СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

А.Н. ХИМИЧ, Е.А. НИКОЛАЕВСКАЯ

УДК 519.6

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЗВЕШЕННОГО НОРМАЛЬНОГО ПСЕВДОРЕШЕНИЯ

Аннотация. Исследована задача взвешенных наименьших квадратов с положительно-определенными весами M и N для матриц произвольного вида и ранга. Доказаны существование и единственность M-взвешенного решения наименьших квадратов с минимальной N-нормой системы $Ax=b$.

Ключевые слова: взвешенная псевдообратная матрица, взвешенное нормальное псевдорешение, задача взвешенных наименьших квадратов.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к проблеме взвешенных наименьших квадратов в значительной степени обусловлен ее многочисленными приложениями. В частности, взвешенные псевдообратные матрицы использовались при проектировании и оптимизации строительных конструкций, в томографии, в статистике и т.д. Нахождение взвешенных нормальных псевдорешений основано на некоторых свойствах взвешенных псевдообратных матриц. Область приложений взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений непрерывно расширяется.

Определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами впервые введено в [1], а понятие косой псевдообратной матрицы — в [2]. Различные варианты взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами изучались в [3–5]. Вопросы существования и единственности взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными и смешанными весами, а также некоторые их свойства рассматривались в [6–8]. Применение взвешенной псевдообратной матрицы в статистике описано в [10–14]. Много результатов по взвешенным обобщенным псевдоинверсиям приведено в [15–17]. Большое количество публикаций посвящено анализу влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления псевдообратных матриц и нормальных псевдорешений (см., например, [18–22]).

Исследование свойств взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, а также построение методов решения этих и других задач описаны в [23–29].

Настоящая работа посвящена исследованию и доказательству существования и единственности взвешенного нормального псевдорешения. Отметим, что в [25] для доказательства использовался другой математический аппарат.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем обозначения. Пусть $R^{m\times n}$ — множество матриц размера $m\times n$. Для матрицы $A\in R^{m\times n}$ обозначим A^{T} матрицу, транспонированную к A, $\operatorname{rank}(A)$ — ранг матрицы A, $\mathfrak{R}(A)$ — множество образов матрицы A, $\aleph(A)$ — нуль-пространство A, $\|\ \|$ — евклидова векторная и согласованная с ней спектральная матричная норма, I — единичная матрица.

Для произвольной матрицы $A\in R^{m\times n}$ и симметричных положительно-определенных матриц M и N порядка m и n соответственно единственная матрица $X\in R^{m\times n}$, удовлетворяющая условиям:

$$AXA=A, \tag{1}$$

$$XAX=X, \tag{2}$$

$$(MAX)^{\mathrm{T}}=MAX, \tag{3}$$

$$(NXA)^{\mathrm{T}}=NXA, \tag{4}$$

называется взвешенной псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза для матрицы A и обозначается $X=A^{+}_{MN}$. В частности, когда $M=I\in R^{m\times m}$ и $N=I\in R^{n\times n}$, матрица X, удовлетворяющая (1)–(4), называется псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза и обозначается $X=A^{+}$.

Обозначим $A^{\#}$ взвешенную транспонированную матрицу к A: $A^{\#}=N^{-1}A^{\mathrm{T}}M$.

Пусть $x\in R^{m}$, $y\in R^{n}$. Взвешенные скалярные произведения в R^{m} и R^{n} имеют вид

$$(x,y)_M=y^{\mathrm{T}}Mx,\ x,y\in R^{m},$$

и

$$(x,y)_N=y^{\mathrm{T}}Nx,\ x,y\in R^{n},$$

соответственно. Взвешенные векторные нормы представим в виде

$$\|x\|_M=(x,x)_M^{1/2}=(x^{\mathrm{T}}Mx)^{1/2}=\|M^{1/2}x\|_2,\ x\in R^{m},$$

и

$$\|y\|_N=(y,y)_N^{1/2}=(y^{\mathrm{T}}Ny)^{1/2}=\|N^{1/2}y\|,\ y\in R^{n},$$

соответственно.

Пусть $x,y\in R^{m}$ и $(x,y)_M=0$. Тогда векторы x и y называются M-ортогональными, т.е. $M^{1/2}x$- и $M^{1/2}y$-ортогональными. Легко показать, что

$$\|x+y\|_M^2=\|x\|_M^2+\|y\|_M^2,\ x,y\in R^{m}.$$

Взвешенные матричные нормы имеют вид

$$\|A\|_{MN}=\max_{\|x\|_N=1}\|Ax\|_M=\|M^{1/2}AN^{-1/2}\|,\ A\in R^{m\times n},$$

$$\|B\|_{NM}=\max_{\|y\|_M=1}\|By\|_N=\|N^{1/2}AM^{-1/2}\|,\ B\in R^{n\times m}.$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу взвешенных наименьших квадратов с положительно-определенными весами M и N

$$\min_{x \in C} ||x||_N, \; C = \{x| ||Ax - b||_M = \min\}, \tag{5}$$

где $A \in R^{m \times n}$ — матрица произвольного ранга, $b \in R^m$.

В дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЗВЕШЕННОГО НОРМАЛЬНОГО ПСЕВДОРЕШЕНИЯ

Пусть линейное многообразие L — непустое подмножество пространства R, замкнутое по отношению к операциям сложения и умножения на скалярную величину (если x и y — элементы L $\forall \alpha, \beta$, то элементом L является $\alpha x + \beta y$).

Вектор x N-ортогональный к линейному многообразию L ($x \perp_N L$), если x является N-ортогональным к каждому вектору из L.

Лемма 1 [30]**.** Существует единственное разложение вектора x, а именно

$$x = \hat{x} + \tilde{x},$$

где $\hat{x} \in L$, $\tilde{x} \perp_N L$.

Пусть A — произвольная матрица. Ядро матрицы A, обозначенное $\aleph(A)$, — это множество векторов, которые A отображает в нуль: $\aleph(A) = \{x : Ax = 0\}$.

Множество $\mathfrak{R}(A)$ образов матрицы A есть множество векторов, являющихся образами векторов пространства R из области определения A, т.е. $\mathfrak{R}(A) = \{b : b = Ax \; \forall x\}$.

Пусть L — линейное многообразие в пространстве R, N-ортогональное (M-ортогональное) дополнение к L, обозначаемое $L^{\perp_N}$ ($L^{\perp_M}$), определенное как множество векторов в R, каждый из которых N-ортогонален (M-ортогонален) к L.

Замечание 1. Если x — вектор из R и $x^{\mathrm{T}} Ny = 0$ для любого y из R, то $x = 0$.

Теорема 1. Пусть $A \in R^{m \times n}$, тогда $\aleph(A) = \mathfrak{R}^{\perp}(A^{\#})$.

Доказательство. Вектор $x \in \aleph(A)$ тогда и только тогда, если $Ax = 0$. Поэтому в силу замечания 1 имеем $x \in \aleph(A)$ тогда и только тогда, если $y^{\mathrm{T}} MAx = 0$ для любого y. Поскольку $y^{\mathrm{T}} MAx = (A^{\#} y)^{\mathrm{T}} Nx$, то $Ax = 0$ тогда и только тогда, если x N-ортогонален ко всем векторам вида $A^{\#} y$. Векторы $A^{\#} y$ образуют $\mathfrak{R}(A^{\#})$. Отсюда и из определения $\mathfrak{R}^{\perp}(A)$ следует требуемое утверждение.

Теорема 2 [30]**.** Если A — матрица размера $m \times n$ и b — m-мерный вектор, то имеет место единственное разложение $b = \hat{b} + \tilde{b}$, где $\hat{b} \in \mathfrak{R}(A)$, а $\tilde{b} \in \aleph(A^{\#})$.

Вектор $\hat{b}$ является проекцией b на $\mathfrak{R}(A)$, а $\tilde{b}$ — проекцией b на $\aleph(A^{\#})$. Векторы $\hat{b}$ и $\tilde{b}$ M-ортогональны. Следовательно, $A^{\#} b = A^{\#} \hat{b}$.

В силу теоремы 1 для симметричной матрицы A справедливы соотношения

$$\aleph(A) = \mathfrak{R}^{\perp}(A), \; \mathfrak{R}(A) = \aleph^{\perp}(A).$$

Теорема 3. Пусть $A \in R^{m \times n}$, тогда $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(AA^{\#})$, $\mathfrak{R}(A^{\#}) = \mathfrak{R}(A^{\#} A)$, $\aleph(A) = \aleph(A^{\#} A)$ и $\aleph(A^{\#}) = \aleph(AA^{\#})$.

Доказательство. Достаточно установить, что

$$\aleph(A^{\#}) = \aleph(AA^{\#}) \text{ и } \aleph(A) = \aleph(A^{\#} A).$$

Для этого используем теорему 1. Чтобы доказать совпадение $\aleph(A^{\#})$ с $\aleph(AA^{\#})$, отметим, что $AA^{\#}x=0$, если $A^{\#}x=0$. Однако, если $AA^{\#}x=0$, то $x^{\mathrm{T}}AA^{\#}x=0$, т.е. $||A^{\#}x||_M=0$, из чего следует равенство $A^{\#}x=0$. Итак, $A^{\#}x=0$ тогда и только тогда, если $x^{\mathrm{T}}AA^{\#}x=0$. Аналогично можно установить, что $\aleph(A)=\aleph(A^{\#}A)$.

Далее докажем теорему существования и единственности вектора решения, минимизирующего норму невязки $||Ax-b||_M$ по методике, предложенной в [31] для задачи наименьших квадратов.

Теорема 4. Пусть $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^m$, $b\notin\mathfrak{R}(A)$. Тогда найдется вектор $\hat{x}$, минимизирующий норму невязки $||Ax-b||_M$, и вектор $\hat{x}$ будет единственным вектором из $\mathfrak{R}(A^{\#})$, удовлетворяющим уравнению $Ax=\hat{b}$, где $\hat{b}=AA_{MN}^{+}b$ — проекция b на $\mathfrak{R}(A)$.

Доказательство. В силу теоремы 2 имеем $b=\hat{b}+\tilde{b}$, где $\tilde{b}=(I-AA_{MN}^{+})b$ — проекция b на $N(A^{\#})$. Поскольку для каждого x $Ax\in\mathfrak{R}(A)$ и $\tilde{b}\in\mathfrak{R}^{\perp_M}(A)$, то $\hat{b}-Ax\in\mathfrak{R}(A)$ и $\tilde{b}\perp\hat{b}-Ax$. Поэтому

$$||b-Ax||_M^2=||\hat{b}-Ax+\tilde{b}||_M^2=||\hat{b}-Ax||_M^2+||\tilde{b}||_M^2\geq||\tilde{b}||_M^2.$$

Эта нижняя грань достигается, поскольку $\hat{b}$ принадлежит множеству образов A, т.е. $\hat{b}$ является образом некоего x_0: $\hat{b}=Ax_0$. Тем самым для этого x_0 достижима нижняя грань

$$||b-Ax_0||_M^2=||b-\hat{b}||_M^2=||\tilde{b}||_M^2.$$

Ранее показано, что

$$||b-Ax||_M^2=||\hat{b}-Ax||_M^2+||\tilde{b}||_M^2,$$

и следовательно, нижняя грань достигается только для тех x^*, для которых $Ax^*=\hat{b}$. Каждый вектор x^* в соответствии с теоремой 2 можно представить в виде суммы двух ортогональных векторов: $x^*=\hat{x}^*+\tilde{x}^*$, где $\hat{x}^*\in\mathfrak{R}(A^{\#})$, $\tilde{x}^*\in N(A)$.

Поэтому $Ax^*=A\hat{x}^*$ и, следовательно, $||b-Ax^*||_M^2=||b-A\hat{x}^*||_M^2$. Отметим, что

$$||x^*||_N^2=||\hat{x}^*||_N^2+||\tilde{x}^*||_N^2\geq||\hat{x}^*||_N^2,$$

где строгое неравенство возможно, когда $x^*\neq\hat{x}^*$ (т.е. если x^* не совпадает со своей проекцией на $\mathfrak{R}(A^{\#})$).

Как показано ранее, x_0 минимизирует $||Ax-b||_M$ тогда и только тогда, если $Ax_0=\hat{b}$, и среди векторов, минимизирующих $||Ax-b||_M$, каждый вектор с минимальной нормой должен принадлежать множеству образов $A^{\#}$. Чтобы установить единственность вектора с минимальной нормой, предположим, что $\hat{x}$ и x^* принадлежат $\mathfrak{R}(A^{\#})$ и что $A\hat{x}=Ax^*=\hat{b}$. Тогда $x^*-\hat{x}\in\mathfrak{R}(A^{\#})$, но $A(x^*-\hat{x})=0$, так что $x^*-\hat{x}\in N(A)=\mathfrak{R}^{\perp_N}(A^{\#})$.

Поскольку вектор $x^*-\hat{x}$ N-ортогонален самому себе, то $||x^*-\hat{x}||_N=0$, т.е. $x^*=\hat{x}$.

Замечание 2. Имеет место другое и, возможно, более обоснованное утверждение, эквивалентное теореме.

Существует n-мерный вектор y такой, что

$$||b - AA^{\#} y||_M = \inf_x |b - Ax||_M.$$

Если

$$||b - Ax_0||_M = \inf_x ||b - Ax||_M,$$

то $||x_0||_N \geq ||A^{\#} y||_N$ со строгим неравенством при $x_0 \neq ||A^{\#} y||_N$.

Вектор y удовлетворяет уравнению $AA^{\#} y = \hat{b}$, где $\hat{b}$ — проекция b на $\mathfrak{R}(A)$.

Теорема 5. Среди всех векторов x, минимизирующих невязку $||Ax - b||_M$, вектор $\hat{x}$, имеющий минимальную норму $\hat{x} = \min ||x||_N$, является единственным вектором вида

$$\hat{x} = N^{-1} A^{\mathrm{T}} My = A^{\#} y, \tag{6}$$

удовлетворяющим уравнению

$$A^{\#} Ax = A^{\#} b, \tag{7}$$

т.е. $\hat{x}$ можно получить с помощью любого вектора y_0, удовлетворяющего уравнению $A^{\#} AA^{\#} y = A^{\#} b$ по формуле $\hat{x} = A^{\#} y_0$.

Доказательство. Согласно условию теоремы 3 $\mathfrak{R}(A^{\#}) = \mathfrak{R}(A^{\#} A)$. Поскольку вектор $A^{\#} b$ принадлежит множеству образов $A^{\#}$, он должен принадлежать множеству образов $A^{\#} A$ и тем самым должен быть образом некоторого вектора x по отношению к преобразованию $A^{\#} A$. Иными словами, уравнение (7) (по отношению к x) имеет по крайней мере одно решение. Если x является решением уравнения (7), то $\hat{x}$ — проекция x на $\mathfrak{R}(A^{\#})$, поскольку $Ax = A\hat{x}$ согласно теореме 2. В силу того, что $\hat{x} \in \mathfrak{R}(A^{\#})$, вектор $\hat{x}$ является образом некоторого вектора y по отношению к преобразованию $A^{\#}$: $\hat{x} = A^{\#} y$.

Итак, установлено, что по крайней мере одно решение уравнения (7) в форме (6) существует. Чтобы установить единственность этого решения, предположим, что $\hat{x}_1 = A^{\#} y_1$ и $\hat{x}_2 = A^{\#} y_2$ удовлетворяют уравнению (7). Тогда $A^{\#} A(A^{\#} y_1 - A^{\#} y_2) = 0$ и, значит, $A^{\#}(y_1 - y_2) \in N(A^{\#} A) = N(A)$, из чего следует равенство $AA^{\#}(y_1 - y_2) = 0$.

Поэтому $y_1 - y_2 \in N(AA^{\#}) = N(A^{\#})$ и, значит, $\hat{x}_1 = A^{\#} y_1 = A^{\#} y_2 = \hat{x}_2$.

Таким образом, существует в точности одно решение уравнения (7) в форме (6).

Доказательство теоремы 5 будет завершено, если удастся показать, что найденное в форме (6) решение в силу теоремы 1 является также решением уравнения $Ax = \hat{b}$, где $\hat{b}$ — взвешенная проекция b на $\mathfrak{R}(A)$, т.е. $A^{\#} b = A^{\#} \hat{b}$.

В теореме 4 установлено, что существует единственное из $\mathfrak{R}(A^{\#})$ решение уравнения

$$Ax = \hat{b}. \tag{8}$$

Это единственное решение, следовательно, удовлетворяет уравнению $A^{\#} Ax = A^{\#} \hat{b}$.

В соответствии с равенством $A^{\#} b = A^{\#} \hat{b}$ единственное решение уравнения (8), принадлежащее $\mathfrak{R}(A^{\#})$, должно совпадать с $\hat{x}$ — единственным решением уравнения (7), также принадлежащим $\mathfrak{R}(A^{\#})$. Наконец, вектор $\hat{x}$, упоминаемый при доказательстве теоремы 5, в точности совпадает с вектором $\hat{x}$ из теоремы 4.

Используя представление взвешенной псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза из [30]

$$A_{MN}^{+} = A^{\#}(A^{\#}AA^{\#})^{+}A^{\#},$$

следующую теорему для задачи (5) можно сформулировать в более короткой форме.

Теорема 6. Пусть $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^{m}$, тогда $x = A_{MN}^{+}b$ — это M-взвешенное решение наименьших квадратов с минимальной N-нормой системы $Ax = b$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены результаты, которые являются теоретической основой для исследования и развития теории взвешенной псевдоинверсии и взвешенных псевдорешений, а также для разработки методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Amer. Statist. Assoc*. 1964. Vol. 59, Iss. 308. P. 1078–1111.
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math*. 1968. Vol. 16, N 5. P. 931–944.
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
4. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. 2009. Т. 49, № 8. С. 1347–1363.
5. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. матем. журн*. 2011. Т. 63, № 1. С. 80–101.
6. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. матем. журн*. 2018. Т. 70, № 6. С. 752–772.
7. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Представление взвешенных псевдообратных матриц с смешанными весами через другие псевдообратные матрицы. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 17–25.
8. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 67–80.
9. Goldman A.J., Zelen M. Weak generalized inverses and minimum variance linear unbiased estimation. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect*. 1964. Vol. 38, N 4. P. 151–172.
10. Watson G.S. Linear least squares regression. *Ann. Math. Statist*. 1967. Vol. 38, N 6. P. 1679–1699.
11. Zyskind G. On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. *Ann. Math. Statist*. 1967. Vol. 38, N 4. P. 1092–1109.
12. Rao C. R., Mitra S.K. Generalized inverse of a matrix and its applications. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. 1972. Vol. 1. P. 601–620.
13. Rao C.R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley, 1971. 240 p.
14. Rao C.R., Mitra S.K. Theory and application of constrained inverse of matrices. *SIAM J. Appl. Math*. 1973. Vol. 24, N 4. P. 473–488.
15. Nashed M.Z., Votruba G.F. A unified operator theory of generalized inverses. Generalized inverses and applications. *Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*. 1976. N 32. P. 1–109.
16. Nashed M.Z. Generalized inverses and applications. New York: Acad. Press, 1976. 1024 p.
17. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses: Theory and applications. New York: Springer-Verlag, 2003. 420 p.
18. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 3. С. 142–145.

19. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 6. С. 83–95.

20. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ*. 2009. Т. 49, № 3. С. 422–430.

21. Wei Y., Wang D. Condition numbers and perturbation of the weighted Moore-Penrose inverse and weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput*. 2003. Vol. 145, Iss. 1. P. 45–58.

22. Wei Y. A note on the sensitivity of the solution of the weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput*. 2003. Vol. 145, Iss. 2–3. P. 481–485.

23. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц. *Ж. вычис. матем. и матем. физ*. 2007. Т. 47, № 5. С. 747–766.

24. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Взвешенное псевдообращение в оптимальном управлении дискретно-аргументными системами. *Изв. РАН. Техн. кибернетика*. 1992. № 1. С. 227.

25. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение комплексных матриц. *Укр. матем. журн*. 1983. Т. 35, № 1. С. 53–57.

26. Elden L. A weighted pseudoinverse, generalized singular values and constrained least squares problems. *BIT*. 1982. Vol. 22. P. 487–502.

27. Wei Y. The weighted Moore–Penrose inverse of modified matrices. *Appl. Math. Comput*. 2001. Vol. 122, Iss. 1. P. 1–13.

28. Ward J.F. On a limit formula for weighted pseudoinverses. *SIAM J. Appl. Math*. 1977. Vol. 33, N 1. P. 34–38.

29. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math*. 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.

30. Wang G., Wei Y., Qiao S. Generalized inverses: Theory and computations. Beijing: Science Press, 2004. 294 p.

31. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Москва: Наука, 1977. 223 с.

Надійшла до редакції 05.03.2020

О.М. Хіміч, О.А. Ніколаєвська

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ЗВАЖЕНОГО НОРМАЛЬНОГО ПСЕВДОРОЗВ'ЯЗКУ

Анотація. Досліджено задачу зважених найменших квадратів з додатно-визначеними вагами M та N для матриць довільного вигляду та рангу. Доведено існування та єдиність M-зваженого розв'язку найменших квадратів з мінімальною N-нормою системи $Ax = b$.

Ключові слова: зважена псевдообернена матриця, зважений нормальний псевдорозв'язок, задача зважених найменших квадратів.

A.N. Khimich, E.A. Nikolaevskaya

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE WEIGHTED NORMAL PSEUDOSOLUTION

Abstract. The problem of weighted least squares with positive definite weights M and N for matrices of arbitrary form and rank is analyzed. The existence and uniqueness of the M-weighted least-squares solution with a minimal N-norm of the system $Ax = b$ are proved.

Keywords: weighted pseudoinverse matrix, weighted normal pseudosolution, weighted least squares problem.

Химич Александр Николаевич,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заместитель директора Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: khimich505@gmail.com.

Николаевская Елена Анатольевна,
кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: elena_nea@ukr.net.