

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГРЕССИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Аннотация. Метод применим к регрессиям, переменные которых — временные ряды. Метод оценивания основан на том, что эти ряды рассматриваются как наблюдаемые значения непрерывных случайных функций времени. Это свойство позволяет получить решение задачи оценивания, используя градиентные методы решения задач оптимизации. Приведены примеры использования предложенного метода.

Ключевые слова: регрессия, точки переключения, параметры регрессии, непрерывное время, дискретное время, оценивание.

1. ОБОСНОВАНИЕ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Регрессия с переключениями с неизвестными точками переключения — вид регрессии, который часто используется в различных приложениях, и поэтому исследователи уделяют большое внимание этому вопросу. Можно выделить три вида задач в данной области: тестирование точек переключения (проверка гипотез о числе точек переключения на интервале наблюдения); оценивание параметров регрессии и точек переключения при заданном их числе; изучение статистических свойств оценок параметров регрессии и точек переключения. В решение этих задач внесли весомый вклад П. Перрон и его соавторы (см., в частности, [1–3]).

В работах П. Перрона и других исследователей рассматривается регрессия с переключениями, которая линейна относительно неизвестных ее параметров. Общий вид такой регрессии

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\alpha}_{ii}^0 + \mathbf{z}'_t \boldsymbol{\beta}^0 + \varepsilon_t, \quad i=1, \dots, k^0 + 1, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

где штрих в индексе означает транспонирование; $\mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^n$ и $\mathbf{z}_t \in \mathfrak{R}^m$ — независимые переменные (регрессоры); $\boldsymbol{\alpha}_{ii}^0 \in \mathfrak{R}^n$ и $\boldsymbol{\beta}^0 \in \mathfrak{R}^m$ — истинные неизвестные величины параметров регрессии; ε_t — случайная величина; k^0 — число точек переключения; T — длина интервала наблюдения $[1, T]$. При этом

$$\boldsymbol{\alpha}_{ii}^0 = \boldsymbol{\alpha}_i^0 = \text{const} \quad \text{для } t \in \bar{I}_i^0 = [\bar{t}_{i-1}^0 + 1, \bar{t}_i^0], \quad i=1, \dots, k^0 + 1, \quad \bar{t}_0^0 = 0, \quad \bar{t}_{k^0+1}^0 = T, \quad (2)$$

где \bar{t}_i^0 — i -я точка переключения — целое положительное число.

Согласно (1), (2) векторный переключающийся параметр $\boldsymbol{\alpha}_{ii}^0$ представляет ступенчатую функцию времени t на интервале наблюдения $[1, T]$. Эта функция постоянна на интервалах \bar{I}_i^0 , $i=1, \dots, k^0 + 1$, и скачком изменяется в точках переключения. Векторный параметр $\boldsymbol{\beta}^0$ постоянен на интервале $[1, T]$.

Одной из важных проблем построения регрессии (1) является оценивание ее параметров и точек переключения. Если параметр $\boldsymbol{\beta}^0$ отсутствует, то в [3], основываясь на работе [4], предлагается оценивать точки переключения методом динамического программирования, который позволяет найти глобальный мини-

мум в задаче оценивания. Недостаток такого подхода — необходимость специальной подготовки данных для расчета, сложность которой возрастает с увеличением числа точек переключения. Если β^0 — не нулевой вектор, то в [4] предлагается процедура оценивания, основанная на схеме многократного применения алгоритма. Однако сходимость этой процедуры не гарантируется и пример ее применения не приводится. В случае, когда на параметры регрессии накладываются ограничения, обусловленные, например, требованием непрерывности математического ожидания зависимой переменной $E\{y_t\}$, использование алгоритма из [4] становится невозможным.

В [5] описан метод сведения задачи (3) к задаче смешанного математического программирования с непрерывными и дискретными переменными, что позволяет использовать известное программное обеспечение решений задач оптимизации. Однако несовершенство методов оптимизации по смешанным переменным может ограничивать применение метода.

В настоящей статье предлагается подход к решению задачи (3), который позволяет учесть специфику этой задачи и находить решение как для нулевого, так и ненулевого β^0 . При этом не требуется специальной подготовки данных. Метод решения основан на следующем допущении.

Допущение 1. Все функции дискретного времени в правой части (1) являются моментными временными рядами, т.е. представляют результат измерения непрерывной величины в определенные моменты времени, а не за некоторый период времени.

Будем считать, что в (1) $\varepsilon_t, t=1, 2, \dots$, — последовательность некоррелированных величин, причем $E\{\varepsilon_t\}=0, E\{\varepsilon_t^2\}=\sigma^2, t=1, 2, \dots$. Тогда оценки точек переключения и параметров регрессии являются решением задачи

$$s(\alpha, \beta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{t=\bar{t}_{i-1}+1}^{\bar{t}_i} (y_t - \mathbf{x}'_t \alpha_i - \mathbf{z}'_t \beta)^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\alpha_i \in \mathcal{R}^n, i=1, \dots, k+1; \beta \in \mathcal{R}^m$ — варьируемые величины параметров, соответственно изменяющихся и не изменяющихся в точках переключения; $\bar{t}_i, i=1, \dots, k$, — варьируемые точки переключения; $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{k+1}]'$, $\bar{t} = [\bar{t}_1 \ \bar{t}_2 \ \dots \ \bar{t}_k]'$.

Минимизация в (3) выполняется по α, β, \bar{t} . Предполагается, что число точек переключения k задано. Варьируя k в заданных пределах с использованием информационных критериев, можно найти оценку k^0 [3, 5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с допущением 1 рассмотрим $\mathbf{x}_t \in \mathcal{R}^n$ как наблюдаемые значения непрерывной вектор-функции времени $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ в моменты времени $t=1, 2, \dots, T$. Следовательно, $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t)$ для $t=1, 2, \dots, T$. Аналогично имеем $\mathbf{z}_t = \mathbf{z}(t), \varepsilon_t = \varepsilon(t), t=1, 2, \dots, T$, где $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^m, \varepsilon(t) \in \mathbb{R}^1$ — непрерывные функции t .

Определим характер изменения зависимой переменной. Согласно (1), (2) отрезки постоянства параметров регрессии изолированы, что иллюстрирует рис. 1 и наиболее ясно видно на рис. 2. Предположим, что временной ряд $y_t, t=1, 2, \dots$, который генерируется моделью (1), является значениями непрерывной функции $y(t)$ в дискретные моменты времени. Тогда ее математическое ожидание должно резко изменяться в окрестности точки переключения, как показано на рис. 3. При этом переход от одного отрезка постоянства параметров регрессии к другому происходит за малое время $1 \gg h^0 > 0$, которое представляет собой длительность переходного процесса из одного режима работы объекта моделирования в другой.

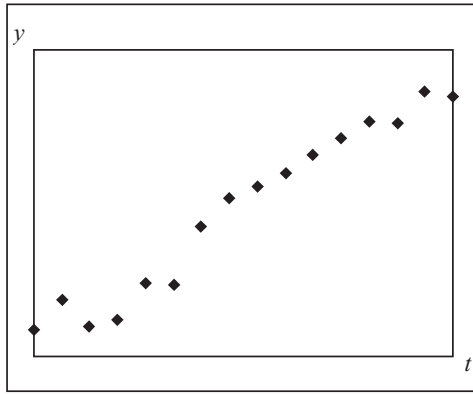


Рис. 1. Временной ряд зависимой переменной y_t с точкой переключения

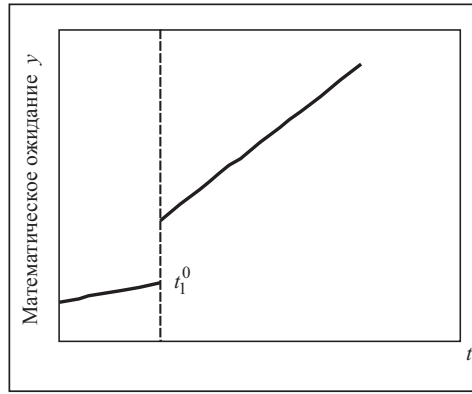


Рис. 2. Математическое ожидание $E\{y_t\}$

Из приведенных предположений вытекает, что регрессия (1) следует из регрессии с непрерывным временем:

$$y(t) = \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_{ii}^0 + \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta}^0 + \varepsilon(t), \quad (4)$$

$$t \in I_i^0, \quad i=1, \dots, k^0+1,$$

в которой отрезки постоянства параметров регрессии имеют вид $I_1^0 = [0, t_1^0]$; $I_i^0 = [t_{i-1}^0 + h^0, t_i^0]$, $i=2, \dots$

\dots, k^0+1 ; $\boldsymbol{\alpha}_{ii}^0 = \boldsymbol{\alpha}_i^0 = \text{const}$ для $t \in I_i^0$, $i=1, \dots, k^0+1$; стационарная случайная функция $\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 , а ее автокорреляционная функция сосредоточена в нуле. Здесь t_i^0 , $i=1, \dots, k^0$, — непрерывные величины. Они связаны с точками переключения в регрессии (1) простыми соотношениями: \bar{t}_i^0 получена округлением t_i^0 , $i=1, \dots, k^0$, до ближайшего целого числа.

Поскольку параметры регрессий (1) и (4) одинаковые, а их точки переключения однозначно связаны, то предлагается следующая приближенная процедура построения регрессии (1): оценить точки переключения в регрессии (4), применив метод из [6], затем определить точки переключения в регрессии (1), а по ним найти оценки параметров этой регрессии. Задача оценивания в [6] имеет вид

$$S(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \int_0^{t_1} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 dt +$$

$$+ \sum_{i=2}^{k+1} \int_{t_{i-1}+h}^{t_i} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$g_i(\mathbf{t}) = t_{i-1} - t_i \leq -\theta_i, \quad i=1, \dots, k+1, \quad t_0 = 0, \quad t_{k+1} = T; \quad t_1 \geq 0, \quad t_k \leq T, \quad (6)$$

где $h > 0$ — малая величина, $\theta_i \geq 0$, $i=1, \dots, k+1$, — заданные величины.

Алгоритм решения этой задачи основан на использовании градиента по \mathbf{t} функции $S(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t})$. Он сходится, если [6]: 1) функции $y(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ удовлетворяют условию Липшица; 2) компоненты вектора $[\mathbf{x}'(t) \quad \mathbf{z}'(t)]'$ линейно независимы для $t \in [0, T]$. Второе условие обеспечивает вычисление оценок параметров регрессии при фиксированном \mathbf{t} . Будем считать, что первое условие выполняется, а проверка второго условия рассматривается в п. 3.2.

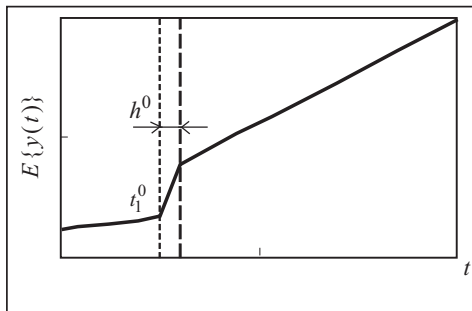


Рис. 3. Математическое ожидание непрерывной случайной функции $E\{y(t)\}$, аппроксимирующей временной ряд на рис. 1; h^0 — интервал между режимами работы объектов

В нашем распоряжении имеются временные ряды переменных в регрессии (1). Поэтому непосредственно использовать алгоритм оценивания из [6] напрямую нельзя. Его необходимо изменить, заменив операции интегрирования суммированием, что приводит к существенным изменениям некоторых вычислений.

3. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ

3.1. Исходные соотношения. Обозначим $[t_i]^*$ минимальное целое число, которое больше t_i ; $[t_i]_*$ — целая часть t_i ; определим следующие величины:

$$\Delta t_i = t_i - [t_i]_*; \Delta \bar{t}_i = [t_i]^* - t_i, \Delta t_i + \Delta \bar{t}_i = 1, i = 1, \dots, k+1. \quad (7)$$

Поскольку согласно (6) $t_{k+1} = T$, то $\Delta t_{k+1} = 0$.

В общем случае точки переключения не будут совпадать с моментами времени $1, \dots, T$. Поэтому определим значения всех переменных в этих точках, используя линейную интерполяцию:

$$\begin{aligned} y(t_i) &= y([t_i]_*) + [y([t_i]^*) - y([t_i]_*)] \Delta t_i, i = 1, \dots, k; \\ \mathbf{x}(t_i) &= \mathbf{x}([t_i]_*) + [\mathbf{x}([t_i]^*) - \mathbf{x}([t_i]_*)] \Delta t_i, i = 1, \dots, k; \\ \mathbf{z}(t_i) &= \mathbf{z}([t_i]_*) + [\mathbf{z}([t_i]^*) - \mathbf{z}([t_i]_*)] \Delta t_i, i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (8)$$

Если t_i — целое число, то $t_i = [t_i]_*$ и согласно (7) $\Delta t_i = 0$. Согласно (8) получаем $y(t_i) = y([t_i]_*)$, $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}([t_i]_*)$, $\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{z}([t_i]_*)$, $i = 1, \dots, k$.

По значениям переменных в точках $t = 1, \dots, T$ и в точках переключения (8) найдем функцию цели и ее градиент, используя аппроксимацию ступенчатыми функциями переменных регрессии. Для этого разобьем интервал наблюдения $[0, T]$ на интервалы:

$$I_i = [t_{i-1} + H_i, t_i], i = 1, \dots, k+1, t_0 = 0, t_{k+1} = T,$$

где

$$H_i = \begin{cases} h, & \text{если } i = 2, \dots, k+1, 1 \gg h > 0; \\ 0, & \text{если } i = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Каждый интервал представляет множество моментов времени, в которых известны значения переменных. Таким образом,

$$\begin{aligned} I_1 &= \{1, \dots, [t_1]_*, t_1\}; I_i = \{[t_{i-1}]^*, [t_{i-1}]^* + 1, \dots, [t_i]_*, t_i\}, \\ &i = 2, \dots, k; I_{k+1} = \{[t_k]^*, \dots, T\}. \end{aligned} \quad (10)$$

На всех интервалах в (10) непрерывные функции времени — переменные регрессии — заменяются ступенчатыми функциями, которые обозначим сверху тильдой. Определим их для переменной $u(t)$, которую будем считать зависимой переменной или произвольной компонентой вектора регрессоров $[\mathbf{x}'(t) \ \mathbf{z}'(t)]'$. Имеем ординаты ступенчатых функций для интервалов в (10) при $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} i = 1: \tilde{u}(t) &= u(t_0 + j), t_0 + j - 1 < t \leq t_0 + j, j = 1, \dots, [t_1]_*; \\ &\tilde{u}(t) = u(t_1), [t_1]_* < t \leq t_1; \\ i = 2, \dots, k: \tilde{u}(t) &= u([t_{i-1}]^*), t_{i-1} + h < t \leq [t_{i-1}]^*; \\ \tilde{u}(t) &= u([t_{i-1}]^* + j), [t_{i-1}]^* + j - 1 < t \leq [t_{i-1}]^* + j, j = 1, \dots, [t_i]_* - [t_{i-1}]^*; \\ &\tilde{u}(t) = u(t_i), [t_i]_* < t \leq t_i; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{u}(t) = u([t_{i-1}]^* + j), [t_{i-1}]^* + j - 1 < t \leq [t_{i-1}]^* + j, j = 1, \dots, [t_i]_* - [t_{i-1}]^*; \quad (12)$$

$$i = k + 1: \tilde{u}(t) = u([t_k]^*), \quad t_k + h < t \leq [t_k]^*; \quad (13)$$

$$\tilde{u}(t) = u([t_k]^*), \quad [t_k]^* + j - 1 < t \leq [t_k]^* + j, \quad j = 1, \dots, T - [t_k]^*.$$

Определим число ступенек L_i у функции $\tilde{u}(t)$ на интервале I_i , $i = 1, \dots, k + 1$, заданном в (10):

$$L_1 = [t_1]_* + 1; \quad L_i = [t_i]_* - [t_{i-1}]^* + 2, \quad i = 2, \dots, k; \quad L_{k+1} = T - [t_k]^* + 1. \quad (14)$$

Ширина ступенек функции $\tilde{u}(t)$ на интервале времени I_i , $i = 2, \dots, k$, равна единице времени, принятой в конкретной задаче, кроме ступенек в начале и конце интервала. Интервалы времени I_1 и I_{k+1} имеют по одной ступеньке, длина которой не равна единице; такая ступенька находится в конце интервала I_1 и в начале интервала I_{k+1} . Обозначим w_{ij} ширину j -й ступеньки i -го интервала. Тогда, используя (7), (10) и (14), получаем

$$w_{1j} = 1, \quad j = 1, \dots, [t_1]_*, \quad w_{1,L_1} = \Delta t_1;$$

$$w_{i1} = [t_{i-1}]^* - (t_{i-1} + h); \quad w_{ij} = 1, \quad j = 2, \dots, [t_i]_* - [t_{i-1}]^* + 1; \quad (15)$$

$$w_{i,L_i} = \Delta t_i, \quad i = 2, \dots, k.$$

Согласно (7) и (15) получаем $w_{i1} = \Delta \bar{t}_{i-1} - h = 1 - \Delta t_{i-1} - h$, $i = 2, \dots, k$. Тогда поскольку $0 < h \ll 1$, окончательно имеем

$$w_{i1} = 1 - \Delta t_{i-1}; \quad w_{ij} = 1, \quad j = 2, \dots, [t_i]_* - [t_{i-1}]^* + 1; \quad w_{i,L_i} = \Delta t_i, \quad i = 2, \dots, k. \quad (16)$$

Аналогично рассуждая, получаем

$$w_{k+1,1} = 1 - \Delta t_k; \quad w_{k+1,j} = 1, \quad j = 2, \dots, T - [t_k]^* + 1; \quad w_{k+1,L_{k+1}} = \Delta t_{k+1} = 0. \quad (17)$$

Считаем, что на интервале времени I_i варьируемый векторный переключающийся параметр $\alpha_i(\mathbf{t})$, $i = 1, \dots, k + 1$, постоянный для всех точек этого множества.

3.2. Вычисление функции цели. Вычислим первый интеграл в (5). Он соответствует значению функции цели на интервале I_1 . С учетом формул (10), (11), (14) имеем

$$S_1(\alpha, \beta, \mathbf{t}) = \int_0^{t_1} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\alpha_1 - \mathbf{z}'(t)\beta)^2 dt \approx \tilde{S}_1(\alpha, \beta, \mathbf{t}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{[t_1]_*} (y(j) - \mathbf{x}'(j)\alpha_1 - \mathbf{z}'(j)\beta)^2 w_{1j} + (y(t_1) - \mathbf{x}'(t_1)\alpha_1 - \mathbf{z}'(t_1)\beta)^2 w_{1,L_1}.$$

Отсюда с учетом ширины ступенек (15) получаем

$$\tilde{S}_1(\alpha, \beta, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{[t_1]_*} (y(j) - \mathbf{x}'(j)\alpha_1 - \mathbf{z}'(j)\beta)^2 +$$

$$+ (y(t_1) - \mathbf{x}'(t_1)\alpha_1 - \mathbf{z}'(t_1)\beta)^2 \Delta t_1. \quad (18)$$

Положим

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{t}) = [y(1) \dots y([t_1]_*) \quad y(t_1)\sqrt{\Delta t_1}]', \quad \mathbf{M}_1^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = [\mathbf{x}(1) \dots \mathbf{x}([t_1]_*) \quad \mathbf{x}(t_1)\sqrt{\Delta t_1}]',$$

$$\mathbf{M}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = [\mathbf{z}(1) \dots \mathbf{z}([t_1]_*) \quad \mathbf{z}(t_1)\sqrt{\Delta t_1}]', \quad \mathbf{M}_1(\mathbf{t}) = [\mathbf{M}_1^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{O}_{L_1, kn} \quad \mathbf{M}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t})].$$

Тогда из (18) получаем

$$\tilde{S}_1(\alpha, \beta, \mathbf{t}) = \tilde{S}_i(\delta, \mathbf{t}) = \|\mathbf{Y}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{M}_1(\mathbf{t})\delta\|^2, \quad \text{где } \delta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Рассуждая аналогично, с использованием (10), (13), (14) для $k+1$ -го интеграла в (5) получаем

$$\begin{aligned} S_{k+1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) &= \int_{t_k+h}^T (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 dt \approx \tilde{S}_{k+1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \\ &= (y([t_k]^*) - \mathbf{x}'([t_k]^*)\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \mathbf{z}'([t_k]^*)\boldsymbol{\beta})^2 w_{k+1,1} + \\ &+ \sum_{j=[t_k]^*+1}^{L_{k+1}} (y(j) - \mathbf{x}'(j)\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \mathbf{z}'(j)\boldsymbol{\beta})^2 w_{k+1,j}. \end{aligned}$$

С учетом ширины ступенек (17) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{k+1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) &= (y([t_k]^*) - (\mathbf{x}'([t_k]^*)\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \mathbf{z}'([t_k]^*)\boldsymbol{\beta}))^2 (1 - \Delta t_k) + \\ &+ \sum_{j=2}^{L_{k+1}} (y(j) - \mathbf{x}'(j)\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \mathbf{z}'(j)\boldsymbol{\beta})^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим $\tilde{S}_{k+1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \tilde{S}_{k+1}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) = \|\mathbf{Y}_{k+1}(\mathbf{t}) - \mathbf{M}_{k+1}(\mathbf{t})\boldsymbol{\delta}\|^2$, где $\mathbf{M}_{k+1}(\mathbf{t}) = [\mathbf{O}_{L_{k+1},kn} \quad \mathbf{M}_{k+1}^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{M}_{k+1}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t})]$. Здесь

$$\mathbf{Y}_{k+1}(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_k})y([t_k]^*) \quad y([t_k]^*+1) \quad \dots \quad y(T)]',$$

$$\mathbf{M}_{k+1}^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_k})\mathbf{x}([t_k]^*) \quad \mathbf{x}([t_k]^*+1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(T)]',$$

$$\mathbf{M}_{k+1}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_k})\mathbf{z}([t_k]^*) \quad \mathbf{z}([t_k]^*+1) \quad \dots \quad \mathbf{z}(T)]', \quad L_{k+1} = T - [t_k]^* + 1.$$

Для $i=2, \dots, k$ из (5) с учетом (10), (12), (14) имеем

$$\begin{aligned} S_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) &= \int_{t_{i-1}+h}^{t_i} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 dt \approx \tilde{S}_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \\ &= (y([t_{i-1}]^*) - \mathbf{x}'([t_{i-1}]^*)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'([t_{i-1}]^*)\boldsymbol{\beta})^2 w_{i1} + \\ &+ \sum_{t=[t_{i-1}]^*+1}^{[t_i]_*} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 w_{i1} + (y(t_i) - \mathbf{x}'(t_i)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t_i)\boldsymbol{\beta})^2 w_{i,L_i}. \end{aligned}$$

С учетом выражения (16) полученная формула примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) &= (y([t_{i-1}]^*) - \mathbf{x}'([t_{i-1}]^*)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'([t_{i-1}]^*)\boldsymbol{\beta})^2 (1 - \Delta t_{i-1}) + \\ &+ \sum_{t=[t_{i-1}]^*+1}^{[t_i]_*} (y(t) - \mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t)\boldsymbol{\beta})^2 + (y(t_i) - \mathbf{x}'(t_i)\boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{z}'(t_i)\boldsymbol{\beta})^2 \Delta t_i, \quad (19) \\ & \quad \quad \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{t}) = [\mathbf{O}_{L_i, (i-1)n} \quad \mathbf{M}_i^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{O}_{L_i, (k+1-i)n} \quad \mathbf{M}_i^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t})], \quad L_i = [t_i]_* - [t_{i-1}]^* + 2,$$

$$\mathbf{Y}_i(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_{i-1}})y([t_{i-1}]^*) \quad y([t_{i-1}]^*+1) \quad \dots \quad y([t_i]_*) \quad y(t_i)\Delta t_i]'$$

$$\mathbf{M}_i^{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_{i-1}})\mathbf{x}([t_{i-1}]^*) \quad \mathbf{x}([t_{i-1}]^*+1) \quad \dots \quad \mathbf{x}([t_i]_*) \quad \mathbf{x}(t_i)\Delta t_i]'$$

$$\mathbf{M}_i^{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = [(\sqrt{1-\Delta t_{i-1}})\mathbf{z}([t_{i-1}]^*) \quad \mathbf{z}([t_{i-1}]^*+1) \quad \dots \quad \mathbf{z}([t_i]_*) \quad \mathbf{z}(t_i)\Delta t_i]'$$

С использованием введенных обозначений из (19) имеем

$$\tilde{S}_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \tilde{S}_i(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{M}_i(\mathbf{t})\boldsymbol{\delta}\|^2.$$

Из полученных формул вычисления интегралов, входящих в формулу функции цели (5), находим ее приближенное выражение

$$S(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = S(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) \approx \tilde{S}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}) = \tilde{S}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{S}_i(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) = \|\mathbf{Y}(\mathbf{t}) - \mathbf{M}(\mathbf{t})\boldsymbol{\delta}\|^2, \quad (20)$$

где $\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = [\mathbf{Y}'_1(\mathbf{t}) \dots \mathbf{Y}'_{k+1}(\mathbf{t})]'$, $\mathbf{M}(\mathbf{t}) = [\mathbf{M}'_1(\mathbf{t}) \dots \mathbf{M}'_{k+1}(\mathbf{t})]'$.

Из минимизации (20) по $\boldsymbol{\delta}$ вытекает

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}) = \mathbf{r}(\mathbf{t})^{-1} \mathbf{M}'(\mathbf{t}) \mathbf{Y}(\mathbf{t}), \quad (21)$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}'(\mathbf{t}) \mathbf{M}(\mathbf{t})$.

Формула (21) справедлива, если матрица $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ обратима. Достаточным условием ее невырожденности, которое следует из [5, теорема 1], является выполнение следующих двух условий:

$$\text{а) матрица } \mathbf{m}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{M}'_1(\mathbf{t}))' \vdots (\mathbf{M}'_1(\mathbf{t}))' \\ (\mathbf{M}'_2(\mathbf{t}))' \vdots (\mathbf{M}'_2(\mathbf{t}))' \\ \vdots \vdots \vdots \\ (\mathbf{M}'_L(\mathbf{t}))' \vdots (\mathbf{M}'_L(\mathbf{t}))' \end{bmatrix} \text{ размера } L \times (n+m), \quad L = \sum_{j=1}^{k+1} L_j,$$

имеет полный ранг;

б) выполняются неравенства

$$L_i \geq n+m, \quad i=1, \dots, k+1. \quad (22)$$

Здесь L_i — число периодов времени, для которых известны значения всех переменных регрессии на i -м интервале постоянства переключающихся параметров регрессии. Величины L_i , $i=1, \dots, k+1$, определены в (14).

Условие а) выполняется, если компоненты вектора-строки $[\mathbf{x}'(t) \mathbf{z}'(t)]$ для $t=1, \dots, L$ линейно независимы, что является условием существования решения задачи оценивания в непрерывном времени (5), (6). Ранг матрицы $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ может быть определен непосредственно по наблюдаемым значениям регрессоров.

Условие б) выполняется, если в (6)

$$\theta_q \geq m+n, \quad q \in \{1, \dots, k+1\}; \quad \theta_i \geq n, \quad i=1, \dots, k+1, \quad i \neq q. \quad (23)$$

Таким образом, задача оценивания (5), (6) заменяется задачей оценивания с функцией цели $\tilde{S}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t}) \rightarrow \min$ и ограничениями (6), в которой используются значения переменных в дискретные моменты времени, а в ограничениях величины θ_i , $i=1, \dots, k+1$, заданы в соответствии с (23).

3.3. Вычисление градиента функции цели $\nabla_{\mathbf{t}} S(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t})$ при $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$. Обозначим $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}) = [\boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{t}) \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{t})]'$ решение задачи (5), (6) при фиксированном \mathbf{t} . Согласно [6] компоненты $\nabla_{\mathbf{t}} S(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{t})$ при $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ имеют вид

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}), \mathbf{t})}{\partial t_i} = (y(t_i) - \mathbf{X}_i(t_i)\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}))^2 - (y(t_i+h) - \mathbf{X}_{i+1}(t_i+h)\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}))^2, \quad i=1, \dots, k, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{X}_i(t_i) = [\mathbf{O}'_{(i-1)n} \quad \mathbf{x}'(t_i) \quad \mathbf{O}'_{(k-i+1)n} \quad \mathbf{z}'(t_i)],$$

$$\mathbf{X}_{i+1}(t_i+h) = [\mathbf{O}'_{in} \quad \mathbf{x}'(t_i+h) \quad \mathbf{O}'_{(k-i)n} \quad \mathbf{z}'(t_i+h)].$$

Здесь \mathbf{O}_q — нулевой q -мерный вектор; в случае, если $q=0$, \mathbf{O}'_0 означает, что нулевая строка отсутствует.

Из (24) следует выражение для компонент градиента

$$\frac{\partial S(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})}{\partial t_i} \approx d_i(\mathbf{t}) = (y(t_i) - \mathbf{X}_i(t_i)\delta(\mathbf{t}))^2 - (y([t_{i-1}]^*) - \mathbf{X}_{i+1}([t_{i-1}]^*)\delta(\mathbf{t}))^2, \quad (25)$$

$$i = 1, \dots, k,$$

так как согласно (12) и (13) $\tilde{u}(t) = u([t_{i-1}]^*)$, $t_{i-1} + h < t \leq [t_{i-1}]^*$, $i = 2, \dots, k+1$, где $u(t)$ — любая переменная регрессии (зависимая и независимая), $\tilde{u}(t)$ — ее ступенчатая аппроксимация.

С градиентом $\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t})$ связаны необходимые условия минимума для задачи оценивания. В реальных ситуациях часто величины θ_i , $i = 1, \dots, k+1$, в правых частях ограничений (6) достаточно малы, если они задаются как минимальные величины, удовлетворяющие неравенствам (23), а в точке минимума $S(\delta, \mathbf{t})$ расстояния между точками переключений превышают эти величины. Тогда ограничения (6) будут неактивными, что согласно [6] соответствует простому необходимому условию минимума $\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t}) = \mathbf{0}_k$. В данном случае вместо вектора $\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t})$ имеем его приближение $\mathbf{d}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^k$, компонентами которого являются функции $d_i(\mathbf{t})$, $i = 1, \dots, k$, определяемые из (25). Тогда для рассматриваемого случая необходимое условие минимума трансформируем в неравенство

$$\|\mathbf{d}(\mathbf{t})\| < \xi, \quad \xi > 0, \quad (26)$$

которое можно использовать как вспомогательное средство контроля окончания процесса оценивания.

3.4. Алгоритм вычислений. Задать положительную величину η и начальные приближения для точек переключения — вектор $\mathbf{t}_0 \in \Omega_{\mathbf{t}}$, где $\Omega_{\mathbf{t}}$ — область в k -мерном векторном пространстве, задаваемая ограничениями (6).

1. Положить $j = 0$.
2. Вычислить $\delta(\mathbf{t}_j)$ по (21) и $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$ по (20).
3. Найти решение $\boldsymbol{\tau}_j$ вспомогательной задачи

$$\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 + \boldsymbol{\tau}' \mathbf{d}(\mathbf{t}_j) \rightarrow \min; \quad (27)$$

$$g_1(\mathbf{t}_j + \boldsymbol{\tau}) = -t_{1j} - \tau_1 = g_1(\mathbf{t}_j) - \tau_1 \leq -\theta_1;$$

$$g_{k+1}(\mathbf{t}_j + \boldsymbol{\tau}) = t_{kj} + \tau_k - T = g_{k+1}(\mathbf{t}_j) + \tau_k \leq -\theta_{k+1}; \quad (28)$$

$$g_i(\mathbf{t}_j + \boldsymbol{\tau}) = t_{i-1,j} + \tau_{i-1} - t_{ij} - \tau_i = g_i(\mathbf{t}_j) + \tau_{i-1} - \tau_i \leq -\theta_i, \quad i = 2, \dots, k,$$

где τ_i , $i = 1, \dots, k$, — компоненты $\boldsymbol{\tau}$.

4. Проверить условия останова процесса вычислений. Как и в задачах оптимизации, используется на соседних итерациях близость векторов точек переключений и (или) функции цели. Если выполняются эти условия и условие (26), то останов. В противном случае переход к шагу 5.

5. Определить шаговый множитель γ_j из условия

$$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j + \gamma_j \boldsymbol{\tau}_j), \mathbf{t}_j + \gamma_j \boldsymbol{\tau}_j) - \tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) \leq -\eta \gamma_j \|\boldsymbol{\tau}_j\|^2, \quad \eta \in (0, 1), \quad (29)$$

где $\gamma_j = 2^{-\nu_j}$, ν_j — максимальное число в последовательности $\nu = 0, 1, 2, \dots$, для которой удовлетворяется это условие.

6. Положить $\mathbf{t}_{j+1} = \mathbf{t}_j + \gamma_j \boldsymbol{\tau}_j$. Переход к шагу 7.
7. Положить $j = j+1$ и перейти к шагу 2.

Из алгоритма вытекает способ определения ξ в (26). Он основан на следующем результате.

Лемма 1. Решение $\boldsymbol{\tau}_j$ задачи (27), (28) удовлетворяет неравенству $\|\boldsymbol{\tau}_j\| \leq \|\mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\|$.

Доказательство. Обозначим τ_j^* решение задачи (27). Пусть произвольный вектор τ принадлежит $\Omega_\tau = \{\tau : g_i(\mathbf{t}_j + \tau) \leq -\theta_1, i=1, \dots, k+1\}$. Так как функция цели (27) представляет собой шар, то τ_j^* — проекция τ_j^* на выпуклое множество Ω_τ .

Расстояние от проекции произвольной точки A , не принадлежащей некоторому выпуклому множеству Ω , на это множество до произвольной точки $B \in \Omega$ не превышает расстояния от A до B . Поэтому $\|\tau_j - \tau\| \leq \|\tau_j^* - \tau\|$. Из (28) при $\tau = \mathbf{O}_k$ получаем согласно (6) $\tau = \mathbf{O}_k \in \Omega_\tau$. Тогда, подставляя $\tau = \mathbf{O}_k$ в полученное неравенство, так как $\tau_j^* = \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)$, имеем утверждение леммы.

Учитывая, что $0 \leq \gamma_j \leq 1$, имеем $\|\mathbf{t}_{j+1} - \mathbf{t}_j\| = \|\gamma_j \tau_j\| \leq \|\tau_j\|$. Отсюда согласно лемме 1, положив в (26) $\xi = 1$, получаем $\|\mathbf{t}_{j+1} - \mathbf{t}_j\| < 1$. Поэтому, используя (26) при $\xi = 1$ как приближенное необходимое условие минимума при неактивных ограничениях (6) в точке \mathbf{t}_j , в оценке одной точки переключения может быть допущена ошибка максимум на единицу, но эта ошибка минимальна: все точки переключения в регрессии (1) — целочисленные.

Вместо (26) можно использовать менее жесткое условие

$$|d_i(\mathbf{t})| < \xi, \quad i=1, \dots, k,$$

которое при $\xi = 1$ согласно шагу 6 алгоритма означает, что оценка i -й точки переключения, $i=1, \dots, k$, не может измениться более чем на единицу.

3.5. Улучшение решения. Начальные точки. Пусть ввиду невозможности уменьшения функции цели $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ останов произошел в некоторой точке \mathbf{t}_* при невыполненном условии (26). Тогда $\|\mathbf{d}(\mathbf{t}_*)\|$ является достаточно большой величиной, и поэтому $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ можно уменьшить двумя способами: 1) покоординатный спуск в направлении приближения к антиградиенту $-\mathbf{d}(\mathbf{t})$, т.е. поиск в окрестности \mathbf{t}_* ; 2) перебор. Первый способ состоит в том, что по аналогии с [6] используется описанный в п. 3.4 алгоритм, где формулы вычислений на шагах 5 и 6 следует изменить следующим образом. Пусть уменьшение функции $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ проводится по t_q . Тогда точки переключения уточняются по формуле

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + \gamma_j p_i \tau_{ij}, \quad i=1, \dots, k, \quad j=0, 1, 2, \dots, \quad (30)$$

а шаговый множитель на j -й итерации должен удовлетворять условию

$$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j + \gamma_j \mathbf{p} \tau_j), \mathbf{t}_j + \gamma_j \mathbf{p} \tau_j) - \tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) \leq -\eta \gamma_j \left(\sum_{i=1}^k p_i \tau_{ij}^2 \right), \quad (31)$$

где $p_i = 0, i=1, \dots, k, i \neq q, p_q = 1$; $\mathbf{p} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_k)$ — диагональная матрица порядка k .

Если корректировка точек переключений по формулам (30), (31) не уменьшает функцию цели $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})$, то целесообразно провести поиск новой начальной точки \mathbf{t}_0 . Он может быть выполнен разными способами, в том числе и перебором. Одна из его разновидностей — сканирование точек переключений, которое состоит в следующем. Пусть необходимо найти новое значение точки переключения t_i . Фиксируются все остальные $k-1$ точка. На интервале

$$t_{i-1} + \theta_i \leq t_i \leq t_{i+1} - \theta_{i+1} \quad (32)$$

выполняется минимизация $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ по одной переменной. Для этого проводится

перебор целочисленных периодов времени в интервале (32) с шагом единица. Поиск начинается с $i=1$ и продолжается до $i=k$. Можно начинать поиск с точки переключения, которой соответствует наибольшая по модулю компонента $\mathbf{d}(\mathbf{t}_*)$. Затем переход к следующей по убыванию модуля компоненте и т.д.

Полученная точка является начальной для следующего цикла оценивания точек переключения и параметров регрессии (4) согласно п. 3.4. Чтобы найти глобальный минимум, требуется начинать итерационный процесс оценивания точек переключения из разных точек, анализируя, например, график изменения зависимой переменной.

Рассмотренный алгоритм оценивания является градиентным. Как и для всех методов такого типа, его эффективность зависит от выбора начальной точки: чем она ближе к решению задачи оценивания, тем лучше сходимость.

Для получения начальной точки \mathbf{t}_0 можно использовать метод последовательного просмотра с шагом единица всех точек на интервале наблюдения $[1, T]$. Он состоит в том, что в случае отсутствия априорной информации о точках переключения интервал $[1, T]$ разбивается на $k+1$ подынтервал (k задано), длина которых одинакова и равна целому числу. Отклонение возможно при длине, равной $T/(k+1)$ — не целому числу. Указанные подынтервалы имеют вид (32). Оба конца подынтервала фиксируются, а выбранная точка переключения t_i последовательно принимает целые значения на (32). При этом остальные точки переключения $t_l, l=1, \dots, k, l \neq i$, фиксированы. В каждой предполагаемой точке переключения выполняется проверка возможной замены двух регрессий (слева и справа от этой точки) одной регрессией. Точка t_i считается значимой по критерию [7] с заданным уровнем доверия, если такую замену нельзя выполнить, и считается незначимой в противном случае. Для фиксированного k расчет начинается с $i=1$ и заканчивается $i=k$. Этот метод позволяет также оценить число переключений k^0 , если расчеты начинать с $k=1$.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Суть эксперимента заключается в определении эффективности нахождения локального минимума функции цели задачи оценивания для регрессии (1) при числе точек переключения $k=k^0$, что исключает влияние на оценивание незнания k^0 . В качестве исходных данных использовались регрессия и результаты наблюдений, описанные в [5], а именно число наблюдений $T=58$, число точек переключения $k=k^0=5$, распределение шума $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t=1, 2, \dots, T$. Уровень шума в регрессии (1) определялся отношением $(\bar{y}/\sigma) \cdot 100\%$, где \bar{y} — среднее значение зависимой переменной на интервале наблюдения $[1, T]$. Вектор истинных точек переключения $\mathbf{t}^0 = [6 \ 22 \ 34 \ 38 \ 44]'$. Положено во всех расчетах согласно (23) $\theta_i = 3, i=1, \dots, 5$; $\eta = 0.1$ в (29). Критерий близости результатов оценивания: $|\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) - \tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_{j-1}), \mathbf{t}_{j-1})| \leq 0.05$.

Задача 1. Построение регрессии с переключениями вида (1) для случая, когда нет регрессоров, при которых параметры не переключаются. В рассматриваемой регрессии $n=2, \mathbf{x}_t = [x_{t1} \ x_{t2}]', \sigma=0.5$, что соответствует достаточно высокому уровню шума 11.12%. Каждая независимая переменная представляет собой сумму линейного тренда и нормально распределенного шума. Все независимые переменные между собой сильно коррелированы — коэффициенты корреляции равны 0.996, что свидетельствует о сильной мультиколлинеарности. Оба регрессора x_1 и x_2 изображены на рис. 4. Зависимая переменная изображена на рис. 5. Из графика видно, что закон изменения зависимой переменной меняется во времени, однако ввиду высокого уровня шума визуально приближенно можно определить только некоторые точки переключения.

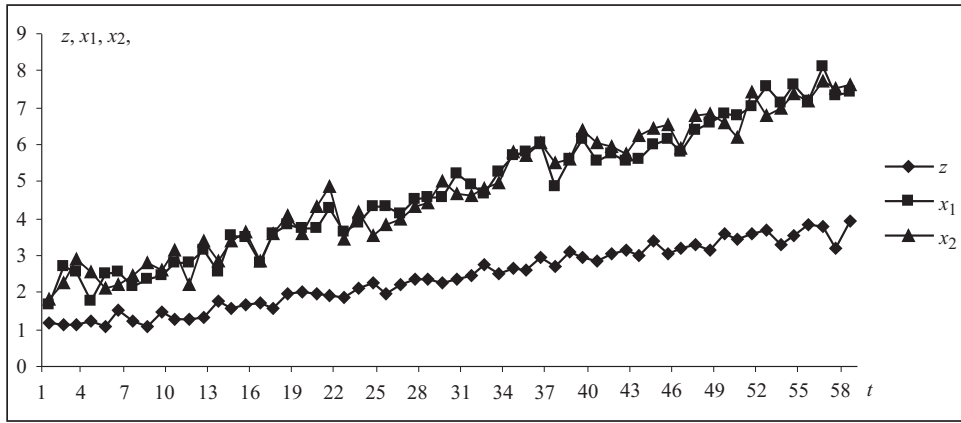


Рис. 4. Независимые переменные в задаче 1 и в задаче 2 (регрессор z имеется только в задаче 2)

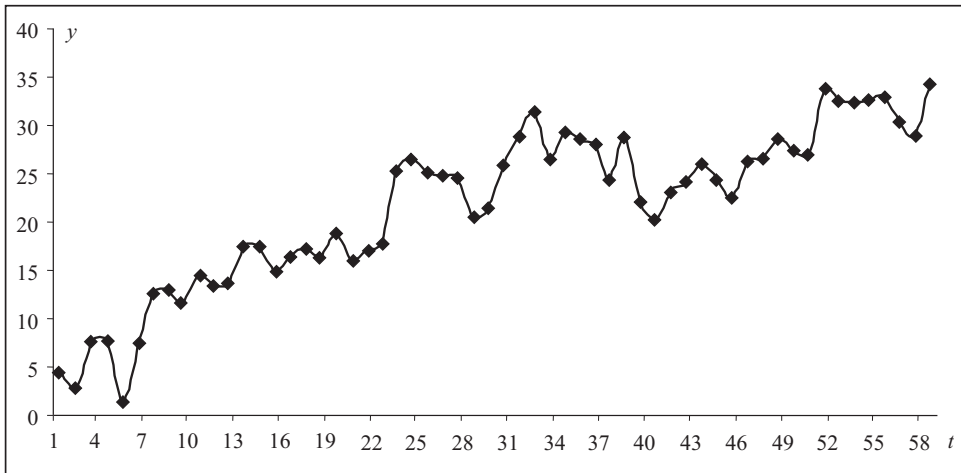


Рис. 5. Зависимая переменная в задаче 1

Таблица 1. Оценивание точек переключения, $\beta = \mathbf{O}_m$, $\mathbf{t}_0 = [6 \ 32 \ 35 \ 38 \ 50]'$

j	Δ_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $	j	Δ_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $
0	0.13636	71.491	—	7.752913	7	0.107625	55.899	4	1.3337
1	0.116554	60.843	3	99.36055	8	0.105119	55.061	3	1.265112
2	0.11925	60.732	9	4.023967	9	0.101755	54.776	1	1.159452
3	0.111337	57.323	3	2.55687	10	0.001869	13.645	—	1.25772
4	0.110447	56.916	4	1.703658	11	0.002309	13.09	3	1.229188
5	0.106132	55.946	2	97.37849	12	0.003809	12.952	3	1.098771
6	0.107625	55.901	10	1.332963	13	0.004424	12.933	4	0.975112

В табл. 1, 2 представлены характеристики итерационных процессов оценивания для разных начальных точек. В табл. 1 начальная точка $\mathbf{t}_0 = [6 \ 32 \ 35 \ 38 \ 50]'$ получена методом последовательного просмотра точек переключения, а в табл. 2 $\mathbf{t}_0 = [10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50]'$, что представляет равномерное распределение точек переключения по интервалу наблюдения. В этих таблицах приняты следующие обозначения: j — номер итерации; $\Delta_j = (1/k) \sum_{i=1}^k (|t_{ij} - t_i^0| / t_i^0) \cdot 100\%$ — относительное отклонение \mathbf{t}_j от \mathbf{t}^0 ; v_j — число дроблений шага на j -й итерации.

Таблица 2. Оценивание точек переключения, $\beta = \mathbf{O}_m$, $\mathbf{t}_0 = [10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50]'$

j	Δ_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $	j	Δ_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $
0	0.212844	237.538	—	20.17849	9	0.033272	30.309	5	18.68279
1	0.069629	69.037	1	15.82126	10	0.033272	30.165	9	1.067454
2	0.058829	65.093	4	18.1473	11	0.032643	29.594	2	2.295149
3	0.047843	56.898	4	12.04073	12	0.033065	29.555	5	1.594041
4	0.042647	49.951	4	73.08385	13	0.004965	13.281	—	0.857375
5	0.045653	48.601	8	6.487022	14	0.005298	13.183	2	33.79028
6	0.040646	46.858	3	11.84202	15	0.006378	13.151	7	1.125228
7	0.040846	46.538	1	3.717392	16	0.006367	13.108	3	0.560379
8	0.034019	37.095	6	19.13595					

После 9-й итерации процесс вычислений остановился: функция цели не уменьшалась, а условие (26) при $\xi = 1$ не выполнялось. Поэтому сначала был выполнен покоординатный спуск в направлении $-\mathbf{d}(\mathbf{t})$, который не привел к уменьшению функции цели. Затем методом сканирования интервалов (32) для $i = 1, \dots, 5$ получена новая начальная точка $\mathbf{t}_0 = [6.011 \ 22 \ 34.071 \ 38.206 \ 44]'$, в которой были изменены вторая и пятая компоненты по сравнению с 9-й итерацией, что уменьшило функцию цели. Далее за три итерации достигнуто выполнение (26) при близких значениях функции цели. Получена оценка $\hat{\mathbf{t}} = [6.021 \ 22.212 \ 34.077 \ 38.01 \ 44.284]'$.

Поскольку истинные точки переключения в регрессии (1) — целые числа, то компоненты $\hat{\mathbf{t}}$ — оценки точек переключения \hat{t}_i необходимо округлить до ближайшего большего или меньшего целого числа \hat{t}_i , $i = 1, \dots, 5$. В результате получим точку $\hat{\hat{\mathbf{t}}}$. Всего имеем $2^5 = 32$ варианта округлений. Выберем из них тот, которому соответствует наименьшая величина функции цели $S(\delta(\hat{\hat{\mathbf{t}}}), \hat{\hat{\mathbf{t}}})$. Оптимальный выбор $\hat{\hat{\mathbf{t}}}$ может быть осуществлен по алгоритму из [5] после его небольшой модификации, что позволяет перейти к задаче оценивания с булевыми переменными. Для рассматриваемого расчета получено $\hat{\hat{\mathbf{t}}} = \mathbf{t}^0$, что привело к незначительному увеличению функции цели до 13.255, т.е. на 2.43 %.

В табл. 2 на 12-й итерации процесс вычисления остановился. Покоординатный спуск не уменьшил функцию цели. Далее методом сканирования интервалов (32) для $i = 1, \dots, 5$ получена новая начальная точка $\mathbf{t}_0 = [6.017 \ 22.310 \ 34.108 \ 38.164 \ 44]'$, которая отличается от \mathbf{t}_{12} последней компонентой. Затем после трех итераций найдена оценка $\hat{\mathbf{t}} = [6.022 \ 22.313 \ 34.135 \ 38.024 \ 44.411]'$, которая была округлена до целых чисел. При этом функция цели возрасла до 13.255, т.е. на 1.11 %. Полученная точка $\hat{\hat{\mathbf{t}}}$ совпала с \mathbf{t}^0 .

Задача 2. Построение регрессии с переключениями вида (1), в которой $n = 2$, $m = 1$, $\mathbf{x}_t = [x_{t1} \ x_{t2}]'$, $\mathbf{z}_t = z_t \in \mathbb{R}^1$, $\beta^0 = \beta^0 = 7$, $\sigma = 2$, что соответствует уровню шума 9.25 %. Таким образом, параметр при регрессоре z_t не переключается. Регрессор \mathbf{x}_t такой же, как и в задаче 1; регрессор z_t , как и компоненты \mathbf{x}_t , представляет сумму линейного тренда с нормально распределенным шумом (см. рис. 4) и зависит от \mathbf{x}_t . В рассматриваемой регрессии, как и в задаче 1, имеет место сильная мультиколлинеарность, поскольку коэффициенты корреляции между всеми независимыми переменными равны 0.996. Временной ряд зависимой переменной приведен на рис. 6, из которого сложно определить точки переключений. Для начальной точки $\mathbf{t}_0 = [10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50]'$ (см. задачу 1) процесс

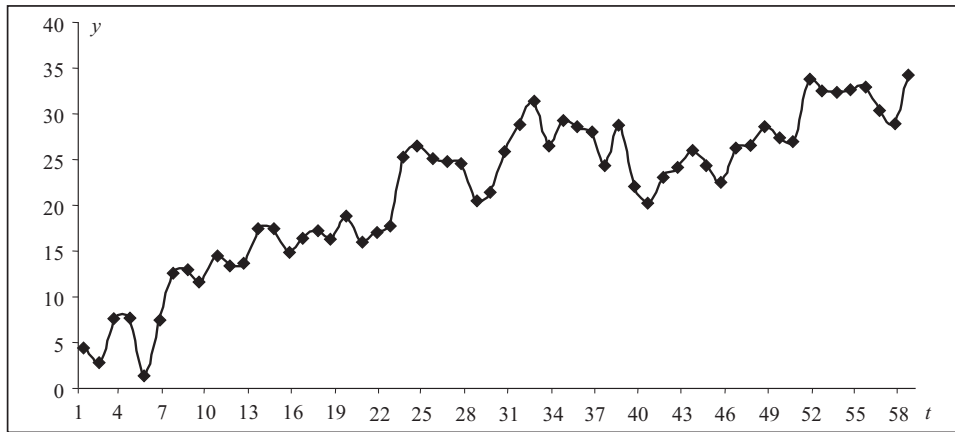


Рис. 6. Зависимая переменная в задаче 2

Таблица 3. Оценивание точек переключения, $\beta^0 = \beta^0 = 7$, $\mathbf{t}_0 = [10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50]'$

j	\mathbf{t}_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $	j	\mathbf{t}_j	$\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	v_j	$\ \mathbf{d}(\mathbf{t}_j)\ $
0	0.212844	354.585	—	22.5822	7	0.044247	193.572	—	5.432931
1	0.091045	246.845	1	11.20468	8	0.040978	183.539	—	7.264777
2	0.067764	234.046	3	9.900952	9	0.04316	188.990	—	1.453414
3	0.067009	231.23	3	23.83304	10	0.046224	188.852	3	9.789503
4	0.043334	209.371	3	14.32377	11	0.046575	188.643	7	10.48025
5	0.045193	198.177	3	22.02089	12	0.046586	188.635	—	0.796118
6	0.047163	195.173	5	9.57554					

определения оценок истинных точек переключений представлен в табл. 3. В результате шести итераций было достигнуто значительное уменьшение функции цели. На 6-й итерации процесс вычислений остановился. Поэтому на 7-й итерации в соответствии с (30), (31) проводилась последовательная минимизация по точкам переключений, расставленных по убыванию модулей соответствующих компонент $\mathbf{d}(\mathbf{t}_6)$. Полученной точке \mathbf{t}_7 соответствует меньшая величина функции цели. Уменьшить ее градиентным спуском не удалось. Поэтому на 8-й итерации использовался метод сканирования по интервалам (32).

Получена новая точка $\mathbf{t}_8 = [6.064 \ 22.539 \ 35 \ 38.005 \ 50.168]'$, причем $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_8), \mathbf{t}_8) < \tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_7), \mathbf{t}_7)$, а $\mathbf{d}(\mathbf{t}_8) = [-0.928 \ -7.066 \ 0.493 \ -1.12 \ -0.7]'$. Градиентный спуск из \mathbf{t}_8 оказался невозможным. Поэтому перебором была получена новая начальная точка $\mathbf{t}_9 = [6.064 \ 22.779 \ 35 \ 38.005 \ 50.168]'$, для которой $\mathbf{d}(\mathbf{t}_9) = [-0.573 \ 0.167 \ 0.335 \ -1.087 \ -0.68]'$, причем $\|\mathbf{d}(\mathbf{t}_9)\| < \|\mathbf{d}(\mathbf{t}_8)\|$. Точки \mathbf{t}_8 и \mathbf{t}_9 практически совпадают, а функция цели $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_9), \mathbf{t}_9)$ превышает $\tilde{S}(\delta(\mathbf{t}_8), \mathbf{t}_8)$ на 2.9%. Из точки \mathbf{t}_9 проводился градиентный спуск (итерации 10–12). На последней итерации — останов ввиду малого изменения функции цели и выполнения условия (26) имеем $\mathbf{t}_{12} = [6.132 \ 22.762 \ 35 \ 38.182 \ 50.252]'$. Из сравнения точек \mathbf{t}_8 и \mathbf{t}_{12} вытекает, что $\mathbf{t}_{12} \approx \mathbf{t}_8$. Следовательно, итерации 9–12 использовались для выполнения всех условий останова.

При дальнейшем уменьшении функции цели, округлив компоненты \mathbf{t}_{12} до целых величин, получаем $\hat{\mathbf{t}} = [6 \ 22 \ 35 \ 38 \ 50]'$, $\tilde{S}(\delta(\hat{\mathbf{t}}), \hat{\mathbf{t}}) = 186.579$ (уменьшение функции цели на 1.1%). Таким образом, все оценки точек переключений, кроме пятой, совпали с истинными величинами. Здесь процесс оценивания сложнее и имеет

меньшую точность, чем для задачи 1 ввиду наличия параметра регрессии (который постоянен на интервале наблюдения) в сочетании с большим уровнем шума. Во всех случаях расчеты оценок были получены за небольшое число итераций.

В заключение отметим, что оценивание точек переключения линейной регрессии представляет сложную задачу дискретной или смешанной нелинейной оптимизации в зависимости от отсутствия или наличия постоянных во времени параметров регрессии. В настоящей статье предпринята попытка найти приближенное решение такой задачи, используя градиентные методы в сочетании с одномерной минимизацией по каждой точке переключения. Вычислительный эксперимент для непростых условий оценивания — мультиколлинеарность и достаточно высокий уровень шума дал удовлетворительный результат. Причем переход от оценок точек переключения регрессии (4) к их оценкам для регрессии (1) слабо влиял на сумму квадратов остатков. Однако оценки параметров этих регрессий заметно отличались, что можно объяснить сильной мультиколлинеарностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garcia R., Perron P. An analysis of the real interest rate under regime shifts. *Review of Economics and Statistics*. 1996. Vol. 78, N 1. P. 111–125.
2. Bai J., Perron P. Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*. 1998. Vol. 66, N 1. P. 47–78.
3. Bai J., Perron P. Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of Applied Econometrics*. 2003. Vol. 18, N 1. P. 1–22.
4. Bellman R., Roth R. Curve fitting by segmented straight lines. *Journal of the American Statistical Association*. 1969. Vol. 64, Iss. 327. P. 1079–1084.
5. Korkhin A.S. Constructing a switching regression with unknown switching points. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 3. P. 443–455.
6. Кнопов P.S., Korkhin A.S. Continuous-time switching regression method with unknown switching points. 2020. Vol. 56, N 1. P. 68–80.
7. Chow G.C. Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. *Econometrica*. 1960. Vol. 28, N 3. P. 591–605.

Надійшла до редакції 04.06.2019

А.С. Корхін

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РЕГРЕСІЇ З ПЕРЕМІКАННЯМИ З НЕВІДОМИМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕМІКАННЯ

Анотація. Метод можна застосовувати до регресій, змінні яких — часові ряди. Метод оцінювання базується на тому, що такі ряди розглядаються як спостережувані значення неперервних випадкових функцій часу. Ця властивість дає змогу отримати розв'язок задачі оцінювання, використовуючи градієнтні методи розв'язання задач оптимізації. Наведено приклади використання запропонованого методу.

Ключові слова: регресія, точки перемикання, параметри регресії, неперервний час, дискретний час, оцінювання.

A.S. Korkhin

AN APPROXIMATE METHOD OF CONSTRUCTING A SWITCHING REGRESSION WITH UNKNOWN SWITCHING POINTS

Abstract. The method is applicable to regressions whose variables are time series. The estimation method is based on the fact that these series are considered as observed values of continuous random functions of time. This property makes it possible to solve the estimation problem using gradient methods for optimization problems. Examples of using the proposed method are given.

Keywords: regression, switching points, regression parameters, continuous time, discrete time, estimation.

Корхін Арнольд Самуилович,

доктор физ.-мат. наук, профессор Приднепровской академии строительства и архитектуры, Днепр, e-mail: a.s.korkhin@gmail.com.