

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Аннотация. Рассматривается обратная задача по восстановлению источника специального вида в параболическом уравнении при начальных и граничных условиях. Специфика задачи состоит в том, что идентифицируемые параметры зависят от временной переменной и являются сомножителями коэффициента свободного члена правой части. Предложен численный метод решения задачи, основанный на методе прямых и специальном виде представления для решения. Метод не требует построения каких-либо итерационных процедур. Приводятся результаты численных экспериментов, проведенных на тестовой задаче.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, метод прямых, параболическое уравнение, параметрическая идентификация.

ВВЕДЕНИЕ

Задача идентификации неизвестных коэффициентов в параболических уравнениях исследовалась во многих публикациях, например [1, 2]. В работе [3] изучается разрешимость обратных задач по нахождению неизвестного внешнего воздействия (правой части) специального вида. Исследованию условий существования и единственности решения обратных задач для параболических уравнений посвящены работы [1, 4, 5].

В настоящей статье исследуется численное решение обратной задачи относительно параболического уравнения по восстановлению источника специального вида, в которой идентифицируемые коэффициенты зависят лишь от временной переменной. Для численного решения такой задачи можно использовать различные подходы. Один из них заключается в сведении ее к задаче оптимального управления, численное решение которой требует использования итерационных методов оптимизации [6–9]. Другой подход заключается в построении фундаментального решения задачи и приведении ее к интегральному уравнению. В случае, когда имеющиеся в задаче функции, определяющие коэффициенты уравнения, имеют общий вид, использованию такого подхода препятствуют существенные трудности [10–13].

Представляет интерес также подход, основанный на применении метода сеток (явных или неявных его схем) для аппроксимации исходной задачи. При этом во всех получаемых сеточных алгебраических уравнениях содержится неизвестный вектор параметров, определяемый значениями неизвестных источников в точках сетки. Для решения этой системы можно использовать метод прогонки, предложенный в работе [14], с применением специальной схемы прогонки [15]. Недостатком такого подхода является большая размерность получаемой системы алгебраических уравнений.

Специфика рассматриваемой в настоящей статье обратной задачи заключается, во-первых, в том, что восстанавливаемые коэффициенты находятся при свободном члене, во-вторых, они зависят только от временной переменной. Эта специфика позволяет с использованием метода прямых свести решение исходной задачи к решению специально построенной задачи Коши относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений [16, 17].

Таким образом, в предлагаемом в работе подходе для решения рассматриваемой обратной задачи с указанной выше спецификой не используются какие-либо итерационные процедуры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим коэффициентно-обратную задачу относительно параболического уравнения

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + a_2(x, t)v(x, t) + f(x, t) + F(x, t),$$

$$(x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\},$$
(1)

где

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L C_s(x, t)B_s(t),$$
(2)

при следующих начально-краевых условиях и условиях переопределения

$$v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l],$$
(3)

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T],$$
(4)

$$v(\bar{x}_s, t) = \psi_{2s}(t), \quad \bar{x}_s \in (0, l), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, \dots, L.$$
(5)

Здесь заданными являются $L > 0$ — целое число, определяющее количество идентифицируемых источников и условий переопределения; точки $\bar{x}_s \in (0, l)$, $s = 1, \dots, L$; непрерывные по x и t функции $a(x, t) \geq \mu > 0$, $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_{2s}(t)$, $s = 1, \dots, L$, $\mu = \text{const} > 0$; $C_s(x, t)$, $s = 1, \dots, L$, — линейно независимые функции; $a_2(x, t) \leq 0$, $\varphi_0(x) \in C^2([0, l])$, $\psi_{2s}(t) \in C^1([0, T])$, $|C_s(\bar{x}_k, t)| \geq \delta > 0$, $s, k = 1, \dots, L$, $t \in [0, T]$, $\delta = \text{const} > 0$; заданные точки \bar{x}_s , $s = 1, \dots, L$, $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, L$ являются точками наблюдения, функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_{2s}(t)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_1(0), \quad \psi_{2s}(0) = \varphi_0(\bar{x}_s), \quad s = 1, \dots, L.$$

Задача (1)–(5) заключается в определении неизвестной непрерывной L -мерной вектор-функции $B(t) = (B_1(t), \dots, B_L(t))^T$ и соответствующего решения краевой задачи $v(x, t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (1)–(5).

Отметим, что при сделанных выше предположениях как начально-краевая задача (1), (3), (4) при заданной непрерывной L -мерной вектор-функции $B(t) = (B_1(t), \dots, B_L(t))^T$, т.е. функции $F(x, t)$ [18–21], так и обратная задача (1)–(5) имеют решения и они единственны [1, 4, 5, 22].

Возможен случай коэффициентно-обратной задачи, когда в уравнении (1) функция $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L B_s(x, t)C_s(x),$$
(6)

где функции $B_s(x, t)$ — заданы, коэффициенты $C_s(x)$ идентифицируются, а вместо дополнительного условия (5) задано условие

$$v(x, \bar{t}_s) = \varphi_{1s}(x), \quad x \in [0, l], \quad \bar{t}_s \in (0, T], \quad s = 1, \dots, L.$$
(7)

Этот случай рассмотрен в работе [23].

К частному случаю задачи (1)–(5) приводится следующая краевая задача с нелокальным (интегральным) краевым условием:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_1(t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_2(t) u(x, t) + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(0, t) = \psi_2(t), \quad \int_0^l e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (10)$$

где постоянные k , функции $\tilde{f}(x, t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\tilde{\varphi}_0(x)$ — заданы. Задачи вида (8)–(10) исследовались, например, в работах [13, 24].

Для сведения задачи (8)–(10) к задаче (1)–(5) введем функцию

$$v(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по x , получаем

$$u(x, t) = e^{-kx} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}. \quad (12)$$

Дифференцируя (12) один раз по t и дважды по x и подставляя это выражение в (8), после несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} &= a(t) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ (k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + e^{kx} \tilde{f}(x, t). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого уравнения по x , получаем уравнение с точностью до произвольной функции $B(t)$:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \quad (13)$$

$$+(k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) v(x, t) + f(x, t) + B(t),$$

при этом $f(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{f}(\xi, t) d\xi$.

Из (9)–(12) имеем следующие начальные и краевые условия:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (15)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

где

$$\varphi_0(x) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{\varphi}_0(\xi) d\xi.$$

Очевидно, что коэффициентно-обратная задача (13)–(16) является частным случаем задачи (1)–(5).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим подход к численному решению задачи (1)–(5), основанный на использовании метода прямых. Задача (1)–(5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами.

В области Ω проведем прямые

$$t_j = jh_t, \quad j=0,1,\dots, N, \quad h_t = T / N.$$

На этих прямых определим функции

$$v_j(x) = v(x, t_j), \quad x \in [0, l], \quad j=0,1,\dots, N,$$

для которых на основании (3)–(5) имеют место равенства

$$v_0(x) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (17)$$

$$v_j(0) = \psi_0(t_j) = \psi_{0j}, \quad j=0,\dots, N, \quad (18)$$

$$v_j(l) = \psi_1(t_j) = \psi_{1j}, \quad j=0,\dots, N, \quad (19)$$

$$v_j(\bar{x}_s) = \psi_{2s}(t_j) = \psi_{2s,j}, \quad \bar{x}_s \in (0, l), \quad s=1,\dots, L, \quad j=0,\dots, N. \quad (20)$$

На прямых $t = t_j$ аппроксимируем производные $\partial v(x, t) / \partial t$ с использованием разностной схемы:

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \frac{v_j(x) - v_{j-1}(x)}{h_t} + O(h_t), \quad j=1,\dots, N. \quad (21)$$

Используя (21) в уравнении (1), получаем N дифференциальных уравнений:

$$v_j''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v_j'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = 0, \quad (22)$$

$$j=1,\dots, N, \quad x \in (0, l),$$

где

$$B_{sj} = B_s(t_j), \quad \tilde{f}_j(x) = \frac{v_{j-1}(x) + h_t f(x, t_j)}{a(x, t_j)h_t},$$

$$\tilde{C}_{sj}(x) = \frac{C_s(x, t_j)}{a(x, t_j)}, \quad \tilde{a}_{1j}(x) = \frac{a_1(x, t_j)}{a(x, t_j)}, \quad \tilde{a}_{2j}(x) = \frac{a_2(x, t_j)h_t - 1}{a(x, t_j)h_t}.$$

Сходимость при $h_t \rightarrow 0$ и погрешность метода прямых при аппроксимации производных по t в уравнении (1) (в данном случае при аппроксимации задачи (1)–(5) задачей (22), (18)–(20) с погрешностью, оцениваемой как $O(h_t)$) исследованы в работе [25]. Следовательно, при известных B_{sj} решение краевой задачи относительно системы (22) при $h_t \rightarrow 0$ сходится к решению исходной краевой задачи (1)–(4). Из существования и единственности решения исходной обратной задачи (1)–(5) можно показать существование и единственность решения обратной задачи (22), (18)–(20). Действительно, в случае отсутствия решения обратной задачи (22), (18)–(20) или ее неединственности аналогичные свойства имеет и исходная задача.

Уравнения системы (22) для каждого j решаются независимо и последовательно, начиная от $j=1$ до N , а следовательно, и компоненты вектора $B_s = (B_{s1}, \dots, B_{sN})^T$ определяются последовательно.

Теорема 1. Пусть функции $\alpha_j(x)$, $\beta_{sj}(x)$, $s=1, \dots, L$, при $x \in [0, l]$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\alpha_j''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha_j'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{f}_j(x) = 0, \quad (23)$$

$$\alpha_j(0) = \psi_{0j}, \quad \alpha_j'(0) = \psi_{2j}, \quad (24)$$

$$\beta_{sj}''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\beta_{sj}'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\beta_{sj}(x) + \tilde{C}_{sj}(x) = 0, \quad (25)$$

$$\beta_{sj}(0) = 0, \quad \beta_{sj}'(0) = 0. \quad (26)$$

Тогда для произвольных значений параметра B_{sj} функции

$$v_j(x) = \alpha_j(x) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l], \quad (27)$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (22) и условиям (18), (19).

Доказательство. Из условий (24), (26) очевидно, что функции $v_j(x)$, определяемые из (27), для произвольных значений B_{sj} , $s=1, \dots, L$, $j=1, \dots, N$, удовлетворяют условиям (18), (19). Проверка того, что $v_j(x)$, $j=1, \dots, N$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (22), проводится непосредственным дифференцированием (27) и подстановкой $v_j'(x)$ и $v_j''(x)$ в (22) с учетом (23), (25):

$$\begin{aligned} v_j''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v_j'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = \\ = \alpha_j''(x) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}''(x)B_{sj} + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha_j'(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\sum_{s=1}^L \beta_{sj}'(x)B_{sj} + \\ + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\sum_{s=1}^L \beta_{sj}(x)B_{sj} + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = \\ = [\alpha_j''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha_j'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{f}_j(x)] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=1}^L (\beta_{sj}''(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\beta_{sj}'(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\beta_{sj}(x) + \tilde{C}_{sj}(x))B_{sj} = 0, \quad j=1, \dots, N, \quad x \in (0, l).$$

■

Несложно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Представление (27) для решения дифференциального уравнения (22) с краевыми условиями (18), (19) единственно.

Решим отдельно две задачи Коши (23), (24) и (25), (26), используя условие (20) и представление (27). Получим равенство

$$v_j(\bar{x}_s) = \alpha_j(\bar{x}_s) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(\bar{x}_s)B_{sj} = \psi_{2s,j}, \quad s=1, \dots, L, \quad (28)$$

представляющее алгебраическую систему уравнений, из которой можно определить идентифицируемый вектор B_s , $s=1, \dots, L$. Учитывая, что L — число известных функций, участвующих в уравнении (1), как правило, в реальных задачах невелико, для решения алгебраической системы уравнений (28) можно использовать какие-либо известные методы, например Гаусса или итеративные методы.

Разрешимость системы (28) зависит от разрешимости обратной задачи (22), (18)–(20) и наоборот, если система (28) не имеет решения, то не имеет решения задача (22), (18)–(20), а следовательно, и исходная задача (1)–(5). Таким образом, свойства существования и единственности решения системы (28) и исходной обратной задачи (1)–(5) взаимосвязаны.

Из решения задачи (22), (18), (19) определяется функция $v_j(x)$, $x \in [0, l]$. Далее процедура (23)–(28) повторяется на прямой $t = t_{j+1}$, на которой определяется $v_{j+1}(x)$.

Таким образом, для нахождения компонент вектора параметров B_s , $s = 1, \dots, L$, необходимо решить N раз задачу Коши относительно $(L + 1)$ независимых дифференциальных уравнений второго порядка. Вычисленный вектор $B_s = (B_s(t_1), \dots, B_s(t_N))^T$ с применением методов интерполяции или аппроксимации далее может быть использован для получения аналитического вида функции $B_s(t)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем результаты решения следующих задач параметрической идентификации.

Задача 1. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} +$$

$$+B(t)[x \sin 2x - 4a(x)(\cos 2x - x \sin 2x)], \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\},$$

$$v(x, 0) = x \sin 2x, \quad x \in [0, 1],$$

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad v(1, t) = e^t \sin 2, \quad t \in [0, 1],$$

где $a(x) = \text{const} = 1$. Точными решениями данной задачи являются функции

$$B(t) = e^t, \quad v(x, t) = e^t x \sin 2x.$$

Численные эксперименты проводились с разным числом N прямых $x = x_i$, $i = 1, \dots, N$. Для решения вспомогательных задач Коши использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка при различных шагах h_t .

В табл. 1 приведены результаты решения задачи 1 при числе прямых $N = 100, 200, 500$.

Таблица 1. Полученное и точное значения $B(t)$ для задачи 1

t_i	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	Точное значение $B(t_i)$
	$N = 100$		$N = 200$		$N = 500$		
0.10	1.10558	0.00041	1.10530	0.00013	1.10500	0.00017	1.10517
0.20	1.22208	0.00068	1.22165	0.00025	1.22124	0.00016	1.22140
0.30	1.35071	0.00085	1.35018	0.00032	1.34970	0.00016	1.34986
0.40	1.49280	0.00098	1.49220	0.00037	1.49165	0.00017	1.49182
0.50	1.64982	0.00110	1.64914	0.00042	1.64853	0.00019	1.64872
0.60	1.82334	0.00122	1.82259	0.00047	1.82191	0.00021	1.82212
0.70	2.01510	0.00135	2.01427	0.00052	2.01352	0.00023	2.01375
0.80	2.22703	0.00149	2.22612	0.00057	2.22529	0.00025	2.22554
0.90	2.46125	0.00165	2.46024	0.00064	2.45932	0.00028	2.45960

Таблица 2. Значения коэффициента $B(t)$ для задачи 1

i	t_i	Точное значение $B(t)$	Полученное значение $B(t)$ для σ (%)			
			$\sigma = 0.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 3.0$	$\sigma = 5.0$
25	0.05	1.051271	1.051076	1.084251	1.150601	1.216951
50	0.10	1.105171	1.104997	1.096932	1.080802	1.064672
75	0.15	1.161834	1.161672	1.216784	1.327009	1.437234
100	0.20	1.221403	1.221244	1.192939	1.136328	1.079717
125	0.25	1.284025	1.283867	1.282975	1.281192	1.279408
150	0.30	1.349859	1.349698	1.324083	1.272855	1.221627
175	0.35	1.419068	1.418901	1.479031	1.599290	1.719549
200	0.40	1.491825	1.491652	1.510374	1.547818	1.585262
225	0.45	1.568312	1.568132	1.602714	1.671878	1.741042
250	0.50	1.648721	1.648533	1.621891	1.568608	1.515325
275	0.55	1.733253	1.733055	1.741956	1.759757	1.777559
300	0.60	1.822119	1.821911	1.854532	1.919773	1.985013
325	0.65	1.915541	1.915323	1.865791	1.766726	1.667662
350	0.70	2.013753	2.013524	1.950881	1.825597	1.700312
375	0.75	2.117000	2.116759	2.176286	2.295341	2.414395
400	0.80	2.225541	2.225288	2.226627	2.229306	2.231985
425	0.85	2.339647	2.339381	2.386807	2.481660	2.576512
450	0.90	2.459603	2.459324	2.467495	2.483837	2.500179
475	0.95	2.585710	2.585416	2.631945	2.725005	2.818064

Были проведены расчеты при наличии случайных помех в функции $\frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$, обусловленных погрешностями измерения состояния $v(0, t)$ на левом конце, которые определялись следующим образом:

$$\left(\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} \right)^\sigma = \sigma \text{ rand} .$$

Здесь σ — величина, определяющая уровень погрешности в измерениях, rand — случайные числа, равномерно распределенные на интервале $[-1, 1]$ и полученные с использованием функции MATLAB rand.

В табл. 2 приведены результаты решения задачи 1 при числе прямых $N = 500$, $h_x = 0.002$ для уровней погрешности $\sigma = 1\%$, $\sigma = 3\%$ и $\sigma = 5\%$, а также без наличия шума, т.е. $\sigma = 0\%$. На рис. 1 даны графики точных значений коэффициента $B(t)$ (аналитическое решение) и полученных численным методом, предложенным в разд. 2, при различных уровнях шума σ .

Задача 2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= a(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ B(t) e^x [3x^2 - a(x)(x^2 + 4x + 2)], \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\}, \\ v(x, 0) &= x^2 e^x, \quad x \in [0, 1], \\ v(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad v(1, t) = e^{(1+3t)}, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

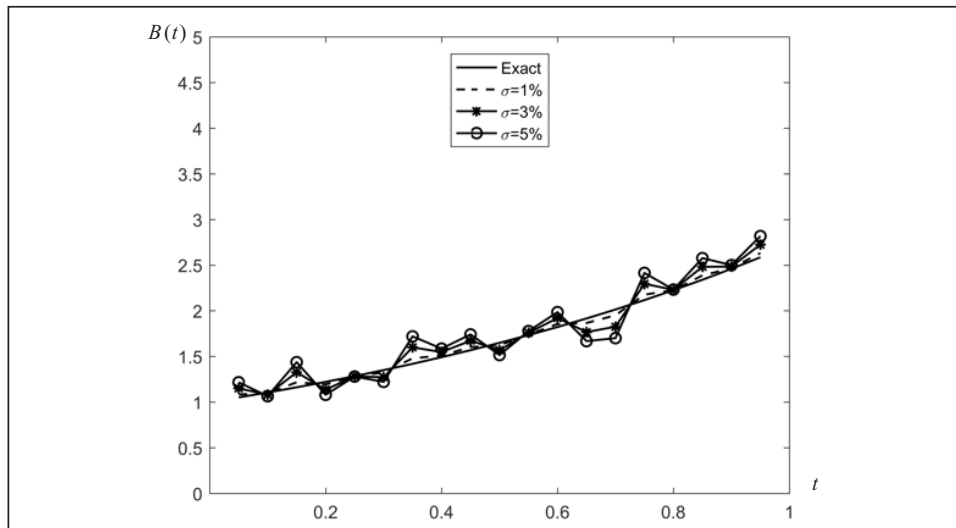


Рис. 1. Графики точного (Exact) и полученного численными методами коэффициента $B(t)$ при различных уровнях шума σ для задачи 1

Таблица 3. Полученное и точное значения $B(t)$ для задачи 2

t_i	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	$B(t_i)$	$ \Delta B(t_i) $	Точное значение $B(t_i)$
	$N = 100$		$N = 200$		$N = 500$		
0.10	1.35457	0.00471	1.35214	0.00228	1.35041	0.00055	1.34986
0.20	1.82970	0.00758	1.82575	0.00363	1.82306	0.00094	1.82212
0.30	2.46992	0.01032	2.46453	0.00493	2.46088	0.00127	2.45960
0.40	3.33405	0.01393	3.32677	0.00666	3.32184	0.00172	3.32012
0.50	4.50049	0.01880	4.49067	0.00898	4.48401	0.00232	4.48169
0.60	6.07503	0.02538	6.06177	0.01213	6.05278	0.00313	6.04965
0.70	8.20043	0.03426	8.18254	0.01637	8.17040	0.00423	8.16617
0.80	11.06943	0.04625	11.04527	0.02210	11.02889	0.00571	11.02318
0.90	14.94216	0.06243	14.90956	0.02983	14.88744	0.00771	14.87973

где $a(x) = \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$. Точными решениями данной задачи являются функции

$$B(t) = e^{3t}, \quad v(x, t) = x^2 e^{(x+3t)}.$$

В табл. 3 приведены результаты решения задачи 2 при числе прямых $N = 100, 200, 500$.

В табл. 4 приведены результаты решения задачи 2 при $N = 500, h_x = 0.002$ для уровней шума $\sigma = 1\%, \sigma = 3\%$ и $\sigma = 5\%$, а также без наличия шума, т.е. $\sigma = 0\%$.

На рис. 2 даны графики точного (аналитическое решение) и полученного численными методами коэффициента $B(t)$ при различных уровнях шума σ на основе данных табл. 4 для задачи 2.

Результаты большого числа проведенных численных экспериментов по решению различных тестовых обратных задач по определению коэффициентов $B(t)$ показали следующее. Точность решения обратных задач, как и следовало ожидать, существенно зависит от числа используемых прямых N в методе прямых для аппроксимации исходной краевой задачи.

Таблица 4. Значения коэффициента $B(t)$ для задачи 2

i	t_i	Точное значение $B(t)$	Полученное значение $B(t)$ для σ (%)			
			$\sigma = 0.0$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 3.0$	$\sigma = 5.0$
25	0.05	1.161834	1.162007	1.219609	1.334815	1.450020
50	0.10	1.349859	1.350413	1.338968	1.316077	1.293186
75	0.15	1.568312	1.569092	1.673357	1.881887	2.090418
100	0.20	1.822119	1.823058	1.771834	1.669388	1.566941
125	0.25	2.117000	2.118097	2.111646	2.098743	2.085841
150	0.30	2.459603	2.460878	2.413252	2.318001	2.222750
175	0.35	2.857651	2.859132	2.967763	3.185025	3.402288
200	0.40	3.320117	3.321837	3.360491	3.437799	3.515107
225	0.45	3.857426	3.859424	3.917700	4.034251	4.150802
250	0.50	4.481689	4.484011	4.440900	4.354680	4.268459
275	0.55	5.206980	5.209677	5.218467	5.236046	5.253625
300	0.60	6.049647	6.052782	6.104473	6.207856	6.311240
325	0.65	7.028688	7.032329	6.937823	6.748810	6.559797
350	0.70	8.166170	8.170401	8.055173	7.824718	7.594263
375	0.75	9.487736	9.492651	9.607099	9.835996	10.064892
400	0.80	11.023176	11.028887	11.037994	11.056208	11.074422
425	0.85	12.807104	12.813739	12.897830	13.066012	13.234194
450	0.90	14.879732	14.887441	14.900052	14.925275	14.950499
475	0.95	17.287782	17.296738	17.381662	17.551510	17.721357

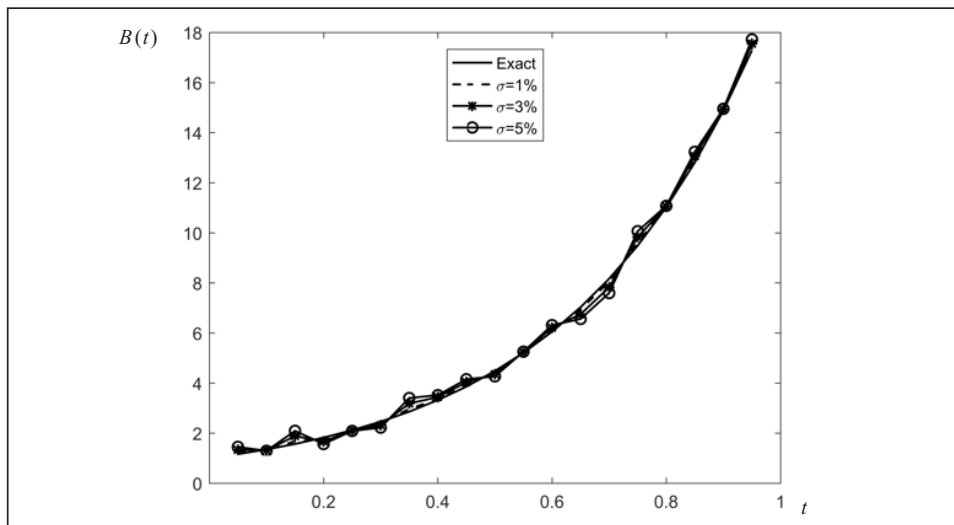


Рис. 2. Графики точного (Exact) и полученного численными методами коэффициента $B(t)$ при различных уровнях шума σ для задачи 2

Для задачи идентификации коэффициента $B(t)$ увеличение числа прямых существенно не влияет на вычислительный процесс, так как задача (22), (18), (19) на каждой прямой $t = t_j$ решается независимо и последовательно при $j = 1, 2, \dots, N$. Решение этой задачи возможно практически с любой заданной точностью с использованием известных эффективных численных методов решения задач Коши.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффективность предлагаемого в настоящей статье численного метода решения задач параметрической идентификации для параболического уравнения заключается в том, что он приводится к решению вспомогательных, хорошо исследованных задач Коши и не требует построения каких-либо итерационных процедур.

Автор выражает благодарность профессору К.Р. Айда-заде за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: M. Dekker, 2000. 709 p.
2. Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publications. Lviv, Ukraine, 2003. 238 p.
3. Кожанов А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении. *Математические заметки СВФУ*. 2016. Т. 23, № 4. С. 31–45.
4. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Рунге в обратных задачах для уравнения параболического типа. I. *Дифференциальные уравнения*. 1987. Т. 23, № 10. С. 1791–1799.
5. Соловьев В.В. Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае. *Дифференциальные уравнения*. 1995. Т. 31, № 6. С. 1060–1069.
6. Johansson T., Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007. Vol. 72, N 6. P. 748–760. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxm024>.
7. Hasanov A. Identification of spacewise and time dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurement at a final time. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2012. Vol. 55. P. 2069–2080. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.12.009>.
8. Hasanov A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation. *Applied Mathematics Letters*. 2011. Vol. 24. P. 1269–1273. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.02.023>.
9. Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2011. Vol. 19. P. 895–1006. <https://doi.org/10.1080/17415977.2011.565931>.
10. Farcas A., Lesnic D. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. Vol. 54. P. 375–388. <https://doi.org/10.1007/s10665-005-9023-0>.
11. Yan L., Fu C.L., Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008. Vol. 32. P. 216–222. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.08.002>.
12. Ahmadabadi M. Nili, Arab M., Maalek Ghaini F.M. The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2009. Vol. 33. P. 1231–1235. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.05.001>.
13. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 218. P. 4138–4146. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.044>.
14. Абрамов А.А., Бураго Н.Г., Диткин В.В., Дышко А.Л., Заболоцкая А.Ф., Конюхова Н.Б., Парийский Б.С., Ульянова В.И., Чечель И.И. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач. *Сообщения по программному обеспечению ЭВМ*. Москва: ВЦ АН СССР, 1982. 63 с.
15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
16. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22, N 1. P. 96–111. <https://doi.org/10.1080/17415977.2013.827184>.

17. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. Solution to classes of inverse coefficient problems and problems with nonlocal conditions for parabolic equations. *Differential Equations*. 2015. Vol. 51, N 1. P. 83–93. <https://doi.org/10.1134/S0012266115010085>.
18. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. *Успехи математических наук*. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
19. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. *Успехи математических наук*. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.
20. Эйдельман С.Д. Параболические уравнения. *Дифференциальные уравнения с частными производными – 6. Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. математики. Фундаментальные направления*, 63. Москва: ВИНТИ, 1990. С. 201–313.
21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Москва: Наука, 1981. Т. IV. Ч. 2. 551 с.
22. Соловьев В.В. Существование решения в «целом» обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа. *Дифференциальные уравнения*. 1996. Т. 32, № 4. С. 536–544.
23. Rahimov A.B. Numerical solution to a class of inverse problems for parabolic equation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 392–402. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9939-1>.
24. Пулькина Л.С. Об одном классе нелокальных задач и их связи с обратными задачами. *Тр. Третьей Всерос. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Математическое моделирование и краевые задачи»*. Ч. 3. Самара: Изд. СамГТУ, 2006. С. 190–192.
25. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. *Math. Ann.* 1930. Vol. 102, N 1. P. 650–670.

Надійшла до редакції 06.06.2019

А.Б. Рагімов

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ З ВІДНОВЛЕННЯ ДЖЕРЕЛА СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Анотація. Розглянуто обернену задачу з відновлення джерела спеціального виду в параболическому рівнянні з початковими і граничними умовами. Специфіка задачі полягає в тому, що ідентифіковані параметри залежать від часової змінної і є співмножниками коефіцієнта вільного члена правої частини. Запропоновано чисельний метод розв'язання задачі, що ґрунтується на методі прямих і спеціальному вигляді подання для розв'язування. Метод не вимагає побудови будь-яких ітераційних процедур. Наведено результати чисельних експериментів на тестовій задачі.

Ключові слова: зворотна задача, нелокальні умови, метод прямих, параболическе рівняння, параметрична ідентифікація.

A.B. Rahimov

ON NUMERICAL SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM OF RECOVERING SOURCE OF A SPECIAL TYPE OF PARABOLIC EQUATION

Abstract. We consider an inverse problem of recovering a source of a special type of parabolic equation with initial and boundary conditions. The specificity of the problem is that the identifiable parameters depend only on a time variable and are factors of coefficients of the right-hand side of the equation. We propose a numerical method to solve the problem, which is based on the use of the method of lines and a special representation of the solution. The method does not require to construct any iterative procedures. The results of numerical experiments conducted for test problems are provided.

Keywords: inverse problem, nonlocal conditions, method of lines, parabolic equation, parametric identification.

Рагімов Анар Бейбала оглы,

кандидат физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, e-mail: anar_r@yahoo.com; anar.rahimov@fresnel.fr.