УДК 519.1

М.Ф. СЕМЕНЮТА, Г.А. ДОНЕЦ

О ГРУППОВЫХ РАЗМЕТКАХ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

Аннотация. Исследованы групповые разметки магического и антимагического типов. Установлена взаимосвязь между ними для графа и его дополнения. Введено понятие закрытой групповой дистанционной магической разметки. Найдены условия существования Z_2^{2m}-дистанционной магической разметки графа C_4^m, предложен способ ее построения. Определены условия существования Z_2^r-дистанционной магической и антимагической разметок декартового произведения регулярных графов. Получены результаты относительно групповой дистанционной магической разметки соединения двух графов.

Ключевые слова: D-дистанционная магическая разметка, групповая дистанционная магическая разметка, групповая дистанционная антимагическая разметка.

ВВЕДЕНИЕ

Модели на основе размеченных графов эффективно применяются в теоретических исследованиях, связанных с изучением разложений графов и алгебраических комбинаторных структур, а также в теории отображений. Среди практических применений можно отметить такие направления, как криптография, сетевое планирование, управление базами данных, радиоастрономия, биоинформатика. Под разметкой графа понимают инъективное или биективное отображение множества элементов графа во множество чисел, удовлетворяющее определенным условиям, влияющим на тип разметки.

В настоящей статье изучаются групповые разметки магического и антимагического типов. Впервые понятие магического графа представил в докладе на симпозиуме в Смоленице в 1963 г. Д. Седлячек [1]. Он называл граф магическим, если его ребрам ставились в соответствие действительные числа таким образом, чтобы сумма меток ребер, инцидентных вершине, оставалась постоянной независимо от выбора вершины. В [2] В. Стюарт установил ограничение на множество реберных меток, предложив использовать последовательные целые числа, а для соответствующей реберной разметки ввел термин «супермагическая». Тотальную магическую разметку графа $G=(V, E)$ как биективное отображение φ множества $V \cup E$ на множество чисел $1, 2, \ldots, |V|+|E|$, при котором сумма меток ребра и двух ему инцидентных вершин равна константе, определили А. Коциг и А. Роса [3]. Впоследствии такую разметку назвали реберно-магической [4]. Это понятие К. Лих расширил на планарные графы, у которых граням также присваиваются метки [5]. Если при описанном ранее отображении φ сумма меток вершины и инцидентных ей ребер постоянная для каждой вершины графа, то рассматривается его вершинно-магическая разметка [6].

Результаты решения задач существования, построения и перечисления разметок графов приведены в электронном журнале «A dynamic survey of graph labeling» под редакцией Д. Галлиана [7]. Там же описаны и другие разновидности магических разметок. Среди них D-дистанционная магическая разметка, предложенная А. О'Нилом и П. Слейтером [8], и более слабая ее версия — групповая дистанционная магическая разметка, введенная Д. Фрончеком [9]. Разметки графов элементами групп рассматривались с различных точек зрения. Вершинные разметки графов элементами абелевых групп, при которых компоненты связности графа имеют постоянный вес, исследовали Ю. Фукучи [10] и Ю. Эгава [11]. Идею Γ-магической тотальной разметки графа порядка n и размера m, где метками являются элементы произвольной абелевой группы Γ порядка $n+m$, предложили Д. Комб, А. Нельсон и У. Палмер [12]. Взаимно-однозначное соответствие между элементами абелевой группы Γ порядка n и вершинами графа $G=(V, E)$, где $|V|=n$, при котором вес каждой вершины должен равняться одному и тому же элементу из Γ, использовал Д. Фрончек [9]. Если такое соответствие существует, то его считают Γ-дистанционной магической разметкой графа.

Антимагическую версию дистанционной разметки рассмотрели С. Арумугам и Н. Камачи [13]. Продолжением этого исследования является [14]. Результаты по групповой дистанционной антимагической разметке изложены в [15].

В настоящей статье рассматриваются проблемы, связанные с нахождением условий существования и способов построения групповых дистанционных магических и антимагических разметок для некоторых классов графов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан обычный граф $G=(V, E)$, т.е. конечный неориентированный, не содержащий петель и кратных ребер. Некоторые специальные графы имеют название и обозначение. В настоящей работе — это цикл C_n. Он представляет собой граф порядка n $(n \geq 3)$ с множеством вершин $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер $E=\{(v_1, v_n)\} \cup \{(v_k, v_{k+1}) \mid k=1, \ldots, n-1\}$. Более детально терминология по теории графов, используемая в данной статье, представлена в [16]. Под расстоянием $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v графа G понимают длину кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины. Обычно простой цепью (path) в графе G называют маршрут, в котором все вершины различны, а длиной цепи — число ребер, входящих в нее. Для вершины $u \in V$ обозначим $N_D(u)$ ее D-окрестность, т.е. $N_D(u)=\{v \in V: d(u, v) \in D\}$, где $D \subset \{0, 1, 2, \ldots, d\}$, d — диаметр G. При $D=\{1\}$ получим $N_{\{1\}}(u)=N(u)$ — множество смежности вершины u, а при $D=\{0, 1\}$ получим $N_{\{0, 1\}}(u)=N[u]$ — закрытое множество смежности вершины u. Предположим, что существует биективная функция f, ставящая в соответствие вершинам графа $G=(V, E)$ различные числа (метки) из множества $\{1, 2, \ldots, |V|\}$. Тогда вес $w(u)$ вершины u определяется как сумма меток вершин из ее D-окрестности, т.е. $w(u)=\sum\limits_{v \in N_D(u)} f(v)$, где $v \in V$.

Под D-дистанционной магической разметкой графа $G=(V, E)$ порядка n понимают такое биективное отображение $f: V \to \{1, 2, \ldots, n\}$, при котором $w(u)=\sum\limits_{v \in N_D(u)} f(v)=\text{const}$ для каждой вершины $u \in V$. При $D=\{1\}$ разметку f называют дистанционной магической или Σ-разметкой, а при $D=\{0, 1\}$ — Σ′-разметкой.

Пусть Γ — конечная абелева группа порядка n. Для групповой операции используем аддитивную форму записи.

Под Γ-дистанционной магической разметкой графа $G=(V, E)$ порядка n понимают биективное отображение f из V на абелеву группу Γ порядка n, при котором вес $w(u)=\sum\limits_{v \in N(u)} f(v)$ для каждой вершины $u \in V$ равен одному и тому же элементу $\mu \in \Gamma$, называемому магической постоянной [9]. Если граф G допускает Γ-дистанционную магическую разметку, то его называют Γ-дистанционным магическим. Граф G называют групповым дистанционным магическим, если существует Г-дистанционная магическая разметка для каждой абелевой группы Г порядка $|V(G)|$. Если веса всех вершин графа попарно различны при разметке f, то ее называют Г-дистанционной антимагической, а соответствующий граф — Г-дистанционным антимагическим [15]. Граф порядка n, имеющий дистанционную магическую разметку, является Z_n-дистанционным магическим. Обратное утверждение не обязательно справедливо. Таким образом, возникает вопрос, что произойдет при замене Z_n другими абелевыми группами.

В дальнейшем рассматриваются классы графов, полученные в результате операций над графами меньших размеров. Пусть заданы два графа: $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Под декартовым произведением G_1 и G_2 понимают граф $G_1 \times G_2$, множество вершин которого имеет вид $V_1 \times V_2$ и вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в $G_1 \times G_2$ тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$ и $(u_2, v_2) \in E_2$, либо $u_2 = v_2$ и $(u_1, v_1) \in E_1$. Эта операция выполняется над конечным числом графов и ее можно обобщить на m сомножителей. Декартовым произведением графов $G_1, \ldots, G_m$ называют граф $G_1 \times \ldots \times G_m$ с множеством вершин $V(G_1) \times \ldots \times V(G_m)$, у которого вершины $(u_1, \ldots, u_m)$ и $(v_1, \ldots, v_m)$ считаются смежными тогда и только тогда, когда $u_i \neq v_i$ только для одного значения i и при этом i вершины u_i и v_i смежны в G_i. Декартово произведение m копий графа G обозначим G^m.

Согласно Ф. Харари [16] n-мерный куб Q_n определяется рекурсивно с помощью декартова произведения графов, т.е. $Q_1 = K_2$ и $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$. Такой граф содержит 2^n вершин и $n2^{n-1}$ ребер.

Пусть графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ имеют непересекающиеся множества вершин и непересекающиеся множества ребер. Соединением таких графов называют граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E)$, где множество E состоит из ребер, соединяющих каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2.

Одна из первых задач рассматриваемого направления исследований сформулирована в [9] и заключается в том, что для графа $C_m \times C_n$ необходимо определить все такие абелевы группы Г, для которых он допускает Г-дистанционную магическую разметку. Эта задача все еще полностью не решена. Однако в [9] добились некоторого прогресса в решении этой проблемы, получив характеристику всех декартовых произведений циклов C_m и C_n, допускающих Z_{mn}-дистанционную магическую разметку, а также установили класс графов с Z_2^{2k}-дистанционной магической разметкой. В [17] найдены такие Г-дистанционные магические разметки $C_m \times C_n$, для которых $\Gamma \ncong \mathrm{Z}_{mn}$. Групповые дистанционные магические циркулянтные графы изучаются в [18]. Основы для определения общих условий существования групповых дистанционных магических и антимагических разметок графов заложены в [15], где также представлены результаты по этим разметкам для графов Кэли, Хэмминга и декартовым произведениям циклов. Кроме того, в [19] получены условия существования Г-дистанционной магической разметки декартова произведения произвольных регуляных графов. Также показано, что если Г имеет циклическую подгруппу порядка $\frac{1}{2} HOK(m, n)$, то для $C_m \times C_n$ существует Г-дистанционная магическая разметка, в результате понижается ранее известная оценка порядка подгруппы, равная $HOK(m, n)$.

В настоящей работе установлена взаимосвязь между групповой дистанционной магической и антимагической разметками графа G и его дополнения $\overline{G}$; для графа C_4^m определена такая абелева группа Г, для которой он является Г-дистанционным магическим; найдены условия существования Z_2^r-дистанционной магической и антимагической разметок графа $G_1 \times \ldots \times G_m$, где G_i — r_i-регулярные графы, $1 \le i \le m$, $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$; получены необходимые условия существования Г-дистанционой магической разметки соединения двух графов.

ГРУППОВАЯ РАЗМЕТКА ГРАФОВ

Отметим, что любой элемент группы, отличный от нулевого, называют инволюцией, если он имеет порядок два; нетривиальная конечная группа имеет инволюции тогда и только тогда, когда ее порядок четный. Например, в циклической группе Z_{2n} элемент n является инволюцией. Обозначим $s(\Gamma)$ сумму всех элементов группы Г. В [12] доказана следующая лемма.

Лемма 1 [12]**.** Пусть Г — абелева группа.

Если Г имеет только одну инволюцию a, то $s(\Gamma) = a$.

Если Г не имеет инволюций или имеет больше одной инволюции, то $s(\Gamma) = 0$.

Несложно заметить связь между Г-дистанционной магической разметкой графа G, не содержащего изолированных вершин, и Г-дистанционной антимагической разметкой его дополнения $\overline{G}$, приведенную в лемме 2.

Лемма 2. Если граф G допускает Г-дистанционную магическую разметку, то его дополнение $\overline{G}$ является Г-дистанционным антимагическим графом.

Доказательство. Обозначим $u_1, u_2, \ldots, u_n$ вершины графа G. Пусть f — его Г-дистанционная магическая разметка и $w(u_i) = \mu$ для каждой вершины u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем использовать f в качестве разметки $\overline{G}$. Найдем вес $w^*(u_i)$ для вершин u_i графа $\overline{G}$:

— если группа Г не имеет инволюций или имеет больше одной инволюции, то $w^*(u_i) = s(\Gamma) - w(u_i) - f(u_i) = -\mu - f(u_i) \in \Gamma$;

— если группа Г имеет только одну инволюцию a, то $w^*(u_i) = s(\Gamma) - w(u_i) - f(u_i) = a - \mu - f(u_i) \in \Gamma$.

В каждом из этих случаев весами вершин графа $\overline{G}$ являются попарно различные элементы группы Г. Таким образом, каждый элемент группы Г в качестве веса имеется только у одной вершины $\overline{G}$. Следовательно, f — Г-дистанционная антимагическая разметка $\overline{G}$.

Лемма доказана.

Определение 1. Закрытой Г-дистанционной магической разметкой графа $G = (V, E)$ порядка n назовем такое биективное отображение f из V на абелеву группу Г порядка n, при котором вес $w(u) = \sum_{v \in N[u]} f(v)$ для каждой вершины $u \in V$ равен одному и тому же элементу группы Г. Граф, допускающий такую разметку, назовем закрытым Г-дистанционным магическим.

Если граф G порядка n имеет Σ'-разметку, то после замены метки n нулем, он станет закрытым Z_n-дистанционным магическим.

Непосредственно из доказательства леммы 2 вытекает справедливость следствия.

Следствие. Пусть для графа G порядка n существует закрытая Г-дистанционная магическая разметка, тогда он является Г-дистанционным антимагическим, а его дополнение $\overline{G}$ — Г-дистанционным магическим.

Для n-мерного куба Q_n существует Z_2^n-дистанционная антимагическая разметка [15]. Решим задачу построения такой разметки для трехмерного куба Q_3, определим, допускает ли он закрытую Z_2^3-дистанционную магическую разметку, а его дополнение $\overline{Q}_3$ — Z_2^3-дистанционную магическую разметку.

Таблица 1

x_8	x_5	x_6	x_7	x_8	x_5
x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1

Таблица 2

(1,1,1)	(0,0,1)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,1)	(0,0,1)
(1,1,0)	(0,0,0)	(0,1,0)	(1,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)

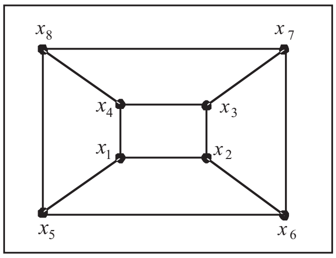

Рис. 1. Граф Q_3

Группу Z_2^n можно описать как множество всех двоичных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ длины n, где $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, с операцией покомпонентного сложения по модулю 2. Введем обозначение вершин Q_3, как показано на рис. 1.

Построим таблицу, расположив в выделенных цветом ячейках вершины двух граней Q_3 (табл. 1). В первом и последнем столбцах этой таблицы поместим дополнительные элементы. Тогда вес каждой вершины x_i в выделенных цветом ячейках равен сумме меток трех вершин соседних ячеек, т.е. вершин, смежных с x_i. Каждой вершине поставим в соответствие элемент группы Z_2^3, как указано в табл. 2. Это соответствие обозначим f. Оно является биекцией из множества вершин Q_3 на множество элементов группы Z_2^3. Из табл. 2 найдем веса вершин:

$$w(x_1) = (1, 0, 1),\ w(x_2) = (1, 1, 1),\ w(x_3) = (0, 0, 1),\ w(x_4) = (0, 1, 1),$$

$$w(x_5) = (1, 0, 0),\ w(x_6) = (1, 1, 0),\ w(x_7) = (0, 0, 0),\ w(x_8) = (0, 1, 0).$$

Как видим, f — это Z_2^3-дистанционная антимагическая разметка Q_3. Заметим, что $w(x_i) + f(x_i) = (1,0,1)$, где $i = 1, 2, \dots, 8$. Таким образом, f — закрытая Z_2^3-дистанционная магическая разметка Q_3. Рассмотрим граф $\overline{Q}_3$, являющийся дополнением Q_3. Вес каждой вершины x_i в графе $\overline{Q}_3$ с разметкой f равен $s(\Gamma) - (w(x_i) + f(x_i)) = (0,0,0) - (1,0,1) = (1,0,1)$. Следовательно, f — Z_2^3-дистанционная магическая разметка $\overline{Q}_3$ с магической постоянной $(1,0,1)$.

Наиболее изучены свойства групповой дистанционной магической разметки регулярных графов. В [18] доказана следующая теорема.

Теорема 1 [18]**.** Пусть G — r-регулярный (r нечетное) дистанционный магический граф порядка n. Не существует такой абелевой группы Γ порядка n, имеющей только одну инволюцию, что G является Γ-дистанционным магическим.

Каждая циклическая группа $\langle g \rangle$ четного порядка n имеет только одну инволюцию. Исходя из этого, справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие. Пусть G — $(2r-1)$-регулярный граф порядка n и $\langle g \rangle$ — циклическая группа четного порядка n, тогда G не допускает $\langle g \rangle$-дистанционной магической разметки для любого натурального r.

В [9] представлен пример Z_2^4-дистанционной магической разметки графа $C_4 \times C_4$ с магической постоянной $\mu = (0, 0, 0, 0)$. Приведем еще один пример Z_2^4-дистанционной магической разметки этого графа при $\mu = (1, 1, 1, 1)$. Для ее построения воспользуемся рекурсивным методом. Граф $C_4 = Q_2$ является двумерным кубом, он также Z_2^2-дистанционный магический. Каждую вершину t-мерного куба Q_t будем рассматривать как t-компонентный бинарный вектор, полагая, что любые две вершины смежны, если они отличаются одна от другой только одной компонентой. В дальнейшем, если не оговорено, вершину графа будем отождествлять с ее меткой, т.е. $V(C_4) = V(Q_2) = \{00, 01, 11, 10\}$. В этом случае вес каждой вершины C_4 равен $\mu = (1,1) \in Z_2^2$. Рассмотрим граф $C_4 \times C_4 = Q_2 \times Q_2$ и такую матрицу $L_{4\times4} = (l_{i,j})$, что $l_{i,j} \in V(C_4 \times C_4)$ и каждая вершина $l_{i,j}$ графа $C_4 \times C_4$ является смежной с вершинами $l_{i-1,j}$, $l_{i+1,j}$, $l_{i,j-1}$, $l_{i,j+1}$, где индексы при l сравнимы с нулем по модулю 4. Для того чтобы граф $C_4 \times C_4$ был Z_2^4-дистанционным магическим с магической постоянной $\mu = (1,1,1,1)$, необходимо выполнение условия $l_{i-1,j} + l_{i+1,j} + l_{i,j-1} + l_{i,j+1} = \mu$. Матрица L имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0010 \\ 0100 & 0101 & 0111 & 0110 \\ 1100 & 1101 & 1111 & 1110 \\ 1000 & 1001 & 1011 & 1010 \end{pmatrix}.$$

Разметка, задаваемая L, является Z_2^4-дистанционной магической с магической постоянной $\mu = (1,1,1,1)$.

Как отмечалось ранее, первые результаты по Г-дистанционной магической разметке декартова произведения циклов получены в [9]. Затем они улучшены в работах [17, 19]. Найденные в [15] условия существования групповой дистанционной магической разметки декартового произведения графов и описанный способ построения разметки графа $C_4 \times C_4$ позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2. Граф C_4^m имеет Z_2^{2m}-дистанционную магическую разметку для любого натурального m, $m \geq 2$, с магической постоянной $\mu = (1,1,\ldots,1)$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по m.

Шаг 1. В случае $m = 2$ получен граф $C_4 \times C_4$. Как известно, он имеет Z_2^4-дистанционную магическую разметку.

Шаг 2. Пусть $m > 2$. Из декартового произведения $V(C_4^m) = \underbrace{V(C_4) \times \ldots \times V(C_4)}_{m}$ множеств вида $V(C_4) = V(Q_2) = \{00, 01, 11, 10\}$ следует, что множество вершинных меток состоит из всех возможных $2m$-компонентных бинарных векторов. Получим биекцию f из множества вершин $V(C_4^m)$ на множество элементов группы Z_2^{2m}. Предположим, что f — Z_2^{2m}-дистанционная магическая разметка, а $\mu = (1,1,\ldots,1)$ — ее магическая постоянная.

Шаг 3. Обозначим $x = x_1 x_2 \ldots x_{2m}$ — произвольную вершину C_4^m, а $y = x_1 x_2 \ldots x_{2m} y_{2m+1} y_{2m+2}$ — вершину графа $C_4^{m+1} = C_4^m \times C_4$. Зададим вершинную разметку g для C_4^{m+1} по аналогии с f. Найдем вес вершины y:

$$w(x_1 x_2 \ldots x_{2m} y_{2m+1} y_{2m+2}) =$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, y_{2m+1}, \bar{y}_{2m+2}) + (x_1, x_2, \ldots, x_{2m}, \bar{y}_{2m+1}, y_{2m+2}) +$$
$$+ (1,1,\ldots,1,0,0) = (0,0,\ldots,0,1,1) + (1,1,\ldots,1,0,0) = (1,1,\ldots,1,1,1) = \mu,$$

где запись $\bar{y}_i$ означает выполнение инверсии над переменной y_i из двоичного набора $\{0,1\}$. Таким образом, g является $Z_2^{2(m+1)}$-дистанционной магической разметкой C_4^{m+1}.

Теорема доказана.

В теореме 3 обобщены результаты, полученные в [15].

Теорема 3. Пусть G_i — r_i-регулярный граф с 2^{r_i} вершинами (r_i четное, $1 \le i \le m$ и $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$).

1. Если G_i является $Z_2^{r_i}$-дистанционным магическим графом, то граф $G_1 \times \ldots \times G_m$ допускает Z_2^r-дистанционную магическую разметку.

2. Если G_i является $Z_2^{r_i}$-дистанционным антимагическим графом, то граф $G_1 \times \ldots \times G_m$ допускает Z_2^r-дистанционную антимагическую разметку.

Доказательство. Рассмотрим первую часть теоремы. Пусть для каждого r_i-регулярного графа G_i с 2^{r_i} вершинами существует $Z_2^{r_i}$-дистанционная магическая разметка f_i с магической постоянной $\mu_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{r_i}^i) \in Z_2^{r_i}$, где $1 \le i \le m$ и все r_i четные. Вершины графа отождествим с их метками, тогда $f_i(x_1^i x_2^i \ldots x_{r_i}^i) = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{r_i}^i)$ для произвольной вершины $(x_1^i x_2^i \ldots x_{r_i}^i) \in V(G_i)$, где $(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{r_1}^i) \in Z_2^{r_i}$.

Докажем, что граф $G_1 \times \ldots \times G_m$ яввляется $Z_2^{r_1 + \ldots + r_m}$-дистанционным магическим. Доказательство этого факта проведем индукцией по m.

Шаг 1. Пусть $m = 2$.

Множество вершин $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ графа $G_1 \times G_2$ состоит из элементов вида $(x_1^1 x_2^1 \ldots x_{r_1}^1 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{r_2}^2)$.

Зададим вершинную разметку f графа $G_1 \times G_2$:

$$f(x_1^1 x_2^1 \ldots x_{r_1}^1 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{r_2}^2) = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{r_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{r_2}^2).$$

Получим взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин графа $G_1 \times G_2$ порядка $2^{r_1 + r_2}$ и элементами группы $Z_2^{r_1 + r_2}$. Определим вес каждой вершины $(x_1^1 x_2^1 \ldots x_{r_1}^1 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{r_2}^2) \in V(G_1 \times G_2)$:

$$w_f(x_1^1 x_2^1 \ldots x_{r_1}^1 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{r_2}^2) =$$

$$= (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{r_1}^1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_2}) + (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_1}, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{r_2}^2) =$$

$$= (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{r_1}^1, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{r_2}^2) = \mu^*,$$

где $\mu^* \in Z_2^{r_1 + r_2}$ и $\mu^* = \text{const}$.

Следовательно, f является $Z_2^{r_1 + r_2}$-дистанционной магической разметкой графа $G_1 \times G_2$.

Шаг 2. Будем считать, что граф $G = G_1 \times \ldots \times G_{m-1}$ имеет $Z_2^{r_1 + \ldots + r_{m-1}}$-дистанционную магическую разметку с магической постоянной $(a_1^1, \ldots, a_{r_1}^1, \ldots, a_1^{m-1}, \ldots, a_{r_{m-1}}^{m-1})$.

Шаг 3. Рассмотрим граф $G_1 \times \ldots \times G_{m-1} \times G_m = G \times G_m$. Зададим его вершинную разметку g аналогично описанной для графа $G_1 \times G_2$. Определим вес каждой вершины $(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1} x_1^m \ldots x_{r_m}^m) \in V(G_1 \times \ldots \times G_m)$:

$$w_g(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1} x_1^m \ldots x_{r_m}^m) =$$

$$= (a_1^1, \ldots, a_{r_1}^1, \ldots, a_1^{m-1}, \ldots, a_{r_{m-1}}^{m-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_m}) +$$

$$+(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_1 + \ldots + r_{m-1}}, a_1^m, \ldots, a_{r_m}^m) = (a_1^1, \ldots, a_{r_1}^1, \ldots, a_1^{m-1}, \ldots, a_{r_{m-1}}^{m-1}, a_1^m, \ldots, a_{r_m}^m) = \mu,$$

где $\mu \in Z_2^{r_1 + \ldots + r_m}$ и $\mu = \text{const}$.

Следовательно, граф $G_1 \times \ldots \times G_m$ допускает $Z_2^{r_1 + \ldots + r_m}$-дистанционную магическую разметку.

Для доказательства второй части теоремы будем рассуждать аналогично. Предположим, что G_i является $Z_2^{r_i}$-дистанционным антимагическим графом для $2 \le i \le m$.

Шаг 1. Пусть $m = 2$ и f_i — $Z_2^{r_i}$-дистанционная антимагическая разметка графа G_i, $i = 1, 2$. Зададим вершинную разметку f графа $G_1 \times G_2$ аналогично доказательству первой части теоремы 3. Найдем вес вершины $(x_1 x_2 \ldots x_{r_1} y_1 y_2 \ldots y_{r_2}) \in \in V(G_1 \times G_2)$:

$$w_f(x_1 x_2 \ldots x_{r_1} y_1 y_2 \ldots y_{r_2}) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r_1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_2}) + (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_1}, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{r_2}^2) =$$

$$= (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{r_2}^2),$$

где $w_{f_1}(x_1 x_2 \ldots x_{r_1}) = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1)$, $w_{f_2}(y_1 y_2 \ldots y_{r_2}) = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{r_2}^2)$. Можно утверждать, что f — биекция из $V(G_1 \times G_2)$ на $Z_2^{r_1 + r_2}$ и все веса вершин — попарно различные элементы $Z_2^{r_1 + r_2}$. Следовательно, f является $Z_2^{r_1 + r_2}$-дистанционной антимагической разметкой графа $G_1 \times G_2$.

Шаг 2. Будем считать, что граф $G = G_1 \times \ldots \times G_{m-1}$ имеет $Z_2^{r_1 + \ldots + r_{m-1}}$-дистанционную антимагическую разметку и для каждой вершины $(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1})$ ее вес равен $w(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1}) = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1, \ldots, \alpha_1^{m-1}, \ldots, \alpha_{r_{m-1}}^{m-1})$.

Шаг 3. Рассмотрим граф $G_1 \times \ldots \times G_{m-1} \times G_m = G \times G_m$. Зададим его вершинную разметку g. Определим вес каждой вершины $(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1} x_1^m \ldots x_{r_m}^m) \in V(G_1 \times \ldots \times G_m)$:

$$w_g(x_1^1 \ldots x_{r_1}^1 \ldots x_1^{m-1} \ldots x_{r_{m-1}}^{m-1} x_1^m \ldots x_{r_m}^m) =$$

$$= (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1, \ldots, \alpha_1^{m-1}, \ldots, \alpha_{r_{m-1}}^{m-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_m}) + (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r_1 + \ldots + r_{m-1}}, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_{r_m}^m) =$$

$$= (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1, \ldots, \alpha_1^{m-1}, \ldots, \alpha_{r_{m-1}}^{m-1}, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_{r_m}^m) \in Z_2^{r_1 + \ldots + r_m},$$

где $w_{f_m}(x_1^m \ldots x_{r_m}^m) = (\alpha_1^m, \ldots, \alpha_{r_m}^m)$. Веса всех вершин различные.

Разметка g является биекцией из множества вершин на множество элементов группы $Z_2^{r_1+\ldots+r_m}$. Таким образом, g — $Z_2^{r_1+\ldots+r_m}$-дистанционная антимагическая разметка $G_1 \times \ldots \times G_m$.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим граф $C_{2^k}^{2m}$ — декартово произведение $2m$ копий графа C_{2^k}.

Теорема 4. Граф $C_{2^k}^{2m}$ имеет Z_2^{2km}-дистанционную магическую разметку с магической постоянной $\mu = (0, 0, \ldots ,0)$ для любого натурального m и $k \geq 2$.

Доказательство. Если $m = 1$, то граф $C_{2^k}^2 = C_{2^k} \times C_{2^k}$ допускает Z_2^{2k}-дистанционную магическую размету при $k \geq 2$ с магической постоянной $\mu^* = (0, 0, \ldots ,0)$ [9].

Пусть $m = 2$. Получим граф $C_{2^k}^4 = (C_{2^k} \times C_{2^k}) \times (C_{2^k} \times C_{2^k}) = C_{2^k}^2 \times C_{2^k}^2$. При вычислении веса любой его вершины имеем четное число слагаемых вида $x = (x_1, x_2, \ldots , x_{2k}, y_1^j, y_2^j, \ldots , y_{2k}^j)$, где первые $2k$ позиций совпадают, и такое же число слагаемых $y = (x_1^i, x_2^i, \ldots , x_{2k}^i, y_1, y_2, \ldots , y_{2k})$ с равными $2k$ последними позициями, $i, j = 1, 2, \ldots ,2k$. Обозначим S_x сумму чисел вида x, а S_y — сумму чисел вида y. Значение S_x (аналогично S_y) зависит только от $y_1^j, y_2^j, \ldots , y_{2k}^j$. Это связано с тем, что $ta = (0, 0, \ldots ,0)$ для любых четных значений $t \in N$ и $a \in Z_{2^k}^{2k}$.

Следовательно, вес каждой вершины графа $C_{2^k}^4$ равен $S_x + S_y = (\overbrace{\underbrace{0, 0, \ldots ,0}_{2k}}^{\mu^*}, \overbrace{\underbrace{0, 0, \ldots ,0}_{2k}}^{\mu^*})$ и $C_{2^k}^4$ является Z_2^{4k}-дистанционным магическим с магической постоянной $\mu = (0, 0, \ldots ,0)$.

Рассуждая аналогично, можно строить разметку графа $C_{2^k}^6$ и т.д. Это приводит к доказательству того, что граф $C_{2^k}^{2m}$ имеет Z_2^{2km}-дистанционную магическую разметку при $k \geq 2$ для любого натурального m с магической постоянной $\mu = (0, 0, \ldots ,0)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть граф G_i, $i = 1, 2$, порядка n допускает Z_n-дистанционную магическую разметку с магической постоянной μ и один из графов: G_1 или G_2, является r-регулярным. Тогда граф $G_1 + G_2$ имеет Z_{2n}-дистанционную магическую разметку с магической постоянной $\mu + \frac{n(n-1)}{2}$, если r и n четные.

Доказательство. Обозначим (x_j^i) вершину графа G_i, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots , n$. Предположим, что f_i — Z_n-дистанционная магическая разметка G_i и μ — ее магическая постоянная. Не теряя общности, будем считать, что граф G_2 является r-регулярным. Зададим вершинную разметку f графа $G_1 + G_2$ следующим образом:

$$f(x_j^1) = f_1(x_j^1), f(x_j^2) = f_2(x_j^2) + n, \; j = 1, 2, \ldots , n.$$

Получим взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин $V_1 \cup V_2$ графа $G_1 + G_2$ и элементами группы Z_{2n}. Группа Z_{2n} имеет одну инволюцию n. Согласно следствию теоремы 1 r должно быть четным числом. Найдем веса вершин графа $G_1 + G_2$:

— если n четное, то

$$w(x_j^1) = \mu + \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \mu + \frac{n(n-1)}{2},$$

$$w(x_j^2) = \mu + rn + \frac{n(n-1)}{2} = \mu + \frac{n(n-1)}{2};$$

— если n нечетное, то

$$w(x_j^1) = \mu + \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \mu + \frac{n(n-1)}{2} + n,$$

$$w(x_j^2) = \mu + rn + \frac{n(n-1)}{2} = \mu + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, биекция f является Z_{2n}-дистанционной магической разметкой $G_1 + G_2$ при четных значениях r и n. Значение магической постоянной равно $\mu + \frac{n(n-1)}{2}$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены проблемы, связанные с нахождением условий существования групповых дистанционных магических и антимагических разметок для некоторых классов графов. Доказано, что для Г-дистанционного магического графа G его дополнение $\overline{G}$ является Г-дистанционным антимагическим графом. Введено понятие закрытой Г-дистанционной магической разметки. Решена задача построения Z_2^n-дистанционной антимагической разметки для трехмерного куба Q_3, показано, что он является закрытым Z_2^3-дистанционным магическим графом, а его дополнение $\overline{Q}_3$ — Z_2^3-дистанционным магическим. В связи с этим возникает вопрос об обобщении этих результатов для произвольного n-мерного куба Q_n. Для графов C_4^m, $m > 3$, и $G_1 \times \ldots \times G_m$, где G_i — r_i-регулярные графы, $1 \le i \le m$, $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, а также для $G_1 + G_2$ найдены условия существования Г-дистанционной магической разметки для конкретных абелевых групп Г. В ходе доказательства соответствующих теорем получены способы построения Г-дистанционной магической разметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sedlacek J. Problem 27. “Theory of graphs and its applications”. *Proc. Symposium, Smolenice*, 1963, Nakl. CSAV, Praha. 1964. P. 163–164.
2. Stewart B.M. Supermagic complete graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. 1967. Vol. 19. P. 427–438.
3. Kotzig A., Rosa A. Magic valuations of finite graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1970. Vol. 13. P. 451–461.
4. Ringel G., Llado A.S. Another tree conjecture. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*. 1996. Vol. 18. P. 83–85.
5. Lih K.W. On magic and consecutive labelings of plane graphs. *Utilitas Mathematica*. 1983. Vol. 24. P. 165–197.
6. MacDougall J., Miller M., Slamin, Wallis W.D. Vertex-magic total labelings. *Utilitas Mathematica*. 2002. Vol. 61. P. 3–21.
7. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2018. DS6: Dec 21. 502 p.
8. O’Neal A., Slater P. An introduction to distance D magic graphs. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. Special Edition. 2011. P. 89–107.

9. Froncek D. Group distance magic labeling of Cartesian product of cycles. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2013. Vol. 55. P. 167–174.

10. Fukuchi Y. Graph labelings in elementary abelian groups. *Discrete Mathematics*. 1998. Vol. 189, Issues 1–3. P. 117–122.

11. Egawa Y. Graph labelings in elementary abelian 2-groups. *Tokyo Journal of Mathematics*. 1997. Vol. 20, N 2. P. 365–379.

12. Combe D., Nelson A.M., Palmer W.D. Magic labellings of graphs over finite abelian groups. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2004. Vol. 29. P. 259–271.

13. Arumugam S., Kamatchi N. On (a,d)-distance antimagic graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2012. Vol. 54. P. 279–287.

14. Семенюта М.Ф. Про (a,d)-дистанційну антимагічну та 1-вершинну бімагічну вершинну розмітки певних типів графів. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 134–141.

15. Cichacz S., Froncek D., Sugeng K., Zhou S. Group distance magic and antimagic graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2015. Vol. 48. P. 41–48.

16. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 304 с.

17. Cichacz S. Group distance magic labeling of some cycle-related graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2013. Vol. 57. P. 235–243.

18. Cichacz S., Froncek D. Distance magic circulant graphs. *Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 339, Issue 1. P. 84–94.

19. Cichacz S., Dyrlaga P., Froncek D. Group distance magic Cartesian product of two cycles. *Discrete Mathematics*. 2020. Vol. 343, Iss 5. P. 1–12.

Надійшла до редакції 10.10.2019

М.Ф. Семенюта, Г.П. Донець

ПРО ГРУПОВІ РОЗМІТКИ ДЕЯКИХ ГРАФІВ

Анотація. Вивчаються групові розмітки магічного і антимагічного типів. Встановлено взаємозв’язок між ними для графа та його доповнення. Уведено поняття закритої групової дистанційної магічної розмітки. Знайдено умови існування Z_2^{2m}-дистанційної магічної розмітки графа C_4^m, запропоновано спосіб її побудови. Визначено умови існування Z_2^r-дистанційної магічної і антимагічної розміток декартового добутку регулярних графів. Отримано результати групової дистанційної магічної розмітки з’єднання двох графів.

Ключові слова: *D*-дистанційна магічна розмітка, групова дистанційна магічна розмітка, групова дистанційна антимагічна розмітка.

M.F. Semeniuta, G.A. Donets

ON GROUP LABELING OF SOME GRAPHS

Abstract. We analyze group labeling of magic and antimagic types. The relationship between them for graph and its complement is established. The concept of closed group distance magic labeling is introduced. The conditions for the existence of Z_2^{2m}-distance magic labeling of a graph C_4^m are found, and a method for its construction is proposed. The conditions for the existence of Z_2^r-distance magic and antimagic labelings of the Cartesian product of regular graphs are established. The results of group remote magic labeling of the connection of two graphs are obtained.

Keywords: *D*-distance magic labeling, group distance magic labeling, group distance antimagic labeling.

Семенюта Марина Фроловна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой Летной академии Национального авиационного университета, Кропивницкий, e-mail: marina_semenyuta@ukr.net.

Донец Георгий Афанасьевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: georgdone@gmail.com.