за точністю, причому

$$V(C_{L,N}, \{f_\nu\}_0^{N-1}, \{x_\nu\}_0^{N-1}, \alpha, m, R_4) = \sum_{\nu=0}^{N-2} \left\{ L \int_{x_\nu}^{\bar{x}_\nu} (x - x_\nu)|J_m(\alpha x)|\,dx + \frac{L\Delta x_\nu - |\Delta f_\nu|}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{\bar{x}}_\nu} |J_m(\alpha x)|\,dx + L \int_{\bar{\bar{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}} (x_{\nu+1} - x)|J_m(\alpha x)|\,dx \right\} + L \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x - x_{N-1})|J_m(\alpha x)|\,dx.$$

Доведення. Згідно з (16), (19) маємо

$$V(C_{L,N}, \{f_\nu\}_0^{N-1}, \{x_\nu\}_0^{N-1}, \alpha, m) = \frac{I_m^+(\alpha, f) - I_m^-(\alpha, f)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (f^+(x) - f^-(x)) J_m(\alpha x)\,dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f^+(x) - f^-(x)) J_m(\alpha x)\,dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-2} \left\{ L \int_{x_\nu}^{\bar{x}_\nu} (x - x_\nu)|J_m(\alpha x)|\,dx + \frac{L\Delta x_\nu - |\Delta f_\nu|}{2} \int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{\bar{x}}_\nu} |J_m(\alpha x)|\,dx + \right.$$

$$\left. + L \int_{\bar{\bar{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}} (x_{\nu+1} - x)|J_m(\alpha x)|\,dx \right\} + L \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x - x_{N-1})|J_m(\alpha x)|\,dx. \tag{24}$$

Проведемо оцінювання:

$$V(C_{L,N}, \{f_\nu\}_0^{N-1}, \{x_\nu\}_0^{N-1}, \alpha, m, R_4) = \sup_{f(x) \in C_{L,N}} |I_m(\alpha, f) - R_4(\alpha, m)| =$$

$$= \max \left\{ \int_0^1 (f^+(x) - f_6^*(x)) J_m(\alpha x) dx, \int_0^1 (f_6^*(x) - f^-(x)) J_m(\alpha x) dx \right\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-2} \left\{ L \int_{x_\nu}^{\bar{x}_\nu} (x - x_\nu)|J_m(\alpha x)|\,dx + \frac{L\Delta x_\nu - |\Delta f_\nu|}{2} \cdot \int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{\bar{x}}_\nu} |J_m(\alpha x)|\,dx + \right.$$

$$\left. + L \int_{\bar{\bar{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}} (x_{\nu+1} - x)|J_m(\alpha x)|\,dx \right\} + L \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x - x_{N-1})|J_m(\alpha x)|\,dx. \tag{25}$$

Доведення завершується порівнянням оцінки зверху (24) з оцінкою знизу (25). Теорему повністю доведено.

Якщо не всі точки, у яких функція $J_m(\alpha x)$ змінює знак, збігаються з вузлами x_ν, то побудуємо квадратурну формулу у такий спосіб: на відрізках $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, куди потрапили нулі $J_m(\alpha x)$, замінимо $f(x)$ так, як у формулі (6), а на відрізках $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, куди не потрапили нулі $J_m(\alpha x)$, замінимо $f(x)$ функцією $f_3^*(x)$. Вочевидь, що отримана квадратурна формула буде оптимальною за порядком точності.

Розглянемо побудову оптимальної за точністю квадратурної формули обчислення перетворення Бесселя (1) у випадку, коли $f(x)$ належить інтерполяційному класу функцій $W_{2,N,L}$.

Допустимо, що всі точки, у яких функція $J_m(\alpha x)$ змінює знак, належать множині вузлів x_ν. Мажоранту і міноранту класу $W_{2,N,L}$ на $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ будуватимемо з урахуванням знаку функції $J_m(\alpha x)$. Це дасть змогу отримати більш точні оцінки похибки чисельного інтегрування і покращити оцінку якості запропонованих квадратурних формул. Вочевидь, що множина класу $W_{2,N,L}$ на кожному елементарному відрізку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ обмежена чотирма кривими:

$$f_\nu + f'_\nu (x - x_\nu) \pm \frac{L}{2}(x - x_\nu)^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)),$$

$$f_{\nu+1} + f'_{\nu+1}(x - x_{\nu+1}) \pm \frac{L}{2}(x - x_{\nu+1})^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)),$$

які попарно перетинаються у точках $x_\nu \le \hat{x}_\nu \le \hat{\hat{x}}_\nu \le x_{\nu+1}$, де

$$\hat{x}_\nu = \min(x_1, x_2),\ \hat{\hat{x}}_\nu = \max(x_1, x_2),$$
$$x_1 = \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} + \frac{\Delta x_\nu (f'_\nu + f'_{\nu+1}) - 2\Delta f_\nu}{2(\Delta f'_\nu - L h_\nu)}, \tag{26}$$
$$x_2 = \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} + \frac{\Delta x_\nu (f'_\nu + f'_{\nu+1}) - 2\Delta f_\nu}{2(\Delta f'_\nu + L \Delta x_\nu)},$$

$\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$, $\Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu$, $\Delta f'_\nu = f'_{\nu+1} - f'_\nu$, L — константа Ліпшиця.

Визначимо функції $f^{\pm}(x) \in W_{2,N,L}$ на кожному елементарному відрізку $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Окремо розглянемо відрізки:

а) $x \in [x_\nu, \hat{x}_\nu]$, у цьому випадку верхня і нижня границі області невизначеності значень $f(x) \in W_{2,N,L}$ мають вигляд

$$f^{\pm}(x) = f_\nu + f'_\nu (x - x_\nu) \pm \frac{L}{2}(x - x_\nu)^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu));$$

б) $x \in [\hat{x}_\nu, \hat{\hat{x}}_\nu]$, побудова граничних функцій у цьому випадку більш складна, оскільки $f^+(x)$ і $f^-(x)$ залежать від знака $\Delta f'$, тому визначаються вони так:

$$f^{\pm}(x) = \frac{1}{2}\left\{(1 \mp \operatorname{sign}(\Delta f'_\nu))(f_\nu + f'_\nu (x - x_\nu) \pm \frac{L}{2}(x - x_\nu)^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu))) + \right.$$
$$\left. + (1 \pm \operatorname{sign}(\Delta f'_\nu))(f_{\nu+1} + f'_{\nu+1}(x - x_{\nu+1}) \pm \frac{L}{2}(x_{\nu+1} - x)^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)))\right\};$$

в) $x \in [\hat{\hat{x}}_\nu, x_{\nu+1}]$, у цьому випадку

$$f^{\pm}(x) = f_{\nu+1} + f'_{\nu+1}(x - x_{\nu+1}) \pm \frac{L}{2}(x_{\nu+1} - x)^2 \operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu));$$

тут $\operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu))$ — знак функції $J_m(\alpha x)$ на проміжку $(x_\nu, x_{\nu+1})$.

Використовуючи співвідношення (20), (21), отримаємо чебишовський центр і чебишовський радіус області невизначеності класу функцій $W_{2,N,L}$ для $[x_\nu, x_{\nu+1}]$:

$$f_{7,\nu}^*(x)=\begin{cases} f_\nu+f'_\nu(x-x_\nu), & x\in[x_\nu,\hat{x}_\nu],\\ \frac{1}{2}[f_\nu+f'_\nu(x-x_\nu)+f_{\nu+1}+f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1})]+ & \\ +\frac{L\Delta x_i}{4}\operatorname{sign}(\Delta f_i)(2x-x_i-x_{i+1}), & x\in[\hat{x}_\nu,\hat{\hat{x}}_\nu],\\ f_{\nu+1}+f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1}), & x\in[\hat{\hat{x}}_\nu,x_{\nu+1}],\\ \qquad\qquad \nu=\overline{0,\,N-2}, & \\ f_{N-1}+f'_{N-1}(x-x_{N-1}), & x\in[x_{N-1},x_N].\end{cases} \tag{27}$$

Легко перевірити, що $f_{7,\nu}^*(x)$ неперервна на $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ і $f_{7,\nu}^*(x)\in W_{2,N,L}$:

$$\rho_{7,\nu}^*(x)=\begin{cases} \frac{L}{2}(x-x_\nu)^2\operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)), & x\in[x_\nu,\hat{x}_\nu],\\ \frac{L}{4}[(x-x_\nu)^2+(x-x_{\nu+1})^2]\cdot\operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu))+ & \\ +\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\Delta f_\nu)(\Delta f_\nu+\Delta f'_\nu x-f'_{\nu+1}x_{\nu+1}+f'_\nu x_\nu), & x\in[\hat{x}_\nu,\hat{\hat{x}}_\nu],\\ \frac{L}{2}(x-x_{\nu+1})^2\operatorname{sign}(J_m(\alpha x_\nu)), & x\in[\hat{\hat{x}}_\nu,x_{\nu+1}],\\ \qquad\qquad \nu=\overline{0,\,N-2}, & \\ \frac{L}{2}(x-x_{N-1})^2\operatorname{sign}(J_m(\alpha x_{N-1})), & x\in[x_{N-1},x_N].\end{cases} \tag{28}$$

Вочевидь, що чебишовський центр і чебишовський радіус області невизначеності класу $W_{2,N,L}$ обчислюються так:

$$f_7^*(x)=\bigcup_{i=0}^{N-1}f_{7,\nu}^*(x),\ \ \rho_7^*(x)=\bigcup_{i=0}^{N-1}\rho_{7,\nu}^*(x). \tag{29}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 6. Нехай $f(x)\in W_{2,N,L}$, інформація про $f(x)$ задана фіксованою таблицею значень $\{f_i\}_0^{N-1}$, $\{f'_i\}_0^{N-1}$, $\{x_i\}_0^{N-1}$, L, всі нулі функції $J_m(\alpha x)$ належать множині вузлів x_ν, m — невід'ємне ціле число. Тоді для будь-яких α квадратурна формула

$$R_5(\alpha,m)=\int_0^1 f_7^*(x)J_m(\alpha x)dx=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f_{7,\nu}^*(x)J_m(\alpha x)dx, \tag{30}$$

де $f_7^*(x)$ визначається співвідношеннями (27), (29), є оптимальною за точністю квадратурною формулою обчислення перетворення Бесселя (1) на класі $W_{2,N,L}$, причому

$$V(W_{2,N,L},\{f_\nu\}_0^{N-1},\{x_\nu\}_0^{N-1},\alpha,m,R_5)=\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\frac{L}{2}\int_{x_\nu}^{\hat{x}_\nu}(x-x_\nu)^2|J_m(\alpha x)|\,dx+\right.$$

$$+\frac{L}{4}\int_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}[(x-x_\nu)^2+(x_{\nu+1}-x)^2]\cdot|J_m(\alpha x)|\,dx+\frac{|\Delta f'_\nu|}{2}\int_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}\left(x-\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}\right)J_m(\alpha x)dx+$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sign}(\Delta f'_\nu)}{2}\left(\Delta f_\nu-\frac{f'_\nu+f'_{\nu+1}}{2}\Delta x_\nu\right)\cdot\int_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}J_m(\alpha x)dx+\frac{L}{2}\int_{\hat{\hat{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}}(x_{\nu+1}-x)^2|J_m(\alpha x)|\,dx\right\}+$$

$$+\frac{L}{2}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})^2\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx,$$

де $\hat{x}_\nu$, $\hat{\hat{x}}_\nu$ визначені співвідношеннями (26).

Доведення. Згідно з формулами (16), (19) оптимальна оцінка похибки чисельного інтегрування $I_m(\alpha, f)$ на класі $W_{2,N,L}$ дорівнює

$$V(W_{2,N,L},\{f_\nu\}_0^{N-1},\{x_\nu\}_0^{N-1},\alpha,m)=\frac{I_m^+(\alpha,f)-I_m^-(\alpha,f)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(f^+(x)-f^-(x))J_m(\alpha x)dx=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}(f^+(x)-f^-(x))J_m(\alpha x)dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\rho^*_{7,\nu}(x)J_m(\alpha x)dx=\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\frac{L}{2}\int\limits_{x_\nu}^{\hat{x}_\nu}(x-x_\nu)^2\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx+\right.$$

$$+\frac{L}{4}\int\limits_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}[(x-x_\nu)^2+(x_{\nu+1}-x)^2]\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\Delta f_\nu)\int\limits_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}(\Delta f_\nu+\Delta f'_\nu\cdot x-f'_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}+f'_\nu\cdot x_\nu)J_m(\alpha x)\,dx+$$

$$\left.+\frac{L}{2}\int\limits_{\hat{\hat{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}}(x_{\nu+1}-x)^2\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx\right\}+L\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx\,.$$

Оскільки

$$\Delta f'_\nu\cdot x-f'_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}+f'_\nu\cdot x_\nu=\Delta f'_\nu\cdot x-\frac{1}{2}(f'_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}+f'_{\nu+1}\cdot x_\nu-f'_\nu\cdot x_{\nu+1}-f'_\nu\cdot x_\nu)-$$

$$-\frac{1}{2}(f'_{\nu+1}\cdot x_{\nu+1}-f'_{\nu+1}\cdot x_\nu+f'_\nu\cdot x_{\nu+1}-f'_\nu\cdot x_\nu)=$$

$$=\Delta f'_\nu\cdot x-\Delta f'_\nu\frac{1}{2}(x_\nu+x_{\nu+1})-\Delta x_\nu\frac{1}{2}(f'_\nu+f'_{\nu+1})=$$

$$=\Delta f'_\nu\left(x-\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}\right)-\Delta x_\nu\frac{f'_\nu+f'_{\nu+1}}{2},$$

остаточно маємо

$$V(W_{2,N,L},\{f_\nu\}_0^{N-1},\{x_\nu\}_0^{N-1},\alpha,m)=\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\frac{L}{2}\int\limits_{x_\nu}^{\hat{x}_\nu}(x-x_\nu)^2\,|\,J_m(\alpha x)|\,dx+\right.$$

$$+\frac{L}{4}\int\limits_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}[(x-x_\nu)^2+(x_{\nu+1}-x)^2]\cdot|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx+\frac{|\Delta f'_\nu|}{2}\int\limits_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}\left(x-\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}\right)J_m(\alpha x)dx+$$

$$+\frac{\operatorname{sign}(\Delta f'_\nu)}{2}\left(\Delta f_\nu-\frac{f'_\nu+f'_{\nu+1}}{2}\Delta x_\nu\right)\cdot\int\limits_{\hat{x}_\nu}^{\hat{\hat{x}}_\nu}J_m(\alpha x)dx+$$

$$\left.+\frac{L}{2}\int\limits_{\hat{\hat{x}}_\nu}^{x_{\nu+1}}(x_{\nu+1}-x)^2\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx\right\}+\frac{L}{2}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})^2\,|\,J_m(\alpha x)\,|\,dx.$$

Отже, отримали оптимальну оцінку. Для завершення доведення необхідно отримати вираз похибки квадратурної формули $R_5(\alpha, m)$ обчислення інтеграла (1). Для цього обчислимо

$$V(W_{2,N,L}, \{f_\nu\}_0^{N-1}, \{x_\nu\}_0^{N-1}, \alpha, m, R_5) = \sup_{f(x)\in W_{2,N,L}} \left| \int_0^1 (f(x) - f_7^*(x)) J_m(\alpha x)\, dx \right| =$$

$$= \sup_{f(x)\in W_{2,N,L}} \left| \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f(x) - f_{7,\nu}^*(x)) J_m(\alpha x)\, dx \right| =$$

$$= \max\left\{ \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f_{7,\nu}^+(x) - f_{7,\nu}^*(x)) J_m(\alpha x) dx;\ \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f_{1,\nu}^*(x) - f_{1,\nu}^-(x)) J_m(\alpha x) dx \right\}.$$

З урахуванням того, що для чебишовського центра $f^*(x)$ справедлива рівність $f_{7,\nu}^+(x) - f_{7,\nu}^*(x) = f_{7,\nu}^*(x) - f_{7,\nu}^-(x)$, остаточно маємо

$$V(W_{2,N,L}, \{f_\nu\}_0^{N-1}, \{x_\nu\}_0^{N-1}, \alpha, m, R_5) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (f_{7,\nu}^+(x) - f_{7,\nu}^*(x)) J_m(\alpha x)\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{f_{7,\nu}^+(x) - f_{7,\nu}^-(x)}{2} J_m(\alpha x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \rho_{7,\nu}^*(x) J_m(\alpha x)\, dx.$$

Теорему повністю доведено.

На завершення додамо, що для обчислення побудованих квадратурних формул необхідно обчислювати моменти швидкоколивних функцій Бесселя

$$I_m(\alpha, x^k, a, b) = \int_a^b x^k J_m(\alpha x) dx,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де a і b — вузли інтегрування x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$. Методи ефективного обчислення цих функцій розглянуто в [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва: Наука, 1973. 632 с.
2. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. Киев: Наук. думка, 1983. 215 с.
3. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. Киев: Наук. думка, 1993. 294 с.
4. Функции Бесселя: Учебно-методическое пособие. Сост. В.И. Зубов. Москва: МФТИ, 2007. 51 с.
5. Stein E. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993. 695 p.
6. Натансон Н.П. Конструктивная теория функций. Москва: Гостехиздат, 1949. 588 с.
7. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Москва: Мир, 1972. 316 с.
8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. 352 с.
9. Yinkun Wang, Ying Li, Jianshu Luo. Numerical analysis for the moments of highly oscillatory Bessel functions and Bessel-trigonometric functions. arXiv:1602.07062v1 [math.NA] 23 Feb 2016.

Надійшла до редакції 20.10.2020

В.К. Задирака, Л.В. Луц

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрена задача построения оптимальных по точности на классах функций и близких к ним квадратурных формул вычисления преобразования Бесселя. Для некоторых классов подынтегральных функций построены оптимальные по точности оценки погрешности вычисления преобразования Бесселя, а также квадратурные формулы, на которых эти оценки достигаются.

Ключевые слова: преобразование Бесселя, оптимальная по точности квадратурная формула, интерполяционные классы функций, метод шапочек, метод граничных функций.

V.K. Zadiraka, L.V. Luts

OPTIMAL FOR ACCURACY QUADRATURE FORMULAS FOR CALCULATING OF THE BESSEL TRANSFORMATION FOR CERTAIN CLASSES OF SUB-INTEGRAL FUNCTIONS

Abstract. The paper considers the problem of constructing optimal for accuracy in classes of functions and close to them quadrature formulas for calculating the Bessel transformation. For some classes of subintegral functions, optimal estimates of the error in calculating the Bessel transform are constructed, and quadrature formulas are constructed on which these estimates are achieved.

Keywords: Bessel transformation, optimal in accuracy quadrature formula, interpolation classes of functions, hat method, boundary functions method.

Задірака Валерій Костянтинович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: zvk140@ukr.net.

Луц Лілія Володимирівна,
кандидатка фіз.-мат. наук, старша наукова співробітниця Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: lv1@ukr.net.