

## РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ И СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ НАБЛЮДЕНИЙ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

**Аннотация.** Дан анализ состоятельности устойчивых оценок корреляционной матрицы наблюдений при их статической и динамической регуляризации. Доказано преимущество метода динамической регуляризации с оптимальным параметром в контексте разрешения противоречия «вычислительная устойчивость – состоятельность» выборочных оценок корреляционной матрицы наблюдений. Получен алгоритм вычисления оптимального параметра динамической регуляризации, который не использует данных прогнозирования и не требует дополнительных вычислительных затрат.

**Ключевые слова:** регуляризация, состоятельность, устойчивость, сходимость, оценка.

### ВВЕДЕНИЕ

Процедура инверсии корреляционной матрицы наблюдений представляет основу для решения обратных статистических задач в приложениях спектрального анализа, пространственно-временной обработки сигналов, теории управления, идентификации и принятия решений [1–3]. Практическое решение задач данного класса предполагает замену асимптотической формы  $N$ -мерной корреляционной матрицы ее выборочной оценкой, формируемой на конечном временном интервале  $[0, T]$  за  $L$  итераций по известным вычислительным алгоритмам [3–5]. Этим алгоритмам свойственно монотонное возрастание ранга оценочной матрицы до полного значения, когда  $L = N$ . В связи с ситуацией, когда  $L < N$ , данный процесс в реальном масштабе времени порождает проблему вырождения оценочной матрицы. Последнее приводит к потере вычислительной устойчивости обратных задач на неопределенном интервале итераций  $L \in [1, N - 1]$ , когда размерность системы  $N$  имеет произвольное значение.

Преодоление данной проблемы связано с применением методов регуляризации [3, 5]. Основу ее составляет синтез регуляризирующих операторов, в котором приоритетное значение приобретает задача поиска, выбора и оптимизации статического параметра регуляризации  $\mu$ . В классической постановке решение задачи восходит к работам Тихонова А.Н. [6, 7]. В публикациях [3–5] изложены решения обратных задач с регуляризацией максимально правдоподобной оценки корреляционной матрицы наблюдений статическими методами. В реальном масштабе времени этим методам присущи ресурсные ограничения информационного и вычислительного характера. Эти ограничения порождают диалектическое противоречие по критерию «вычислительная устойчивость – состоятельность» выборочной оценки корреляционной матрицы наблюдений [3, 4]. Преодоление данного противоречия связано с динамической регуляризацией таких оценок [8], согласно которой регуляризирующий параметр  $\mu$  обратной задачи должен обновляться в реальном масштабе времени. Данное суждение получило свое развитие в широком спектре приложений [2–4], где востребованным оказалось правило определения оптимальной функции динамической регуляризации оценок корреляционной матрицы, детерминирующее зависимость константы регуляризирующего параметра от объема обучающей выборки. Негентропийность исследований обеспечивает вычисление устойчивых и состоятельных оценок корреляционной матрицы наблюдений.

Цель работы — удовлетворение критерия «вычислительная устойчивость — состоятельность» выборочных оценок корреляционной матрицы наблюдений методом динамической регуляризации.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Изложенная выше проблема решается на многомерном комплексном гауссовском распределении  $p(\mathbf{U})$ , где  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k, \dots, \mathbf{U}_L]$  — совокупность  $L$  комплексных  $N$ -мерных векторов. Известные свойства распределения позволяют анализировать процессы сходимости оценок матриц  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$  относительно их вычислительной устойчивости и состоятельности при статической и динамической регуляризации.

Пусть в  $N$ -мерном пространстве Гильберта наблюдается стационарный случайный векторный процесс  $\mathbf{U}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t)$ , представляющий аддитивную смесь ортогональных векторов полезного сигнала  $\mathbf{S}(t)$  и шума  $\mathbf{n}(t)$ , нормы которых удовлетворяют условию  $\|\mathbf{S}(t)\| < \infty$ ,  $\|\mathbf{n}(t)\| < \infty$ . Статистические моменты второго порядка векторов  $\mathbf{S}(t)$  и  $\mathbf{n}(t)$  при  $\delta$ -корреляции шума определены выражениями [1]

$$\mathbf{A}_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) \mathbf{S}^H(t) dt \right],$$

$$\mathbf{A}_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t) dt \right] = P_n \mathbf{I},$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) \mathbf{n}^H(t) dt \right] = \mathbf{0},$$

где  $P_n$  — мощность шума;  $\{\cdot\}^H$  — комплексно-сопряженная транспозиция (операция над эрмитовой матрицей);  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{I}$  — нулевая и единичная  $N$ -мерные матрицы.

Исходя из принятой модели, асимптотические формы прямой  $\mathbf{A}$  и обратной  $\mathbf{A}^{-1}$  корреляционных матриц вектора наблюдения  $\mathbf{U}(t)$  определяются пределами

$$\mathbf{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^H(t) dt \right] = \mathbf{A}_S + P_n \mathbf{I},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^H(t) dt \right] \right\}^{-1} = (\mathbf{A}_S + P_n \mathbf{I})^{-1}.$$

Полный ранг матрицы  $\mathbf{A}$ :  $\text{rank}(\mathbf{A}) = N$  всегда гарантирует существование обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ . При конечном интервале наблюдений  $[0, T]$  асимптотические представления матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  заменяются их оценками  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ , которые при определенных условиях не отличаются полнотой ранга [2, 3, 5].

Спроецируем задачу формирования оценок матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  на сетку временных отсчетов, когда максимально правдоподобная оценка матрицы  $\mathbf{A}$  имеет вид [2]

$$\tilde{\mathbf{A}}(L) = L^{-1} \sum_{k=1}^L \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H. \quad (1)$$

Алгоритм (1) отражает процесс прямого суммирования матриц единичного ранга  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \quad \forall k \in [1, L]$  в реальном масштабе времени. При возрастании объема выборки  $L$  до порядка  $N$  корреляционной матрицы, т.е.  $L = N$ , оценка  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  достигает полного ранга:  $\text{rank}[\tilde{\mathbf{A}}(L)] = N$ . Дальнейшее возрастание объема выборки  $L: L > N$  в присутствии внутреннего шума сопровождается естественной регуляризацией (саморегуляризацией) матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$ . В этом случае оценка матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  и ее инверсия  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$  стремятся к своим асимптотическим формам [9]:  $\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{A}}(L) = \mathbf{A}$ ,  $\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L) = \mathbf{A}^{-1}$ . При начальном условии  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$  выражение (1) можно представить рекуррентным соотношением

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = k^{-1}[(k-1)\tilde{\mathbf{A}}_{(k-1)} + \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H] \quad \forall k \in [1, L], \quad (2)$$

что позволяет получить прямую и рекуррентную формы инверсии  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L) = L \left[ \sum_{k=1}^L \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L) \equiv \tilde{\mathbf{A}}_L^{-1} = L[(L-1)\tilde{\mathbf{A}}_{(L-1)}^{-1} + \mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H]^{-1}. \quad (4)$$

При декомпозиции вычислительной схемы (4) согласно [2, 3, 9] получаем результат:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L) \equiv \tilde{\mathbf{A}}_L^{-1} = \frac{L}{(L-1)} \left\{ \mathbf{I} - \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{(L-1)}^{-1} \mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H}{L-1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{A}}_{(L-1)}^{-1} \mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H]} \right\} \times \tilde{\mathbf{A}}_{(L-1)}^{-1}. \quad (5)$$

В вычислительной практике критерием устойчивости и состоятельности оценок (1)–(5) является сходимость соответствующих матричных норм [6, 7]:

$$\varepsilon(L) = \frac{\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}(L)\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}, \quad (6)$$

$$\beta(L) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)\|^2}{\|\mathbf{A}^{-1}\|^2}. \quad (7)$$

Оценка считается устойчивой по Адамару, если  $\beta(L) = \zeta < \infty$ , где  $\zeta$  — некоторое положительное число. Оценки считаются состоятельными, если выполняется условие их сильной сходимости к соответствующим асимптотическим формам матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$ :  $P \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon(L) = 0 \right\} = 1$ ,  $P \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \beta(L) = 0 \right\} = 1$ , здесь  $P \{ \cdot \}$  — вероятность события  $\{ \cdot \}$ .

Сложность получения зависимостей  $\varepsilon(L)$  и  $\beta(L)$  вызвана неопределенностью результатов ввиду вырождения оценки  $N$ -мерной эрмитовой матрицы неполного ранга  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  в области потери вычислительной устойчивости  $G: G\{L: L < N, \beta(L): \beta(L) = \infty\}$ .

Для преодоления данного ограничения предполагается проведение имитационных исследований, которые достоверны относительно сходимости оценок  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$  к их асимптотическим формам. Сходимость оценок (1)–(5) демонстрируют результаты моделирования, представленные на рис. 1–3 в виде усредненных нестационарных зависимостей  $\varepsilon(L)$  и  $\beta(L)$  при порядке матрицы  $N = 10$ .

На рис. 1 зависимости  $\varepsilon(L)$  и  $\beta(L)$  отражают сходимость оценок (1) и (3). Кривые сходимости  $\varepsilon(L)$  и  $\beta(L)$ , приведенные на рис. 2, соответствуют процеду-

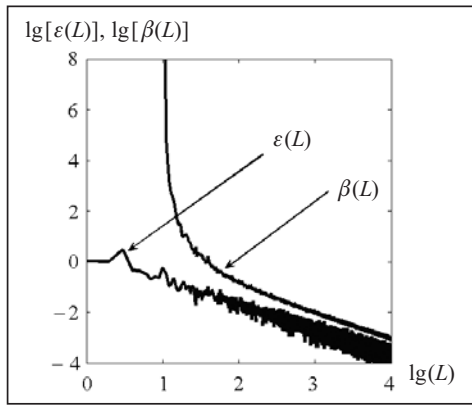


Рис. 1

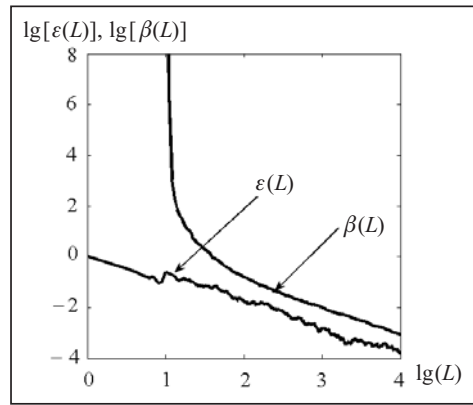


Рис. 2

ре вычисления оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  по алгоритму (2) с дальнейшим обращением результата по алгоритму (4).

Зависимость  $\beta(L)$  на рис. 3 иллюстрирует сходимость оценки  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$ , полученной по рекуррентному алгоритму (5) для условий  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$  (кривая 1) и  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{I}$  (кривая 2).

Тенденция поведения функций  $\varepsilon(L)$  и  $\beta(L)$  указывает на ряд их особенностей:

- оценки (1)–(5) относятся к классу состоятельных оценок;

- алгоритмы (2), (4) и (5) ввиду их рекуррентной формы обладают свойством сглаживания оценок  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  и  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$ , что свидетельствует об их эффективности по отношению к алгоритмам прямого суммирования (1) и (3);

- алгоритмы (3)–(5) для условия  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$  имеют области потери вычислительной устойчивости  $G$  оценки  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$ , здесь  $L < N = 10$ . Однако в случае  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{I}$  оценка (5) устойчива в вычислительном отношении, но при этом она не удовлетворяет критерию  $\beta(L) < 1$  на всем интервале значений  $L$  (см. рис. 3, кривая 2).

Таким образом, состоятельные оценки (3)–(5) матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$  не всегда устойчивы в вычислительном отношении. Устойчивость этих оценок обеспечивается методом статической регуляризации [2, 5–7]. При таком подходе представляется актуальным исследование состоятельности регуляризованных оценок (3)–(5).

#### ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Статическая регуляризация предполагает «принудительный» сдвиг спектра исходной оценки матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  вправо на фиксированную величину регуляризирующего параметра  $\mu = f(\xi) > 0$ , который согласован с уровнем ошибки  $\xi$ :  $\tilde{\mathbf{A}}_\mu(L) = \tilde{\mathbf{A}}(L) + \mu \mathbf{I}$  [7, 8]. Это гарантирует вычислительную устойчивость оцен-

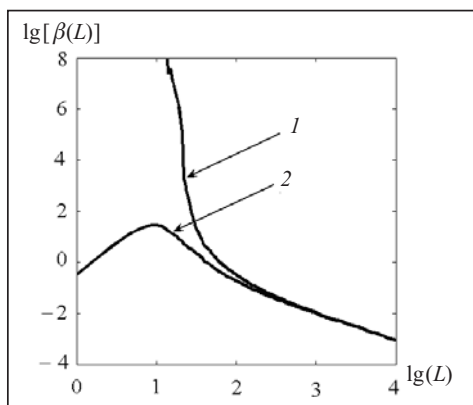


Рис. 3

ки  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) = [\tilde{\mathbf{A}}(L) + \mu \mathbf{I}]^{-1}$  независимо от объема выборки  $L$ :  $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(k)\| < \infty$   $\forall k \in [1, L]$ , но нарушает ее состоятельность.

По аналогии с (6) и (7) состоятельность оценок прямой  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}(L)$  и обратной  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  матриц исследуем по критерию сходимости регуляризованных матричных норм:

$$\varepsilon_{\mu}(L) = \frac{\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mu}(L)\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}, \quad (8)$$

$$\beta_{\mu}(L) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)\|^2}{\|\mathbf{A}^{-1}\|^2}. \quad (9)$$

В своем пределе, несмотря на состоятельность исходной оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$ , матричная норма  $\varepsilon_{\mu}(L)$  не достигает нулевого значения и ограничена величиной фиксированного параметра регуляризации  $\mu$ :  $\lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu}(L) = \mu^2 N \times \|\mathbf{A}\|^{-2} > 0$ .

Отсюда следует, что при фиксированном параметре регуляризации  $\mu$  оценка  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}(L)$  не удовлетворяет критерию состоятельности  $P \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu}(L) = 0 \right\} = 1$ .

Вычисление предельного значения матричной нормы  $\beta_{\mu}(L)$  выполним, используя спектральное разложение матрицы  $\mathbf{A}$  и ее оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  [7]:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{\Pi}_i, \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(L) = \sum_{i=1}^N \tilde{\lambda}_i(L) \tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L), \quad (11)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{A})$  и  $\tilde{\lambda}_i(L) = \tilde{\lambda}_i[\tilde{\mathbf{A}}(L)]$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  и оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  соответственно;  $\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H$  и  $\tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L) = \tilde{\mathbf{e}}_i(L) \tilde{\mathbf{e}}_i^H(L)$  — проекторы на собственные векторы  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(\mathbf{A})$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_i(L) = \tilde{\mathbf{e}}_i[\tilde{\mathbf{A}}(L)]$  матрицы  $\mathbf{A}$  и оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  соответственно.

Выражение (11) позволяет представить асимптотическую форму прямой матрицы  $\mathbf{A}$  как предел:  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{\Pi}_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \tilde{\lambda}_i(L) \tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L)$ . Такой предельный переход в силу известных лемм теории пределов о суммировании бесконечно малых и произведении ограниченной переменной на бесконечно малую величину гарантирует существование следующих пределов:  $\lambda_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_i(L)$  и  $\mathbf{\Pi}_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L)$

$\forall i \in [1, N]$  (см. [7]).

В этом контексте спектральное разложение обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  и ее регуляризованной оценки  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{\Pi}_i, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tilde{\lambda}_i(L) + \mu} \tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L). \quad (13)$$

Исходя из (12) и (13) имеем значение матричной нормы для произвольного объема выборки  $L$ :

$$\beta_{\mu}(L) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^{-1} \times \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{\Pi}_i - \frac{1}{\tilde{\lambda}_i(L) + \mu} \tilde{\mathbf{\Pi}}_i(L) \right] \right\}^2.$$

На основании теоремы о существовании пределов для  $\lambda_i$  и  $\mathbf{\Pi}_i \forall i \in [1, N]$ , а также условия  $\text{tr} \mathbf{\Pi}_i = 1$  имеем предельное значение матричной нормы  $\beta_{\mu}(L)$ :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \beta_{\mu}(L) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mu}{\lambda_i(\lambda_i + \mu)} \right]^2 > 0. \quad (14)$$

Выражение (14) демонстрирует несостоятельность регуляризированной оценки  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  при фиксированном параметре  $\mu > 0$ :  $P \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \beta_{\mu}(L) = 0 \right\} \neq 1$ .

Конкретные свойства каждой регуляризированной оценки (3)–(5) отражают экспериментальные зависимости  $\beta_{\mu}(L)$ , представленные соответственно на рис. 4–6 сплошными линиями для фиксированных значений  $\mu$ : {0.1; 0.3; 0.7} и матрицы порядка  $N = 10$ . Штриховыми линиями обозначены теоретические пределы (14).

Анализ сходимости траекторий  $\beta_{\mu}(L)$  каждой регуляризированной оценки  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  (3)–(5) к их теоретическому пределу (10) за конечное число итераций  $L$  показывает, что в вычислительном отношении все они устойчивы, но несостоятельны:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) : \left\{ \beta_{\mu}(k) < \infty \forall k \in [1, L]; P \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \beta_{\mu}(L) = 0 \right\} \neq 1 \right\}.$$

Выбор величины статического параметра регуляризации  $\mu$  определяется требуемой точностью приближения  $\beta_{\mu}(L)$  для заданного объема выборки  $L$ . Правило выбора  $\mu = \mu[\beta_{\mu}(L)]$  предусматривает компромисс между точностью приближения  $\beta_{\mu}(L)$  и объемом выборки  $L$ . Достижение такого компромисса в условиях априорной неопределенности относительно структуры спектра корреляционной матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  весьма проблематично. Для преодоления такой неопределенности могут быть использованы разные значения параметра  $\mu$ . Однако неоправданное увеличение регуляризирующего параметра ухудшает соответствие оценок (3)–(5) исходным данным, нарушая тем самым их состоятельность, а значит, и возможность саморегуляризации (см. рис. 4–6).

Как известно [7], универсальный подход к поиску статического параметра регуляризации, оптимального по критерию «вычислительная устойчивость – состоятель-

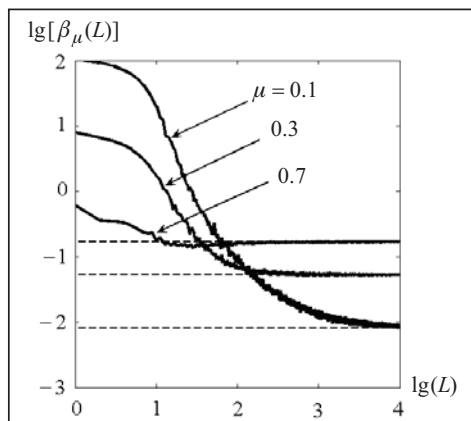


Рис. 4

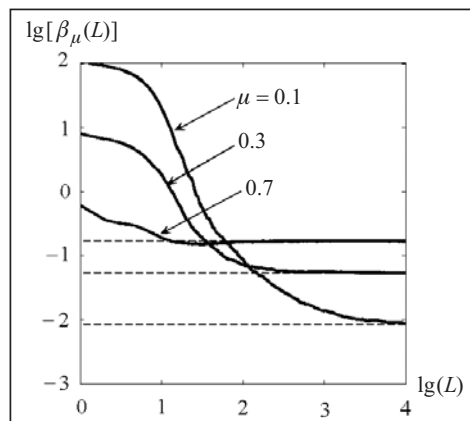


Рис. 5

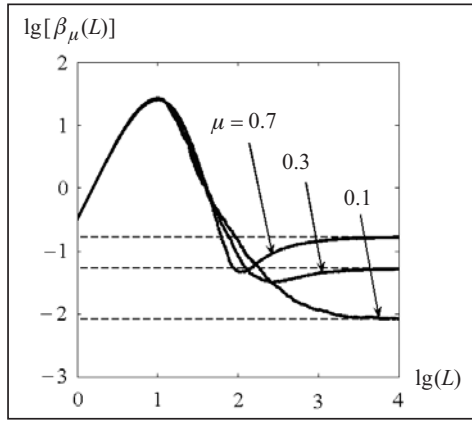


Рис. 6

ность», в настоящее время отсутствует. Считается успешным подход, при котором используется естественная способность оценок  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  и  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$  к саморегуляризации. Именно это свойство оценок указывает на необходимость перехода от статической регуляризации ( $\mu = \text{const}$ ) к монотонному убыванию величины регуляризирующего параметра по мере возрастания объема выборки:  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mu(L) = 0$ , т.е. к динамической регуляризации выборочных оценок корреляционных матриц  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  и  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(L)$ .

### ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЫБОРОЧНЫХ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Динамическая регуляризация выборочной оценки корреляционной матрицы наблюдений основана на теореме о единственности решения обратной задачи с возмущенными исходными данными [7, 8]. Из этой теоремы следует, что если значение параметра динамической регуляризации  $\mu(L)$  удовлетворяет условию  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mu(L) = 0$  при  $\mu(1) > 0$ , то для регуляризованных оценок

$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}(L) = \tilde{\mathbf{A}}(L) + \mu(L)\mathbf{I}$  и  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) = [\tilde{\mathbf{A}}(L) + \mu(L)\mathbf{I}]^{-1}$  имеет место их сходимость к асимптотическим формам:  $\mathbf{A} = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{A}}_{\mu}(L)$ ,  $\mathbf{A}^{-1} = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$ . Следовательно,

но, в отличие от (10) матричная норма  $\beta_{\mu}(L)$  имеет нулевой предел  $\lim_{L \rightarrow \infty} \beta_{\mu}(L) = 0$  и для любого  $L$  удовлетворяет условию  $\beta_{\mu}(L) < \infty$ . Это свидетельствует о вычислительной устойчивости и состоятельности оценки  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) = [\tilde{\mathbf{A}}(L) + \mu(L)\mathbf{I}]^{-1}$  с параметром  $\mu(L)$ .

Для решения обратных задач методом динамической регуляризации алгоритмы (3)–(5) вычисления инверсии оценки матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L)$  трансформируются к следующему виду [9, 10]:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) = L \left[ \sum_{k=1}^L \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^H + \mu(L)\mathbf{I} \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) \equiv \tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L)}^{-1} = L[(L-1)\tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L-1)} + \mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H + \mu(L)\mathbf{I}]^{-1}, \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mu}^{-1}(L) \equiv \tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L)}^{-1} = \frac{L}{(L-1)} \left\{ \mathbf{I} - \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L-1)}^{-1} (\mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H + \mu(L)\mathbf{I})}{L-1 + \text{tr}[\tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L-1)}^{-1} (\mathbf{U}_L \mathbf{U}_L^H + \mu(L)\mathbf{I})]} \right\} \times \tilde{\mathbf{A}}_{\mu(L-1)}^{-1}. \quad (17)$$

Тенденция поведения траекторий сходимости  $\beta_{\mu}(L)$  оценок (3)–(5) к асимптотической форме  $\mathbf{A}^{-1}$  (см. рис. 1–3) позволяет, не нарушая общности рассуждений относительно оценок (15)–(17), ограничиться исследованием только алгоритма (17). Теоретические исследования состоятельности оценки  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  и результаты численного эксперимента (см. рис. 1–3) указывают на целесообразность использования в практических приложениях монотонного закона убывания параметра динамической регуляризации  $\mu(L)$  при возрастании объема выборки  $L$ , т.е. сле-



дующего алгоритма [10]:

$$\mu(L) = g(L)L^{-1}, \quad (18)$$

где  $g(L)$  — некоторая весовая функция.

Траектории сходимости  $\beta_\mu(L)$  оценки матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_\mu^{-1}(L)$  для алгоритма динамической регуляризации (18) при произвольных значениях  $g > 0$  весовой функции  $g(L)$  обобщает некоторая поверхность

$$\beta_\mu(L, g) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}_\mu^{-1}(L, g)\|^2}{\|\mathbf{A}^{-1}\|^2}.$$

На рис. 7 представлено трехмерное изображение поверхности  $\beta_\mu(L, g)$  для ситуации  $N = 20$ . Ввиду квадратичного характера функции  $\beta_\mu(L)$  поверхность  $\beta_\mu(L, g)$  имеет так называемый «овраг», координаты которого удовлетворяют численному решению оптимизационной задачи  $\beta_\mu(L)_{\text{opt}} = \min_{g \in \Omega_g} \beta_\mu(L, g)$  по

параметру  $g$ , где  $\Omega_g$  — множество возможных значений  $g > 0$  весовой функции  $g(L)$  [9, 10].

В аналоговом представлении координаты траектории этого оврага соответствуют линейному неоднородному уравнению  $dg(t)/dt + N^{-1}g(t) = 1$ ,  $g(0) = 1$ , в результате решения которого на сетке из  $L$  временных отсчетов имеем

$$g(L) = N - (N - 1) \exp\left(-\frac{L-1}{N}\right), \quad g(1) = 1.$$

Полученное выражение отражает процесс сходимости весовой функции  $g(L)$  к ее оптимальному значению  $g_{\text{opt}} = \lim_{L \rightarrow \infty} g(L) = N$ . Тогда алгоритм вычисления

оптимального регуляризирующего параметра  $\mu(L)_{\text{opt}}$  оценки матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(L)$  имеет вид

$$\mu(L)_{\text{opt}} = g_{\text{opt}}L^{-1} = NL^{-1}. \quad (19)$$

Рассмотренный алгоритм динамической регуляризации (19) обладает следующими преимуществами в сравнении с известными результатами работ [2–5, 7, 9, 10]:

— однозначно связывает оптимальный параметр динамической регуляризации  $\mu(L)_{\text{opt}}$  с размером  $N \times N$  корреляционной матрицы  $\mathbf{A}$  и объемом выборки  $L$ ;

— отличается простотой вычислительных операций в реальном масштабе времени и исключает проблему выбора параметра регуляризации в условиях априорной неопределенности относительно исходных данных для информационной задачи.

Определяющим преимуществом динамической регуляризации  $\mu(L)_{\text{opt}}$  по алгоритму (19) является удовлетворение оценок (15)–(17) корреляционной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  критерию «вычислительная устойчивость – состоятельность».

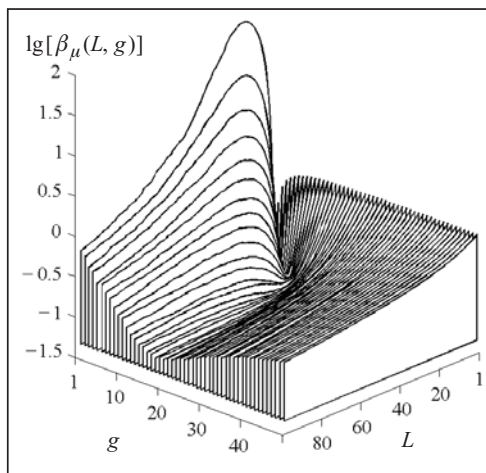


Рис. 7



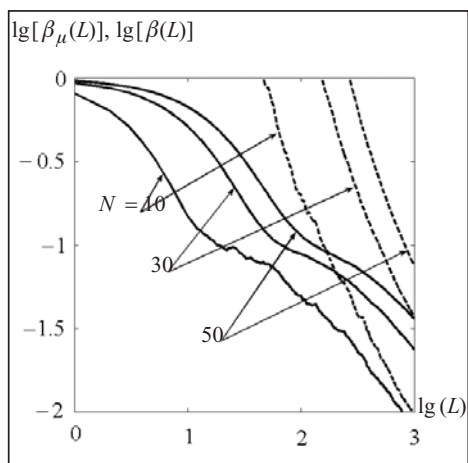


Рис. 8

Справедливость такого утверждения отражает семейство траекторий сходимости  $\beta_\mu(L)$  оценки (17) на рис. 8. Кривые графиков, отмеченные сплошными линиями, представляют семейство траекторий сходимости  $\beta_\mu(L)$  для конкретных значений  $N = 10$ ,  $N = 30$  и  $N = 50$  при оптимальной регуляризации (19). Для сравнения пунктирными линиями показаны траектории сходимости  $\beta(L)$  нерегуляризованной состоятельной оценки (5), которые иллюстрируют потерю ее вычислительной устойчивости при  $L < N$ , что не свойственно оценке (19) при динамической регуляризации с параметром  $\mu(L)_{\text{opt}}$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрен один из проблемных вопросов поиска оптимальных решений обратных задач в условиях априорной неопределенности. В результате проведенных исследований разработан оптимальный по среднеквадратическому приближению алгоритм динамической регуляризации оценок корреляционной матрицы наблюдений; доказано равенство между оптимальным значением параметра регуляризирующей функции и размерностью матрицы; показано преимущество оптимальной динамической регуляризации относительно вычислительной устойчивости и состоятельности выборочных оценок корреляционной матрицы наблюдений.

Обладая свойством саморегуляризации выборочных оценок корреляционной матрицы, метод динамической регуляризации с оптимальным параметром представляет альтернативу статической регуляризации. Этот метод позволяет исключить из решения обратной задачи область вычислительной неустойчивости, в которой информационные потери максимальны, а также получить решение обратной задачи в режиме реального времени без привлечения данных прогнозирования и дополнительных вычислительных затрат на поиск оптимального значения параметра регуляризации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wirth W.D. Radar techniques using array antennas (2nd ed). London: The Institution of Engineering and Technology, 2013. 530 p.
2. Lekhovytsky D.I. To the theory of adaptive signal processing in systems with centrally symmetric receive channels, *EURASIP Journal on Advances in Signal Process.* 2016. Article number 33. <https://doi.org/10.1186/s13634-016-0329-z>.
3. Леховицкий Д.И., Абрамович Ю.И., Жуга Г.А., Рачков Д.С. Ленточно-диагональная регуляризация МП-оценок корреляционных матриц гауссовых помех в алгоритмах адаптации антенных решеток. *Прикладная радиоэлектроника*. 2010. Т. 9, № 1. С. 107–121.
4. Abramovich Yu.I., Spencer N.K., Johnson B.A. Band-inverse TVAR covariance matrix estimation for adaptive detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2010. Vol. 46, N 1. P. 375–396. <https://doi.org/10.1109/TAES.2010.5417169>.
5. Черемисин О.П. Эффективность адаптивного алгоритма с регуляризацией выборочной корреляционной матрицы. *Радиотехника и электроника*. 1982. Т. 27, № 10. С. 1933–1942.
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1990. 232 с.

7. Воскобойников Ю.Е., Мицель А.А. Современные проблемы прикладной математики. Ч. 1. Лекционный курс. Томск: Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2015. 136 с.
8. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. Москва: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
9. Skachkov V., Chepkyi V., Bratchenko H., Tkachuk H., Kazakova N. Development of the method for dynamic regularization of selected estimates in the correlation matrices of observations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 6, N 4 (90). P. 11–18. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.119264>.
10. Skachkov V., Chepkyi V., Efimchikov A., Korkin O., Dudush A. Dynamic regularization parameter optimization of a sample estimate of the correlation matrix of observations by the criterion «computational stability – consistency». 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), July 2–6, Lviv, Ukraine. IEEE, 2019. P. 18–23. DOI: 10.1109/UKRCON.2019.8879946.

*Надійшла до редакції 02.06.2020*

**В.В. Скачков, В.В. Чепкій, О.М. Єфимчиков, О.Ю. Коркін, А.А. Гончарук**  
**РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ ФОРМУВАННЯ СТІЙКИХ І КОНЗИСТЕНТНИХ ОЦІНОК**  
**КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МАТРИЦІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОЇ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ**

**Анотація.** Наведено аналіз конзистентності стійких оцінок кореляційної матриці спостереження за їхньою статичною та динамічною регуляризацією. Доведено перевагу методу динамічної регуляризації з оптимальним параметром у контексті розв'язання суперечності «обчислювальна стійкість – конзистентність» вибіркового оцінок кореляційної матриці спостережень. Отримано алгоритм обчислення оптимального параметра динамічної регуляризації, який не використовує даних прогнозування та не потребує додаткових обчислювальних витрат.

**Ключові слова:** регуляризація, конзистентність, стійкість, збіжність, оцінка.

**V.V. Skachkov, V.V. Chepkii, O.M. Yefymchikov,**  
**O.Yu. Korkin, A.A. Goncharuk**

**SOLVING THE PROBLEM OF GENERATING STABLE AND CONSISTENT ESTIMATES**  
**OF THE CORRELATION MATRIX OF OBSERVATIONS BY THE DYNAMIC**  
**REGULARIZATION METHOD**

**Abstract.** The consistency of stable estimates of the correlation matrix of observations with their static and dynamic regularization is analyzed. The advantage of the dynamic regularization method with the optimal parameter in the context of resolving the contradiction of computational stability and consistency of sample estimates of the correlation matrix of observations is proved. An algorithm is obtained for calculating the optimal dynamic regularization parameter, which does not use forecasting data and does not require additional computational costs.

**Keywords:** regularization, consistency, stability, convergence, evaluation.

**Скачков Валерій Вікторович,**  
 доктор техн. наук, професор, головний научний співробітник Научного центру Военной академии,  
 г. Одесса, e-mail: v\_skachkov@ukr.net.

**Чепкий Віктор Васильєвич,**  
 кандидат техн. наук, доцент, ведучий научний співробітник Научного центру Военной академии,  
 г. Одесса, e-mail: chepkii-2015@ukr.net.

**Єфимчиков Александр Николаєвич,**  
 кандидат техн. наук, доцент, ведучий научний співробітник Научного центру Военной академии,  
 г. Одесса, e-mail: efalex57@gmail.com.

**Коркін Александр Юрьєвич,**  
 ад'юнкт Военной академии, г. Одесса, e-mail: akorcin@ukr.net.

**Гончарук Антон Антонович,**  
 кандидат техн. наук, старший научний співробітник, начальник Научного центру Военной академии,  
 г. Одесса, e-mail: aa\_goncharuk@ukr.net.